БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.444

ЯРОЦКАЯ ЛЮДМИЛА ДМИТРИЕВНА

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО ИНДЕКСУ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЕВОГО ТИПА И G-ФУНКЦИЕЙ МЕЙЕРА В ЯДРАХ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Минск, 2003

Работа выполнена в Белорусском государственном университете и Белорусском государственном технологическом университете

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор
Якубович Семён Борисович
(Universitet Porto, Portugaliya)

Научный консультант – доктор физико-математических наук, профессор
Килбас Анатолий Александрович
(Белорусский государственный университет, кафедра теории функций)

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Антоневич Анатолий Борисович (Белорусский государственный университет, кафедра функционального анализа)

доктор физико-математических наук, профессор Вирченко Нина Афанасьевна (Национальный технический университет Украины (КПИ), кафедра математического анализа и теории вероятностей)

Оппонирующая организация: Институт математики НАН Беларуси

Защита состоится 28 марта 2003 г. в 10^{00} на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 в Белорусском государственном университете по адресу: 220050, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 4, главный корпус, к. 206, тел. ученого секретаря – 226-55-41.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета

Автореферат разослан "20" февраля 2003 г.

Исполняющий обязанности
ученого секретаря совета
по защите диссертаций, доктор
физико-математических наук, профессор Н.В. Лазакович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Диссертация посвящена исследованию интегральных преобразований по индексу специальной функции ядра. Этой тематикой занимались многие авторы, в том числе Н.Н. Лебедев, М.И. Конторович, Ф. Мелер (F. Mehler), В.А. Фок, М.Н. Олевский, И.П. Скальская, Х. - Ю. Глеэке (H. - J. Glaeske), А.М. Гомилко, Н.А. Вирченко, Дж. Уимп (J. Wimp), С.Б. Якубович и др.

Диссертационная работа выполнена в этом направлении. Она посвящена изучению вопросов действия из пространств L_2 в L_2-пространства с весом, композиционной структуры, формул обращения интегральных преобразований по индексу, порожденных композицией преобразований Конторовича-Лебедева и некоторых преобразований типа свертки Меллина, а также нахождению ряда свойств ядер рассматриваемых преобразований.

Важность изучения интегральных преобразований обусловлена широкими применениями в теории дифференциальных и интегральных уравнений, операционном исчислении, теории краевых задач, что позволяет находить их решения в замкнутой форме и изучать их структурные свойства. При этом с точки зрения приложений одной их центральных является проблема обращения. Интегральные преобразования являются одним из наиболее мощных инструментов при решении задач математической физики и других естественных наук. В то время как наиболее изученные интегральные преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, Ханкеля, Гильберта, Стилтьеса, операторы дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля находят свое успешное применение в различных областях математики, теория интегральных преобразований по индексу и их приложения находятся на стадии становления и развития. Поэтому одной из актуальных задач теории интегральных преобразований по индексу является создание методов изучения преобразований несверточного типа в различных функциональных пространствах.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Исследования проводились частично на кафедре теории функций Белорусского государственного университета в рамках научно-исследовательской темы Министерства Образования и Науки Республики Беларусь "Специальные и обобщённые функции и операторные уравнения", а затем были продолжены в Белорусском государственном технологическом университете в рамках темы ГБ 10-96 "Качественное исследование свойств дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений и решение некоторых задач управления и механики", которая является отдельной составной частью научного направления "Математические структуры"("Математические структуры 21"), входящего в НИР Республики Беларусь.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является получение условий существования, действия из пространства L_2 в L_2-пространства с весом интегральных преобразований по индексу специальных функций бесселевого типа, установление их композиционной структуры и формул обращения, и обобщение полученных результатов на некоторое преобразование по индексу с G-функцией Мейера в ядре.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

—исследовать свойства функций, связанных с функцией Макдональда;

—получить асимптотические оценки на бесконечности ядер преобразований по индексу, включающих специальные функции бесселевого типа и G-функцию Мейера;

—построить новые интегральные преобразования по индексу с функциями, связанными с функцией Макдональда, и более общей G-функцией Мейера, и исследовать их действие и композиционную структуру в пространствах L_2 с весом;

—построить формулы обращения рассматриваемых преобразований.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются интегральные преобразования по индексу с ядрами, связанными с функцией Макдональда, и их аналоги с общей G-функцией Мейера в ядре, возникающие при решении задач математической физики, в частности, при исследованиях дифракции на призме.

