ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ №4 2000
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.444

Л. Д. ЯРОЦКАЯ

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ С ЯДРОМ, СВЯЗАННЫМ С ФУНКЦИЕЙ МАКДОНАЛЬДА

В настоящей работе рассматривается интегральное преобразование вида

$$(C_s f)(x) = 4\int_0^\infty \frac{\tau}{\operatorname{sh}\pi\tau} C_s(2x, 2\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad x > 0, \tag{1}$$

где $C_s(2x, 2\tau)$ — специальная функция, определенная интегралом

$$C_s(x, \tau) = \int_0^\infty \cos(x \operatorname{sh} u)\sin(\tau u)\, du. \tag{2}$$

Получены условия существования и обращения преобразования (1) при помощи преобразования Конторовича — Лебедева [1]

$$[KLf](x) = 4\int_0^\infty \tau K_{2i\tau}(2x) f(\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

где $K_{i\tau}(x)$ — функция Макдональда [2], для которой справедливо следующее представление [2]:

$$K_{i\tau}(x)\ \operatorname{sh}(\pi\tau/2) = \int_0^\infty \sin(x \operatorname{sh} u)\sin(\tau u)\, du. \tag{4}$$

Заметим, что похожие проблемы рассмотрены в [3] в связи с несверточным преобразованием с ядром, заданным синус-преобразованием Фурье по u функции $e^{-x \operatorname{ch} u}$.

Получим некоторые представления функции C_s. Подставив в (2) $t = \operatorname{sh}^2 u$, будем иметь $C_s(x,\tau) = \frac{1}{4i}\int_0^\infty \frac{\cos(x\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\left(\frac{(\sqrt{t+1}+\sqrt{t})^{i\tau}}{\sqrt{t+1}} - \frac{(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})^{i\tau}}{\sqrt{t+1}}\right) dt$. Выражение в скобках в последнем интеграле может быть представлено как обратное преобразование Меллина произведения гамма-функций Эйлера согласно формуле (8.4.2.13) из [4]. Далее, используя формулу дополнения для гамма-функции [5], после несложных преобразований получим представление функции C_s через интеграл Меллина — Бернса

$$C_s(x,\tau) = \frac{\operatorname{sh}(\pi\tau/2)}{4\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s+i\tau/2)\Gamma(s-i\tau/2)\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(s+1/2)\Gamma(1/2-s)}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{-s} ds, \quad 0<\gamma<1/2. \tag{5}$$

Используя формулы (8.4.23.1) и (8.4.2.6) из [4], можем выразить $C_s(x,\tau)$ через преобразование типа Гильберта [6] функции Макдональда:

$$C_s(x,\tau) = \frac{2\operatorname{sh}(\pi\tau/2)}{\pi}\int_0^\infty \frac{tK_{i\tau}(t)}{t^2-x^2}\, dt.$$

Из формул (8.4.51.10) и (7.13.1.1) [4] следует представление (2) в виде комбинации гипергеометрической функции [5] и функций Бесселя [2]

$$C_s(x,\tau) = \frac{1}{\tau}\,{}_1F_2\left(1; 1-i\tau/2, 1+i\tau/2; x^2/4\right) - \frac{\pi}{4\,\mathrm{sh}(\pi\tau/2)}\left[I_{i\tau}(x) + I_{-i\tau}(x)\right]. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$. Тогда преобразования (1), (3) существуют, справедливо равенство Парсеваля*

$$\int_0^\infty |(C_s f)(x)|^2\,dx = \int_0^\infty |[KLf](x)|^2\,dx \tag{7}$$

и двойственные формулы со сходимостью в среднем квадратичном

$$(C_s f)(x) = \frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{1/N}^{N} \frac{[KLf]\left(t^{-1}\right)t^{-1}}{1-(xt)^2}\,dt, \tag{8}$$

$$x^{-1}[KLf]\left(x^{-1}\right) = \frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{1/N}^{N}\frac{(C_s f)(t)}{1-(xt)^2}\,dt. \tag{9}$$

