

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ МАГНИТОЖИДКОСТНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ПОДВЕСА

Analytical methods the interaction of a fixed spherical magnet and nonmagnetic sphere in a magnetic fluid is investigated.

Введение

Способность магнитожидкостных дисперсий намагничиваться увеличивает несущую способность гидростатического подвеса за счет возникновения дополнительной магнитной гидростатической силы, «помогающей» выталкивать нагруженную опору. Однако эта сила находится в сложной зависимости от конструктивных, магнитных характеристик несущих элементов подвеса и намагниченности магнитожидкостных дисперсий. К настоящему времени закономерности этих зависимостей разработаны недостаточно. В такой ситуации для создания методики инженерного расчета технических устройств данного класса целесообразно вначале использовать приближенные методы, позволяющие получать обобщающие соотношения, удобные для дальнейшего анализа.

Одну из базовых моделей представляет система из сферического магнитного диполя и немагнитной сферы [1–4]. В работе [1] приведено решение задачи о взаимодействии магнитной и немагнитной сфер, взвешенных в неограниченном объеме линейно намагничивающейся жидкости. Задача о взаимодействии сферического немагнитного сосуда, заполненного магнитной жидкостью, и сферического магнита, левитирующего внутри сосуда, рассмотрена в работе [2]. Аналитическая модель, объединяющая случаи внешнего и внутреннего взаимодействия сфер, представлена в работах [3, 4].

Целью настоящей работы явилось дальнейшее развитие обобщающей модели [3, 4] взаимодействия сферического магнита и немагнитной сферы.

Согласно [5–7], выражение силы, действующей на немагнитное тело с площадью поверхности S , погруженное в магнитную жидкость, имеет вид

$$F = -\oint_S \left[p + \frac{1}{2} \mu_0 (M_n)^2 \right] ndS, \quad (1)$$

где n – вектор внешней нормали к участку поверхности dS .

Магнитожидкостное давление, входящее в подынтегральное выражение (1), определяется как

$$p = \mu_0 \int_{H_0}^H M(H) dH. \quad (2)$$

Второе слагаемое в выражении (1) – магнитный скачок давления на границе тела, обусловлено скачком максвелловских напряжений при переходе через поверхность тела.

При вычислении (1) и (2) намагниченность магнитных жидкостей удобно описывать дробно-линейной зависимостью

$$M = M_s H / (H + H_h), \quad (3)$$

где M_s – намагниченность насыщения; $H_h = M_s / \chi$ – поле половинного намагничивания, χ – магнитная восприимчивость жидкости, соответствующая начальному участку кривой намагничивания $M = \chi H$ [8].

Рассмотрим взаимодействие сферического магнитного диполя радиусом R_2 и немагнитной сферы радиусом R_1 в магнитной жидкости. В случае внутреннего взаимодействия магнит плавает внутри немагнитного полого сосуда, заполненного намагничивающейся жидкостью (рис. 1), при внешнем взаимодействии оба тела взвешены в неограниченном объеме магнитной жидкости (рис. 2).

Распределение напряженности и квадрата напряженности поля, создаваемого сферическим диполем в намагничивающейся жидкости можно выразить как

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{P} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right);$$

$$H^2 = P^2 \frac{1 + 3 \cos^2 \alpha}{16\pi^2 r^6}; \quad \vec{P} = \frac{4\pi R_2^3 M_f}{3 + 2\chi}, \quad (4)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из центра диполя в точку наблюдения; \vec{P} – эффективный магнитный дипольный момент сферического тела; α – угол между векторами \vec{r} и \vec{P} ; M_f – намагниченность магнитного сферического тела.

Присутствие немагнитной сферы искажает первичное распределение поля, так что результирующее поле будет равно сумме первичного и вторичного (индуцированного неоднородностью среды, связанной с наличием немагнитного тела вблизи источника) полей. Степень искажений определяется магнитной восприимчивостью жидкости (порядок искажений $\sim \chi^2$). При малых значениях этого параметра искажением первичного магнитного по-

менной части продольной силы; $\epsilon = f_{\perp}/f_0$ – относительный фактор поперечной силы;

$$f_0 = \frac{f_{\parallel} + f_{\perp}}{2} = \frac{b^4}{48a^3} \left(-\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{1+a}{1-a} \right| + \frac{3-11a^2+149a^4+3a^6}{3(1-a^2)^4} \right); \quad (7)$$

$$f_{\Delta} = \frac{f_{\parallel} - f_{\perp}}{2} = \frac{b^4}{16a^3} \left(-\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{1+a}{1-a} \right| + \frac{3-11a^2+21a^4+3a^6}{3(1-a^2)^4} \right); \quad (8)$$

$$f_{\perp} = \frac{F_x}{F_*} = \frac{b^4}{24a^3} \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{1+a}{1-a} \right| - \frac{3-11a^2+5a^4+3a^6}{3(1-a^2)^4} \right). \quad (9)$$

Безразмерная сила $f = F/F_*$ зависит от трех параметров: отношений b и a , а также угла β . Зависимость сил от угла β свидетельствует об анизотропном характере взаимодействия. Согласно (6), продольная сила (z -проекция), действующая вдоль направления смещения, состоит из двух составляющих – средней и знакопеременной сил. Средняя сила f_0 не зависит от угловой переменной, знакопеременная сила пропорциональна $\cos 2\beta$ с угловой амплитудой f_{Δ} . Поперечная сила (x -проекция) не имеет изотропной части и пропорциональна $\sin 2\beta$, а ее угловая амплитуда f_{\perp} .