Предметом исследования являются структурные и композиционные свойства рассматриваемых преобразований в L_2-пространствах с весом, а также формулы их обращения.

Методология и методы проведенного исследования. При решении поставленных задач используются методы теории интегральных преобразований и специальных функций, включающие теорию преобразования Конторовича-Лебедева, теорию обобщенных преобразований, теорию H-преобразования в пространствах $L_{\nu,r}$, равенство Парсеваля для преобразования Меллина и др.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Научная новизна работы заключается в следующем:

—получены оценки, асимптотические свойства и интегральные представления для функций, связанных с функцией Макдональда;

– найдены асимптотические оценки на бесконечности по индексу функций Макдональда, Уиттекера, Лежандра, гипергеометрической функции Гаусса, а также функций бесселевого типа и более общей G-функции Мейера, которые являются ядрами ряда преобразований по индексу;

—построены интегральные преобразования по индексу с функциями, связанными с функцией Макдональда, и более общей G-функцией Мейера и исследованы их действие и композиционная структура из пространства L_2 в L_2-пространства с весом;

—доказаны теоремы обращения рассматриваемых преобразований в пространстве L_2.

Практическая (экономическая, социальная) значимость полученных результатов. Работа носит теоретический характер и вносит определенный вклад в разработку теории интегральных преобразований по индексу специальной функции ядра.

Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях специальных функций, интегральных преобразований и их приложений при решении интегральных, дифференциальных уравнений, уравнений типа свертки.

Результаты могут быть также использованы при решении конкретных задач математической физики, в частности, задач теории дифракции для клиновидных областей, теории теплопроводности, и в учебном процессе в качестве спецкурсов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Асимптотические представления на бесконечности по индексу функций Макдональда, Уиттекера, Лежандра, гипергеометрической функции Гаусса, а также функций бесселевого типа и более общей G-функции Мейера, являющихся ядрами ряда преобразований по индексу.

2. Композиционная структура и формулы обращения интегральных преобразований по индексу с функциями, связанными с функциями

Макдональда, в пространствах L_2 с весом.

3. Композиционная структура и формула обращения интегрального преобразования по индексу G-функции Мейера.

Личный вклад соискателя. Все изложенные в диссертации основные результаты получены соискателем самостоятельно. Научная идея исследования и задачи были сформулированы научным руководителем д. ф.-м. н. С.Б. Якубовичем. Часть результатов опубликована в соавторстве с научным руководителем.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на:

Международной математической конференции "Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление", посвященной 90 летию со дня рождения академика Ф.Д. Гахова (Минск, 16-20 февраля 1996 г.);

— Международной математической конференции AMADE 1999 (Минск, 14 - 18 сентября 1999 г.);

— VIII Белорусской математической конференции (Минск, 19 – 24 июня 2000 г.);

— Международной научно-методической конференции "Математика в ВУЗе. Современные интеллектуальные технологии"(В. Новгород, 21 – 25 июня 2000 г.);

— Минском городском семинаре по краевым задачам имени академика Ф.Д. Гахова (руководитель – профессор Э.И. Зверович).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 научных работах. Среди них 5 статей в научных журналах, 1 статья в сборниках научных трудов и 4 тезисов докладов на международных конференциях. Общий объем опубликованных материалов составляет шестьдесят три страницы.

5 работ опубликованы без соавторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, трёх глав, заключения и списка использованных источников, насчитывающих 65 наименования. Общий объём диссертации – 85 страниц, из которых 6 страниц занимает список использованных источников.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Во **введении** даётся краткая характеристика работы, её цели и задачи, описываются основные направления исследования и характеризуются результаты, полученные в диссертационной работе.

В **первой главе** приводится краткий обзор исторических сведений по вопросам, связанным с тематикой диссертации — теорией интегральных преобразований по индексу специальной функции ядра, описываются основные направления и методы исследования, среди которых основными являются методы представления интегральных преобразований по индексу с функциями бесселевого типа в виде композиции преобразования Конторовича-Лебедева (простейшего в классе преобразований по индексу) и преобразования типа Гильберта и и нахождения формулы обращения, исходя из равенства Парсеваля для преобразования Меллина, а также даётся краткое содержание работы.