Доказательство. Интегрируя по частям (2), можем записать

$$C_s(2x,2\tau) = \int_0^\infty \frac{\sin(2\tau t)}{\mathrm{ch}\,t}\,d\left(\frac{\sin(2x\,\mathrm{sh}\,t)}{2x}\right) = \frac{1}{2x}\int_0^\infty \sin(2x\ \mathrm{sh}\,t)\frac{\sin(2\tau t)\ \mathrm{sh}\,t - 2\tau\cos(2\tau t)\ \mathrm{ch}\,t}{\mathrm{ch}^2\,t}\,dt.$$

Тогда

$$|C_s(2x,2\tau)| \leqslant \frac{1}{2x}\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,t + 2\tau\ \mathrm{ch}\,t}{\mathrm{ch}^2\,t}\,dt = \frac{1+\pi\tau}{2x}, \tag{10}$$

и, применяя неравенство Гельдера к интегралу (1), получим

$$|(C_s f)(x)| \leqslant \frac{1}{x}\,\|f\|_2\left(\int_0^\infty \frac{\tau^2(1+\pi\tau)^2}{\mathrm{sh}^2\,\pi\tau}\,d\tau\right)^{1/2}, \quad x > 0.$$

Неравенство $|K_{i\tau}(x)| \leqslant e^{-\delta\tau}K_0(x\cos\delta)$, $\delta \in (0,\pi/2)$, из [1] и неравенство Гельдера дают оценку

$$|[KLf](x)| \leqslant 4K_0(x\cos\delta)\,\|f\|_2\left(\int_0^\infty \tau^2 e^{-4\delta\tau}d\tau\right)^{1/2} = \frac{1}{2^{1/2}\delta^{3/2}}K_0(x\cos\delta)\|f\|_2, \quad x > 0. \tag{11}$$

В силу асимптотических свойств функции Макдональда [2]

$$K_0(x) = O(\ln x), \quad x \to +0, \qquad K_{i\tau}(x) = O\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right), \quad x \to +\infty, \tag{12}$$

для любой $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$ имеем

$$\int_0^\infty |[KLf](x)|^2\,dx \leqslant 2^{-1}\delta^{-3}\|f\|_2^2\int_0^\infty K_0^2(x\cos\delta)\,dx < \infty, \quad \delta \in (0,\pi/2). \tag{13}$$

Из теории преобразования Меллина [6]

$$f^*(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{14}$$

известно: если $x^\gamma f(x) \in L_2\left(\mathbf{R}_+; x^{-1}\right)$, тогда $f^*(s) \in L_2(\gamma + i\infty, \gamma - i\infty)$ и наоборот. Более того, справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 x^{2\gamma-1} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |f^*(\gamma + it)|^2 \, dt. \tag{15}$$

Применяя преобразование Меллина (14) к оператору Конторовича — Лебедева (3), когда $\operatorname{Re} s = 1/2$, меняя порядок интегрирования, из формулы (8.4.23.1) [4] получим

$$[KLf]^*(s) = \int_0^\infty \tau \Gamma\left(s/2 + i\tau\right) \Gamma\left(s/2 - i\tau\right) f(\tau) \, d\tau. \tag{16}$$

Чтобы применить преобразование Меллина (14) к оператору (1) и обосновать замену порядка интегрирования в полученном двойном интеграле, оценим ядро (2) и, использовав (6) и представления в виде ряда для гипергеометрической функции и модифицированной функции Бесселя [5, 2],

$$C_s(2x, 2\tau) = \frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau} \sum_{k=1}^\infty \frac{x^{2k}}{(1+\tau^2)\ldots(k^2+\tau^2)} - \frac{\operatorname{ch}\pi\tau}{4\tau}\left(x^{2i\tau}\Gamma(1-2i\tau) + x^{-2i\tau}\Gamma(1+2i\tau)\right) -$$

$$- \frac{\pi}{4\operatorname{sh}\pi\tau} \sum_{k=1}^\infty \frac{x^{2k}\left(x^{2i\tau}\Gamma(k+1-2i\tau) + x^{-2i\tau}\Gamma(k+1+2i\tau)\right)}{\Gamma(k+1-2i\tau)\Gamma(k+1+2i\tau)k!} = \frac{1}{2\tau} + O\left(x^2\right) -$$

$$-\frac{1}{4\tau}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{2i\tau} + \left(\frac{x}{2}\right)^{-2i\tau} + \left(\frac{x}{2}\right)^{2i\tau}\left(\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(1-i\tau)}{\Gamma(1/2+i\tau)} - 1\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-2i\tau}\left(\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma(1/2-i\tau)} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2\tau}\cos(2\tau\ln(x/2)) + \frac{1}{2\tau}\operatorname{Re}_{i\tau}\left[\Gamma_\tau (x/2)^{2i\tau}\right] + O\left(x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\tau}\sin^2(\tau\ln(x/2)) + \frac{1}{2\tau}\operatorname{Re}_{i\tau}\left[\Gamma_\tau (x/2)^{2i\tau}\right] + O\left(x^2\right), \quad x \to +0, \tag{17}$$

где

$$\Gamma_\tau = 1 - \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(1+i\tau)}{\Gamma(1/2-i\tau)}. \tag{18}$$

Следовательно, на основании (5), (16)

$$(C_s f)^*(s) = \operatorname{ctg}(\pi s/2) \int_0^\infty \tau \Gamma\left(s/2 + i\tau\right) \Gamma\left(s/2 - i\tau\right) f(\tau) \, d\tau = \operatorname{ctg}(\pi s/2) \, [KLf]^*(s), \tag{19}$$

где $s = 1/2 + it, \;\; t \in \mathbf{R}$.

Функция $\operatorname{ctg}(\pi s/2)$ является ядром Фурье для обобщенного преобразования [6]. В силу оценки (13), равенства (15) из (19) следует (7). Тогда на основании L_2-теории обобщенных преобразований [6] справедливы двойственные формулы (8) и (9). Теорема 1 доказана.

Формулу обращения преобразования (1) получим на основании теоремы типа Планшереля для преобразования Конторовича — Лебедева (3) [1].

Теорема 2 [1]. *Пусть $f \in L_2\left(\mathbf{R}_+; \tau \operatorname{sh}^{-1}(2\pi\tau)\right)$. Тогда $[KLf](x) \in L_2\left(\mathbf{R}_+; x^{-1}\right)$. Кроме того, справедливо равенство Парсеваля*

$$\int_0^\infty |[KLf](x)|^2 \frac{dx}{x} = 2\pi^2 \int_0^\infty \frac{\tau}{\operatorname{sh}(2\pi\tau)} |f(\tau)|^2 \, d\tau. \tag{20}$$

Почти для всех $\tau \in \mathbf{R}_+$ обратный оператор определен по формуле

$$f(\tau)=\frac{4\,\mathrm{ch}(\pi\tau)}{\tau^{1/2}\pi^2}\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\tau y^{1/2}\,\mathrm{sh}(\pi y)K_{2iy}(2x)[KLf](x)\,\frac{dydx}{x}. \tag{21}$$

Заметим, что если $f\in L_2(\mathbf{R}_+)$, тогда выполняется равенство Парсеваля (20) и $[KLf](x)\in L_2(\mathbf{R}_+;x^{-1})$. Покажем, что для каждого $\tau>0$ функция $h(x,\tau)=\int\limits_0^\tau y^{1/2}\,\mathrm{sh}(\pi y)K_{2iy}(2x)\,dy$ также из пространства $L_2(\mathbf{R}_+;x^{-1})$. Так как $y^{1/2}\,\mathrm{sh}(\pi y)$ монотонно возрастает на отрезке $[0,\tau]$, имеем $|h(x,\tau)|\leqslant\tau^{3/2}\,\mathrm{sh}(\pi\tau)K_0(2x)$. Из (12) следует: $h(x,\tau)\in L_2((a,\infty);x^{-1})$, $a>0$.