Во **второй главе** приводятся результаты, относящиеся к теории специальных функций. В разделе 2.1 содержатся необходимые определения и свойства функций гипергеометрического типа, в частности, функций Бесселя, Макдональда, Лежандра, Уиттекера, гипергеометрической функции Гаусса и G-функции Мейера. Здесь же даётся теорема Слейтер, которая решает проблему выражения G-функции Мейера через линейные комбинации обобщённых гипергеометрических функций со степенными множителями.

В п. 2.2.1 вводятся и изучаются свойства специальных функций, представимых определёнными интегралами вида

$$C_s(x,\tau) = \int\limits_0^\infty \cos(x\text{sh}u)\sin(\tau u)du, \ x > 0, \tag{1}$$

$$S_c(x,\tau) = \int\limits_0^\infty \sin(x\text{sh}u)\cos(\tau u)du, \ x > 0, \tag{2}$$

напоминающими следующие известные интегральные представления для функции Макдональда

$$K_{i\tau}(x)\text{ch}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) = \int\limits_0^\infty \cos(x\text{sh}u)\cos(\tau u)du, \ x > 0,$$

$$K_{i\tau}(x)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)=\int\limits_0^\infty \sin(x\mathrm{sh}u)\sin(\tau u)du,\ x>0.$$

Для них выводятся ряд оценок, доказываются интегральные представления и асимптотические равенства. Следующее утверждение даёт интегральные представления функций (1) и (2) через контурные интегралы Меллина-Барнса.

Лемма 2.2. *Справедливы следующее представления:*

$$C_s(x,\tau)=\frac{\mathrm{sh}(\pi\tau/2)}{4\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s+i\tau/2)\Gamma(s-i\tau/2)\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(s+1/2)\Gamma(1/2-s)}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{-s}ds,$$

$$S_c(x,\tau)=\frac{\mathrm{ch}(\pi\tau/2)}{4\pi i}\times$$

$$\times\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s+i\tau/2)\Gamma(s-i\tau/2)\Gamma(s+1/2)\Gamma(1/2-s)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{-s}ds,$$

где $0<\gamma<1/2$.

Связь функций (1) и (2) с функцией Макдональда $K_{i\tau}(x)$ посредством преобразований типа Гильберта устанавливает

Лемма 2.3. *Справедливы следующие представления:*

$$C_s(x,\tau)=\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\int\limits_0^\infty\frac{tK_{i\tau}(t)}{t^2-x^2}dt, \tag{3}$$

$$S_c(x,\tau)=\frac{2}{\pi}x\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\int\limits_0^\infty\frac{K_{i\tau}(t)}{x^2-t^2}dt. \tag{4}$$

Аналогичные результаты имеют место для функции

$$M_{i\tau}(x)=\int\limits_0^\infty e^{-x\mathrm{ch}t}\sin(\tau t)dt,\ x>0, \tag{5}$$

рассмотренной в п. 2.2.2.

В разделе 2.3 получена асимптотическая формула представления на бесконечности функции Макдональда по индексу с помощью классической формулы Стирлинга для гамма-функции Эйлера.

Теорема 2.2. *Функция Макдональда $K_{i\tau}(x)$ имеет следующее асимптотическое представление по индексу при $x > 0$ и $\tau \to +\infty$*

$$K_{i\tau}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} e^{-\pi\tau/2} \sin\left(\tau \ln\left(\frac{2\tau}{x}\right) - \tau + \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{4\tau}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right).$$

Аналогичные результаты даны для специальных функций Лежандра, Уиттекера, гипергеометрической функции Гаусса и некоторых комбинаций функций Бесселя по их параметрам (индексам), а также для G-функции Мейера специального вида и записаны пять частных случаев полученного представления. Отметим, что рассматриваемые функции являются ядрами ряда интегральных преобразований по индексу.

Третья глава посвящена исследованию интегральных преобразований по индексу с функциями бесселевого типа и G-функцией Мейера специального вида в пространствах $L_2(\mathbf{R}_+; \mu(x))$, с нормой

$$\|f\|_{L_2(\mathbf{R}_+;\mu(x))} = \left(\int_0^\infty \mu(x)|f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Вначале в п. 3.1.1 приводятся необходимые вспомогательные сведения из теории интегрального преобразования Меллина

$$f^*(s) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt, \ s \in \mathbf{C}, \tag{6}$$

в том числе условия его существования в пространстве $L_2\left(\mathbf{R}_+; x^{2\mu-1}\right)$ и равенство Меллина-Парсеваля: если $f(x) \in L_2\left(\mathbf{R}_+; x^{2\mu-1}\right)$ и $g(x) \in L_2\left(\mathbf{R}_+; x^{1-2\mu}\right)$, то

$$\int_0^\infty f(x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} f^*(s) g^*(s) ds. \tag{7}$$

В п. 3.1.2 вводится преобразование Конторовича-Лебедева вида

$$[KLf](x) = 4 \int_0^\infty \tau K_{2i\tau}(2x) f(\tau) d\tau, \ x > 0, \tag{8}$$

где $K_{i\tau}(x)$ — функция Макдональда. Устанавливается, что оператор (8) ограничен в пространстве функций $L_2(\mathbf{R}_+)$ и для него справедлива теорема типа Планшереля 6.9 из [1] [1]

Теорема 3.6. *Если* $f(\tau) \in L_2\left(\mathbf{R}_+ ; \tau \mathrm{sh}^{-1}(2\pi\tau)\right)$, *то* (8) *принадлежит пространству* $L_2\left(\mathbf{R}_+ ; x^{-1}\right)$. *Кроме того, справедливо равенство Парсеваля*

$$\int_0^\infty |[KLf](x)|^2 \frac{dx}{x} = 2\pi^2 \int_0^\infty \frac{\tau}{\mathrm{sh}(2\pi\tau)} |f(\tau)|^2 d\tau,$$

и обратный оператор почти для всех $\tau \in \mathbf{R}_+$ *имеет вид*

$$f(\tau) = \frac{4\mathrm{ch}(\pi\tau)}{\sqrt{\tau}\pi^2} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \int_0^\tau \sqrt{y}\,\mathrm{sh}(\pi y) K_{2iy}(2x) [KLf](x) \frac{dy\,dx}{x}. \tag{9}$$

В разделе 3.2 рассматривается интегральное преобразование с ядром (1)

$$(C_s f)(x) = 4 \int_0^\infty \frac{\tau}{\mathrm{sh}(\pi\tau)} C_s(2x, 2\tau) f(\tau) d\tau, \; x > 0. \tag{10}$$

Доказывается ограниченность оператора C_s в пространстве функций $L_2(\mathbf{R}_+)$. Следующее утверждение показывает, что преобразование (10) является композицией преобразования Конторовича-Лебедева (8) и преобразований типа Гильберта.

Теорема 3.7. *Пусть* $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$. *Тогда преобразования (10) и (8) существуют, имеет место равенство Парсеваля*

$$\int_0^\infty |(C_s f)(x)|^2 dx = \int_0^\infty |[KLf](x)|^2 dx$$

и справедливы двойственные формулы со сходимостью в среднем квадратичном

$$(C_s f)(x) = \frac{2}{\pi} \lim_{N \to \infty} \int_{1/N}^N \frac{[KLf]\left(t^{-1}\right) t^{-1}}{1 - (xt)^2} dt,$$

[1] Yakubovich S.B., Luchko Yu.F. The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions. Dordrecht-Boston, 1994.

$$x^{-1}[KLf]\left(x^{-1}\right) = \frac{2}{\pi} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{1/N}^{N} \frac{(C_s f)(t)}{1-(xt)^2} dt.$$

Доказывается, что образы Меллина операторов (10) и (8) связаны равенством

$$(C_s f)^*(s) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi s}{2}\right) [KLf]^*(s), \tag{11}$$

где $s = 1/2 + it$, $t \in \mathbf{R}$, и функция $\operatorname{ctg}(\pi s/2)$ является ядром Фурье. Кроме того, устанавливается, что функции $(C_s f)^*(s)$ и $[KLf]^*(s)$ — аналитические в полосе $0 < \operatorname{Re}(s) < 1/2$, а $(C_s f)^*(\gamma + it)$ принадлежит пространству Харди $H_2(0, 1/2)$ при выполнении условия

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{[KLf]^*(\gamma + it)}{\gamma + it} \right|^2 dt \le M < +\infty, \tag{12}$$

где $0 < \gamma < 1/2$ и константа M не зависит от γ.

Лемма 3.3. *Пусть* $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$ *и выполняется условие* (12). *Тогда* $(C_s f)(x) \in L_2\left(\mathbf{R}_-; x^{-1}\right)$.