Чтобы показать, что $h(x,\tau)\in L_2((0,a);x^{-1})$, обратимся к интегралу (4), который равномерно сходится по $\tau\in[0,T]$, $T>0$. Имеем $h(x,\tau)=\int\limits_0^\tau y^{1/2}\,dy\int\limits_0^\infty\sin(2x\,\mathrm{sh}\,u)\sin(2yu)\,du=\frac{1}{2^{3/2}}\int\limits_0^\infty\sin(2x\,\mathrm{sh}\,u)\varphi(2\tau u)\frac{du}{u^{3/2}}$, где $\varphi(t)=\int\limits_0^t u^{1/2}\sin u\,du$. С помощью подстановки $\mathrm{sh}\,u=v$ получим

$$h(x,\tau)=\frac{1}{2^{3/2}}\left[\int\limits_0^M+\int\limits_M^\infty\right]\frac{\varphi\left(2\tau\ln\left(v+(v^2+1)^{1/2}\right)\right)}{\ln^{3/2}\left(v+(v^2+1)^{1/2}\right)}\,\sin(2xv)\frac{dv}{(v^2+1)^{1/2}}\equiv I_1^M(x,\tau)+I_2^M(x,\tau),$$

где $M>0$. Из второй теоремы о среднем следует: $\varphi(t)=O\left(t^{1/2}\right)$, $t>0$. Тогда

$$\left|I_1^M(x,\tau)\right|\leqslant C_\tau x\int\limits_0^M\frac{vdv}{\ln\left(v+(v^2+1)^{1/2}\right)}=O(x),\quad 0<x<a.$$

Выбирая $M>1/x$, оценим второй интеграл

$$\left|I_2^M(x,\tau)\right|=O\left(\int\limits_{1/x}^\infty\frac{\sin(2xv)}{v\ln v}\,dv\right)=O\left(\int\limits_2^\infty\frac{\sin u}{u(\ln u-\ln(2x))}\,du\right)=O\left(\frac{1}{\ln x}\right),\quad 0<x<a.$$

Выбирая $0<a<1$, получим, что $h(x,\tau)\in L_2((0,a);x^{-1})$. Значит, $h(x,\tau)\in L_2(\mathbf{R}_+;x^{-1})$.

Применяя теорему 72 из [6], запишем правую часть (21) через преобразование Меллина

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\tau y^{1/2}\,\mathrm{sh}(\pi y)K_{2iy}(2x)[KLf](x)\,\frac{dydx}{x}$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_0^\tau y^{1/2}\,\mathrm{sh}(\pi y)[KLf]^*(-it)\Gamma(it/2+iy)\Gamma(it/2-iy)\,dydt, \tag{22}$$

где

$$[KLf]^*(-it)=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{1/N}^N[KLf](x)x^{-1-it}dx,$$

$$\frac14\int\limits_0^\tau y^{1/2}\,\mathrm{sh}(\pi y)\Gamma(it/2+iy)\Gamma(it/2-iy)\,dy=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{1/N}^N x^{-1+it}dx\int\limits_0^\tau y^{1/2}\,\mathrm{sh}(\pi y)K_{2iy}(2x)\,dy$$

со сходимостью в среднем квадратичном при $t\in\mathbf{R}$. Из соотношения (19), когда $s=-it$, получим

$$[KLf]^*(-it)=(C_sf)^*(-it)\,\frac{\Gamma((1+it)/2)\Gamma((1-it)/2)}{\Gamma(-it/2)\Gamma(1+it/2)}.$$

Подставим это значение в правую часть (22)

$$I(\tau)=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(C_sf)^*(-it)\frac{\Gamma((1+it)/2)\Gamma((1-it)/2)}{\Gamma(-it/2)\Gamma(1+it/2)}\int\limits_0^{\tau}y^{1/2}\,\mathrm{sh}(\pi y)\Gamma(it/2+iy)\Gamma(it/2-iy)\,dydt. \quad (23)$$