Формула обращения преобразования (10) получается с помощью применения равенства Меллина-Парсеваля (7) к интегралу в (9)

$$\int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\tau} \sqrt{y} \operatorname{sh}(\pi y) K_{2iy}(2x) [KLf](x) \frac{dydx}{x} =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\tau} \sqrt{y} \operatorname{sh}(\pi y) [KLf]^*(-it) \Gamma\left(\frac{it}{2} + iy\right) \Gamma\left(\frac{it}{2} - iy\right) dydt,$$

где

$$[KLf]^*(-it) = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{1/N}^{N} [KLf](x) x^{-1-it} dx,$$

$$\frac{1}{4} \int\limits_0^{\tau} \sqrt{y} \operatorname{sh}(\pi y) \Gamma\left(\frac{it}{2} + iy\right) \Gamma\left(\frac{it}{2} - iy\right) dy =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_{1/N}^{N} x^{-1-it} dx \int\limits_0^{\tau} \sqrt{y} \operatorname{sh}(\pi y) K_{2iy}(2x) dy$$

и сходимость понимается в смысле среднего квадратичного при $t \in \mathbf{R}$.

Теорема 3.8. *Пусть $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$ и выполняется условие* (12). *Тогда почти для всех $\tau > 0$ обратный оператор несверточного преобразования $(C_s f)(x)$, заданного формулой (10), имеет вид*

$$f(\tau) = -\frac{4\mathrm{ch}(\pi\tau)}{\sqrt{\tau}\pi^2}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty\int_0^\tau \sqrt{y}\,\mathrm{th}(\pi y) S_c(2x, 2y)(C_s f)(x)\frac{dy dx}{x}. \qquad (13)$$

В разделе 3.3 изучаются свойства интегрального преобразования с ядром (5)

$$(KMf)(x) = 2\sqrt{\pi}e^{x^2/2}\int_0^\infty \frac{\tau}{\mathrm{sh}(\pi\tau)} M_{i\tau}\left(\frac{x^2}{2}\right) f(\tau)d\tau,\ x > 0. \qquad (14)$$

в весовых L_2-пространствах на основании классической теории преобразования Меллина (6) и преобразования Конторовича-Лебедева вида

$$(Klf)(x) = 2\sqrt{\pi}e^{x^2/2}\int_0^\infty \frac{\tau}{\mathrm{ch}(\pi\tau)} K_{i\tau}\left(\frac{x^2}{2}\right) f(\tau)d\tau,\ x > 0. \qquad (15)$$

Аналогами теорем 3.7 и 3.8 для преобразования (14) являются следующие утверждения.

Теорема 3.9. *Пусть $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$. Тогда преобразования (14), (15) существуют, справедливо равенство Парсеваля*

$$\int_0^\infty |(KMf)(x)|^2\, dx = \int_0^\infty |(Klf)(x)|^2\, dx$$

и двойственные формулы со сходимостью в среднем квадратичном

$$(KMf)(x) = \frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{1/N}^N \frac{(Klf)\left(t^{-1}\right)t^{-1}}{1-(xt)^2}\,dt,$$

$$x^{-1}(Klf)\left(x^{-1}\right) = \frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{1/N}^N \frac{(KMf)(t)}{1-(xt)^2}dt.$$

Теорема 3.11. *Пусть $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$ и выполняется условие* (12). *Тогда почти для всех $\tau > 0$ обратный оператор несверточного преобразования*

$(KMf)(x)$, заданного формулой (14), имеет вид

$$f(\tau) = -\frac{\operatorname{sh}(2\pi\tau)}{\tau\pi^{7/2}}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty\int_0^1 \frac{e^{-x^2/2y}}{\operatorname{ch}(\pi y)}\left[I_{iy}\left(\frac{x^2}{2}\right)+I_{-iy}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right](KMf)(x)\frac{dydx}{x}.$$

В разделе 3.4 полученные в разделах 3.2 и 3.3 результаты обобщаются на преобразование по индексу с G-функцией Мейера специального вида в ядре, рассмотренной во второй главе. Рассматриваемое G-преобразование определяется в $L_2(\mathbf{R}_+)$ в терминах преобразования Меллина (6) следующим интегралом Меллина-Барнса

$$(Gf)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \mathcal{K}^*(s)[KLf]^*(s)x^{-s}ds, \tag{16}$$

где

$$\mathcal{K}^*(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(s/2+\beta_j)\prod_{j=1}^n \Gamma(1/2-\alpha_j-s/2)}{\prod_{j=1}^n \Gamma(s/2-\alpha_j)\prod_{j=1}^m \Gamma(1/2+\beta_j-s/2)},$$

$$[KLf]^*(s) = \int_0^\infty \tau\Gamma\left(\frac{s}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-i\tau\right)f(\tau)d\tau$$

преобразование Меллина оператора (8) и $L = (1/2-i\infty, 1/2+i\infty)$. Предположим, что выполняются условия

$$m \geq n, \alpha_j \in \mathbf{R}, \alpha_j < 0, j = 1,\ldots,n, \beta_k \in \mathbf{R}, \beta_k > 0, k = 1,\ldots,m,$$

и никакие из параметров $\beta_1,\ldots,\beta_m$ не совпадают и не отличаются на целое число.

Доказываются следующие основные свойства G-преобразования (16).

Теорема 3.12. *Пусть $h > 0$ и $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$. Тогда преобразование (16) в классе $L_2(\mathbf{R}_+)$ существует и представимо в виде*

$$(Gf)(x) = hx^{1-(\lambda+1)/h}\frac{d}{dx}x^{(\lambda+1)/h}\times$$

$$\times\int_0^\infty H^{m,n-1}_{2n-1,2m+1}\left(xt\left|\begin{matrix}(-\lambda,h),(1/2+\alpha_j,1/2)_n,(-\alpha_j,1/2)_n\\(\beta_j,1/2)_m,(1/2-\beta_j,1/2)_m,(-\lambda-1,h)\end{matrix}\right.\right)\times$$

$$\times t^{-1}[KLf](t^{-1})dt,$$

если $\operatorname{Re}(\lambda) > h/2-1$. *Если* $\operatorname{Re}(\lambda) < h/2-1$, *то*

$$(Gf)(x) = -hx^{1-(\lambda+1)/h}\frac{d}{dx}x^{(\lambda+1)/h}\times$$

$$\times \int\limits_0^\infty H^{m+1,n}_{2n+1,2m+1}\left(xt \,\middle|\, \begin{matrix} (1/2+\alpha_j, 1/2)_n, (-\alpha_j, 1/2)_n, (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), (\beta_j, 1/2)_m, (1/2-\beta_j, 1/2)_m \end{matrix}\right) \times$$

$$\times t^{-1}[KLf](t^{-1})dt,$$

где $H^{m+1,n}_{2n+1,2m+1}(xt)$ – *H-функция. Причём справедливо равенство Парсеваля*

$$\int\limits_0^\infty |(Gf)(x)|^2\,dx = \int\limits_0^\infty |[KLf](x)|^2\,dx.$$

Лемма 3.9. *Если выполняются условия теоремы 3.11, то преобразование* $(Gf)(x)$ *можно записать в виде*

$$(Gf)(x) = 2\int\limits_0^\infty \tau G^{m+2,n}_{2n,2m+2}\left(x^2 \,\middle|\, \begin{matrix} 1/2+(\alpha_n), -(\alpha_n) \\ i\tau, -i\tau, (\beta_m), 1/2-(\beta_m) \end{matrix}\right) f(\tau)d\tau,\ x>0,$$

где $G^{m+2,n}_{2n,2m+2}(x^2)$ – *G-функция Мейера.*

Теорема 3.13. *Пусть* $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$. *Тогда почти для всех* $\tau > 0$ *формула обращения несверточного преобразования* $(Gf)(x)$, *заданного формулой (16), имеет вид*

$$f(\tau) = \frac{2\mathrm{ch}(\pi\tau)}{\tau\pi^2}\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\tau yG^{m+2,n}_{2n,2m+2}\left(x^2 \,\middle|\, \begin{matrix} 1+(\alpha_n), 1/2-(\alpha_n) \\ iy, -iy, 1/2+(\beta_m), 1-(\beta_m) \end{matrix}\right) \times$$

$$\times (Gf)(x)\frac{dydx}{x}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследованы интегральные преобразования по индексу, порожденные композицией преобразований Конторовича-Лебедева (простейшего в классе преобразований по индексу) и Гильберта (относящегося к свёрточным преобразованиям). Полученные результаты распространены на преобразование по индексу с G-функцией Мейера в ядре.

1. Найдены асимптотические представления на бесконечности по индексу функций Макдональда, Уиттекера, Лежандра,

гипергеометрической функции Гаусса, а также более общей G-функции Мейера, являющихся ядрами ряда преобразований по индексу [1, 7, 5].

2. Получены оценки, асимптотические свойства и интегральные представления для функций, связанных с функцией Макдональда [2, 3, 4, 8].