Лемма 1. *Справедливо следующее соотношение со сходимостью в среднем квадратичном:*

$$\frac{1}{4}\frac{\Gamma((1+it)/2)\Gamma((1-it)/2)}{\Gamma(-it/2)\Gamma(1+it/2)}\int\limits_0^{\tau}y^{1/2}\,\mathrm{sh}(\pi y)\Gamma(it/2+iy)\Gamma(it/2-iy)\,dy$$

$$=-\lim_{N\to\infty}\int\limits_{1/N}^{N}x^{it-1}\int\limits_0^{\tau}y^{1/2}\,\mathrm{th}(\pi y)S_c(2x,2y)\,dydx, \quad (24)$$

где $S_c(x,\tau)$ — специальная функция, определенная формулой

$$S_c(x,\tau)=\int\limits_0^{\infty}\sin(x\,\mathrm{sh}\,u)\cos(\tau u)\,du. \quad (25)$$

Доказательство. Интегрируя по частям (25), аналогично оценке (10) получим $|S_c(2x,2y)|\leqslant\dfrac{2+\pi y}{2x}$, $x>0$. Тогда, рассуждая как при доказательстве свойства $h(x,\tau)\in L_2\left(\mathbf{R}_+;x^{-1}\right)$, можно показать, что функция $h_1(x,\tau)=\int\limits_0^{\tau}y^{1/2}\,\mathrm{th}(\pi y)S_c(2x,2y)\,dy$ принадлежит пространству $L_2\left(\mathbf{R}_+;x^{-1}\right)$ для каждого фиксированного $\tau\in\mathbf{R}_+$.

Заметим, что аналогично формуле (5) получено представление функции S_c через интеграл Меллина — Бернса в виде

$$S_c(x,\tau)=\frac{\mathrm{ch}(\pi\tau/2)}{4\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s+i\tau/2)\Gamma(s-i\tau/2)\Gamma(s+1/2)\Gamma(1/2-s)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{-s}ds,\quad 0<\gamma<1/2.$$

Отсюда и теоремы 71 из [6] следует равенство (24). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если $f\in L_2(\mathbf{R}_+)$, $f(\tau)=O(\tau^{\alpha})$, $\alpha>1/2$, $\tau\to 0$. Тогда $(C_sf)(x)\in L_2\left(\mathbf{R}_+;x^{-1}\right)$.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что достаточно показать сходимость интеграла $\int\limits_0^{\delta}|(C_sf)(x)|^2x^{-1}dx$ для малых фиксированных $\delta>0$. Подставляя (17) в (1), получим

$$(C_sf)(x)=4\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2(\tau\ln(x/2))}{\mathrm{sh}\,\pi\tau}f(\tau)\,d\tau+2\mathrm{Re}_{i\tau}\left[\int\limits_0^{\infty}e^{2i\tau\ln(x/2)}\frac{\Gamma_\tau f(\tau)}{\mathrm{sh}\,\pi\tau}\,d\tau\right]+O(x^2),\quad x\to+0, \quad (26)$$

где Γ_τ определено в (18). Очевидно, что третье слагаемое в (26) принадлежит пространству $L_2((0,\delta);x^{-1})$. Второе слагаемое представляет собой преобразование Фурье в точке $2\ln(x/2)$ от функции $\Gamma_\tau\,\mathrm{sh}^{-1}(\pi\tau)f(\tau)$, принадлежащей $L_2(\mathbf{R}_+)\cap L_1(\mathbf{R}_+)$. Тогда

$$\int\limits_0^{\delta}|F(2\ln(x/2))|^2\frac{dx}{x}=\int\limits_{-\infty}^{2\ln(\delta/2)}|F(u)|^2\,du\leqslant C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_\tau|f(\tau)|^2}{\mathrm{sh}^2\,\pi\tau}\,d\tau<\infty.$$

Рассмотрим интеграл

$$I(x)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2(\tau\ln x)}{\mathrm{sh}\,\pi\tau}f(\tau)\,d\tau=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(\tau\ln(1/x))}{\tau^2}\widehat{f}(\tau)\,d\tau,$$

где $\widehat{f}(\tau) = \dfrac{\tau^2}{\operatorname{sh}\pi\tau} f(\tau)$ и $f(\tau)$ продолжена по нечетности на отрицательную полуось. Из неравенства Гельдера следует, что $\widehat{f}(\tau)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbf{R})$. Тогда, применяя теоремы 13, 14 из [6] о сходимости интегралов типа Фейера, получим $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{I(x)}{\ln(1/x)} = \pi\big(\widehat{f}(0+) + \widehat{f}(0-)\big)$, что эквивалентно следующему предельному соотношению:

$$\lim_{x\to 0} \ln\frac{1}{x} \int\limits_0^{\ln^{-1}(1/x)} \left|\widehat{f}(y) - \frac{I(x)}{\ln(1/x)}\right| dy = \lim_{x\to 0} \int\limits_0^1 \left|\widehat{f}\left(\frac{y}{\ln(1/x)}\right) - \frac{I(x)}{\ln(1/x)}\right| dy =$$

$$= \lim_{x\to 0} \int\limits_0^1 \left|\frac{y}{\pi \ln(1/x)} f\left(\frac{y}{\ln(1/x)}\right) - \frac{I(x)}{\ln(1/x)}\right| dy = 0.$$

Тогда почти для всех $y \in (0,1)$ $\dfrac{I(x)}{\ln(1/x)} = O\left(\ln^{-1}(1/x)\right) f\left(\ln^{-1}(1/x)\right) = O(\ln^{-(\alpha+1)}(1/x))$, $x \to +0$, $\alpha > 1/2$. Имеем $\int\limits_0^{\delta} |I(x)|^2 x^{-1} dx = O\Big(\int\limits_0^{\delta} \ln^{-2\alpha}(1/x)\, d(\ln(1/x))\Big) < \infty$. Лемма 2 доказана.

При условиях леммы 2 из равенства (15) следует, что $(C_s f)^*(-it) \in L_2(\mathbf{R})$. Тогда, используя лемму 1 и (15), сравнивая (23) с формулой обращения (21), получим следующее представление функции f, удовлетворяющей условиям леммы 2:

$$f(\tau) = -\frac{4\operatorname{ch}(\pi\tau)}{\tau^{1/2}\pi^2} \frac{d}{d\tau} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\tau} y^{1/2} \tanh(\pi y) S_c(2x, 2y)(C_s f)(x) \frac{dy dx}{x}. \tag{27}$$

Доказана следующая теорема

Т е о р е м а 3. *Произвольная функция f, удовлетворяющая условиям леммы 2, почти для всех $\tau > 0$ может быть получена при помощи интеграла (27) как обращение несверточного преобразования $(C_s f)(x)$, заданного формулой (1).*

З а м е ч а н и е. Если можно произвести дифференцирование по τ в интеграле (27), то после соответствующих замен, придем к следующей паре интегральных преобразований:

$$g(x) = \int\limits_0^{\infty} \tau C_s(x,\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad f(\tau) = -\frac{4}{\pi^2} \int\limits_0^{\infty} S_s(x,\tau) g(x) \frac{dx}{x}.$$

Summary

Integral transform which is associated with the McDonald type functions as a kernel is considered. L_2-properties, connection with the Hilbert and the Kontorovich-Lebedev transforms are proved. The Parseval equality and inversion theorem are established.

Литература

1. Y a k u b o v i c h S. B. Index Transforms. London, 1996.
2. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., 1974.
3. Y a k u b o v i c h S. B., G u s a r e v i c h L. D. // Fract. Calc. and Appl. Analysis. 1998. Vol. 1, No 3. P. 297 – 309.
4. П р у д н и к о в А. П., Б р ы ч к о в Ю. А., М а р и ч е в О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., 1986.
5. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., 1973.
6. Т и т ч м а р ш Е. Введение в теорию интеграла Фурье. М., 1948.

Белорусский государственный технологический университет

Поступила в редакцию 22.03.99