3. Даны условия существования, действия из пространства L_2 в весовые L_2-пространства интегральных преобразований по индексу с функциями, связанными с функцией Макдональда, а также раскрыта их композиционная структура и получены их формулы обращения [2, 3, 4, 8].

4. Даны условия существования, действия из пространства L_2 в весовые L_2-пространства интегрального преобразования по индексу с G-функцией Мейера в ядре, а также раскрыта его композиционная структура и получена его формула обращения [5, 6, 9, 10].

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи

1. Yakubovich S. B., Saigo M., Gusarevich (Yarotzkaya) L. D. Some asymptoyic expansions of special functions by their indices // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – Vol. 25, № 1 – P. 23 – 32.

2. Yakubovich S. B., Gusarevich (Yarotzkaya) L. D. On the non-convolution transformation with the Macdonald type kernel function // Fract. Calc. Appl. Anal. – 1998. – Vol. 1, № 3. – P. 297 – 309.

3. Yakubovich S. B., Yarotzkaya L. D. Integral transformation associated with the Macdonald type kernels // East – West J. Math. – 2000. – Vol. 2, № 1 (June). – P. 73–84.

4. Яроцкая Л. Д. Об интегральном преобразовании с ядром, связанным с функцией Макдональда // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2000. – № 4. – С. 32 – 37.

5. Yarotzkaya L. D. On index transforms with Meijer's G- function kernels // Integral Transforms Special Functions – 2000. – Vol. 10, № 3 – 4. – P. 309–319.

6. Яроцкая Л. Д. Преобразование по индексу с G-функцией Мейера в ядре // Труды Бел. гос. технол. универс. Сер. физ.- мат. наук. – 2000. – Вып. VIII. – С. 7-12.

Тезисы

7. Гусаревич (Яроцкая) Л. Д., Якубович С. Б. О некоторых свойствах ядер индексных преобразований. // Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление: Тезисы докладов междунар. науч. конф., посв. 90 - летию со дня рождения акад. Гахова Ф. Д., Минск, 16-20 февраля 1996 г./ БГУ. – Минск, 1996. – С. 30.

8. Яроцкая Л. Д. Об интегральном преобразовании с ядром, связанным с функцией Макдональда // AMADE-1999: Тезисы докладов междунар. науч. конф., Минск, 14 – 18 сентября 1999 г./ БГУ. – Минск, 1999. – С. 261.

9. Яроцкая Л. Д. Об интегральном преобразовании по индексу с G функцией Мейера в ядре. // VIII Бел. матем. конф.: Тезисы докладов науч. конф., Минск, 19 – 24 июня 2000 г.: В 3 ч. / БГУ. – Минск, 2000. – Ч. 1. – С. 54.

10. Yakubovich S. B., Yarotzkaya L. D. On the class of W – transformations. // Математика в ВУЗе. Современные интеллектуальные технологии: Материалы междун. научно–метод. конф., В. Новгород, 21 – 25 июня 2000 г. / НГУ им Яр. Мудрого. – В. Новгород, 2000. – С. 255 – 256.

РЕЗЮМЕ

Яроцкая Людмила Дмитриевна

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО ИНДЕКСУ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЕВОГО ТИПА И G-ФУНКЦИЕЙ МЕЙЕРА В ЯДРАХ

Ключевые слова: интегральные преобразования по индексу, специальные функции бесселевого типа, функция Макдональда, G-функция Мейера, преобразование Конторовича-Лебедева.

Объектами исследования являются интегральные преобразования по индексу со специальными функциями, связанными с функцией Макдональда, и с более общей G-функцией Мейера в ядрах. Предметом исследования являются структурные и композиционные свойства рассматриваемых преобразований в L_2-пространствах с весом, а также формулы их обращения.

Целью работы является получение условий существования, действия интегральных преобразований по индексу специальных функций, связанных с функцией Макдональда, и G-функцией Мейера в L_2-пространствах с весом, установления их композиционной структуры и формул обращения.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Найдены асимптотические оценки на бесконечности по индексу функций Макдональда, Уиттекера, Лежандра, гипергеометрической функции Гаусса, а также функций бесселевого типа и более общей G-функции Мейера специального вида.

2. Построены интегральные преобразования по индексу с функциями, связанными с функцией Макдональда, и более общей G-функцией Мейера и исследованы их действие и композиционная структура в пространствах L_2 с весом.

3. Доказаны теоремы обращения рассматриваемых преобразований в пространстве L_2.

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут иметь приложения к различным проблемам, сводящимся к интегральным преобразованиям по индексу.

РЭЗЮМЕ

Яроцкая Людміла Дзмітрыеўна

ІНТЭГРАЛЬНЫЯ ПЕРАЎТВАРЭННІ ПА ІНДЭКСУ З ФУНКЦЫЯМІ БЕССЕЛЕВАГА ТЫПУ І G-ФУНКЦЫЯЙ МЕЙЕРА Ў ЯДРАХ

Ключавыя словы: інтэгральныя пераўтварэнні па індэксу, спецыяльныя функцыі бесселевага тыпу, функцыя Макданальда, G-функцыя Мейера, пераўтварэнне Кантаровіча-Лебядзева.

Аб'ектамі даследавання ў дысертацыі з'яўляюцца інтэгральныя пераўтварэнні па індэксу са спецыяльнымі функцыямі бесселевага тыпу, звязанымі з функцыяй Макданальда, і з больш агульнай G-функцыяй Мейера ў ядрах. Прадметам даследавання з'яўляюцца структурныя і кампазіцыйныя ўласцівасці разглядаемых пераўтварэнняў у L_2-прасторах з весам, а таксама формулы іх абарачэння.

Мэта работы - даследаванне ўмоў існавання і дзейнасці інтэгральных пераўтварэнняў па індэксу са спецыяльнымі функцыямі бесселевага тыпу, звязанымі з функцыяй Макданальда, і з больш агульнай G-функцыяй Мейера ў L_2-прасторах з весам, знаходжанне іх кампазіцыйнай структуры і формул абарачэння.

У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

1. Знойдзены асімптатычныя ацэнкі на бясконцасці па індэксу функцый Макданальда, Уіттэкера, Лежандра, гіпергеаметрычнай функцыі Гауса, а таксама функцый бесселевага тыпу і больш агульнай G-функцыі Мейера спецыяльнага віду.

2. Пабудаваны інтэгральныя пераўтварэнні па індэксу з функцыямі, звязанымі з функцыяй Макданальда, і з больш агульнай G-функцыяй Мейера і даследаваны ўмовы іх існавання і дзейнасці ў L_2-прасторах з весам.

3. Даказаны тэарэмы обарачэння разглядаемых пераўтварэнняў у прасторы L_2.

Дысертацыя мае тэарэтычны характар. Яе вынікі і метады можна выкарыстоўваць пры даследванні розных праблем, якія маюць дачыненне да інтэгральных пераўтварэнняў па індэксу.

SUMMARY

Lyudmila D. Yarotskaya

THE INTEGRAL INDEX TRANSFORMS WITH BESSEL'S TYPE FUNCTIONS AND THE MEIJER'S G-FUNCTION IN THE KERNELS

Keywords: the integral index transforms, the Bessel type special functions, the Macdonald function, the Meijer's G-function, the Kontorovich-Lebedev transfom.

The objects of the research in this thesis are the integral index transforms with the special functions associated with the Macdonald function and more general Meijer's G-function in the kernels. The subject of the research are the structural, composition and inversion properties of the considered transforms in the weighted L_2-spaces.

The purpose of this work is to obtain the conditions for the existence and the action of the integral transforms by indices of special functions associated with the Macdonald function and more general Meijer's G-function in the weighted L_2 spaces and to establish their composition structure and inversion formulas.

The following new results have been obtained in the thesis:

1. The asymptotic expansions near infinity by indices of the Macdonald function, the Whittaker function, the Legendre function, the Gauss hypergeometric function, the Bessel type special functions and the Meijer's G-function of special form have been given.

2. The integral index transforms with the special functions associated with the Macdonald function and more general Meijer's G-function in the kernels have been constructed and the conditions for their existence and action in the weighted L_2-spaces have been obtained.

3. The inversion theorem of the considered transforms in the L_2-space have been proved.

The thesis is theoretical. Its methods and results may be applied to various problems that are reduced to integral transforms by their indices.

Подписано в печать 17.02.2003. Формат 60×84 1/16.
Тираж 100 экз. Зак. № 222.

Белорусский государственный университет.
Лицензия ЛВ № 315 от 14.07.98.
220050, Минск, пр. Ф. Скорины, 4.

Отпечатано с готового оригинала-макета заказчика
в Республиканском унитарном предприятии
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Лицензия ЛП № 461 от 14.08.2001.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.