Максимальное значение продольной силы относительно β достигается, когда ее вектор параллелен вектору намагниченности диполя ($\beta = 0; \pm\pi$), тогда $f_{\parallel} = f_0 + f_{\Delta}$, при перпендикулярной ориентации магнитного диполя ($\beta = \pm\pi/2$) относительно продольной силы она минимальна – $f_{\perp} = f_0 - f_{\Delta}$. В этих крайних случаях поперечная сила отсутствует $f_x = 0$. При $\beta = \pm\pi/4; \pm 3\pi/4$ продольная сила $f_{\beta} = f_0$, а $f_x = f_{\perp}$ достигает максимума.

Что касается зависимости $f(a)$, то в ряде случаев возможны упрощения формул (7–9). Так, при малых смещениях центра магнитной сферы относительно центра немагнитной ($a \ll 1$) в случае внутреннего взаимодействия следует:

$$f_0 = \frac{7b^4 a}{15}, \quad f_{\Delta} = \frac{2b^4 a}{15}, \quad f_{\perp} = \frac{2b^4 a}{15}, \quad f_{\parallel} = \frac{16b^4 a}{15}, \quad f_{\perp} = \frac{12b^4 a}{15}. \quad \text{Из этих соотношений видно, что при малых смещениях сила носит квазиупругий}$$

характер, т. е. пропорциональна смещению. При $a \leq 0,1$ данные соотношения дают практически тот же результат, что (7)–(9).

Большие взаимные смещения центров сфер ($a \gg 1$, практически при $a \geq 11$) возможны в случае внешнего взаимодействия тел. Тогда из формул (7)–(9) следует:

$$f_0 = \frac{10b^4}{9a^7}; \quad f_{\Delta} = \frac{6b^4}{9a^7}; \quad f_{\perp} = \frac{-2b^4}{9a^7} = -\frac{1}{5} f_0; \\ f_{\parallel} = \frac{16b^4}{9a^7} = \frac{8}{5} f_0; \quad f_{\perp} = \frac{4b^4}{9a^7} = \frac{2}{5} f_0.$$

В случае взаимодействия диполя с плоской поверхностью немагнитного тела ($a \rightarrow 1$) получим

$$f_{\Delta} = \frac{1}{3} f_0; \quad f_{\perp} = 0; \quad f_{\parallel} = \frac{4}{3} f_0; \quad f_{\perp} = \frac{2}{3} f_0.$$

Рассмотрим влияние параметра a на характер анизотропии силы (рис. 3). Его демонстрирует рис. 3, на котором представлены зависимости $\delta(a)$ и $\epsilon(a)$.

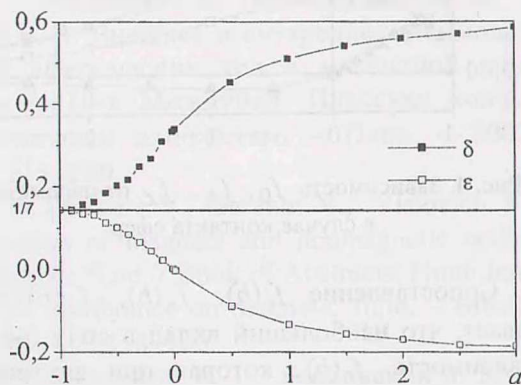


Рис. 3. Зависимости параметров δ и ϵ от параметра a

Как видно из рис. 3 фактор знакопеременной части продольной силы $\delta(a)$ монотонно возрастает, а фактор поперечной силы $\epsilon(a)$ монотонно убывает во всем диапазоне значений a ($a = 0 \dots \infty$). Их граничные значения составляют: при внутреннем взаимодействии ($a = 0 \dots 1$) – $\delta_0 = 1/7$ и $\delta_1 = 1/3$; $\epsilon_0 = 1/7$ и $\epsilon_1 = 0$, при внешнем взаимодействии ($a = 1 \dots \infty$) – $\delta_1 = 1/3$ и $\delta_{\infty} = 3/5$; $\epsilon_1 = 0$ и $\epsilon_{\infty} = -1/5$. Изменение знака $\epsilon(a)$ показывает, что при переходе от внутренней к внешней геометрии направление поперечной силы изменяется.

Характер анизотропии продольной силы описывается зависимостью

$$\delta(a) = \delta_1 + \Delta\delta_i \left(\frac{a^{2,5} - 1}{a^{2,5} + 1} \right), \quad (10)$$

где $\Delta\delta_i$ определяется как $\Delta\delta_{01} = (\delta_1 - \delta_0) = 4/21$ – внутреннее взаимодействие; $\Delta\delta_{1\infty} =$

$= (\delta_\infty - \delta_1) = 4/15$ – внешнее взаимодействие. Соотношение $\Delta\delta_{1\infty}/\Delta\delta_{01} = 1,4$ показывает, что анизотропия при внешнем взаимодействии более выражена, чем при внутреннем.

Как следует из анализа (7)–(9), своего максимального значения сила достигает при соприкосновении поверхностей сфер ($a = 1 + b$, $b < 0$ – для внутренней задачи, $b > 0$ – для внешней). Таким образом, зависимости, полученные для случая контакта сфер, могут использоваться для оценки несущей способности сферического подвеса (рис. 4).

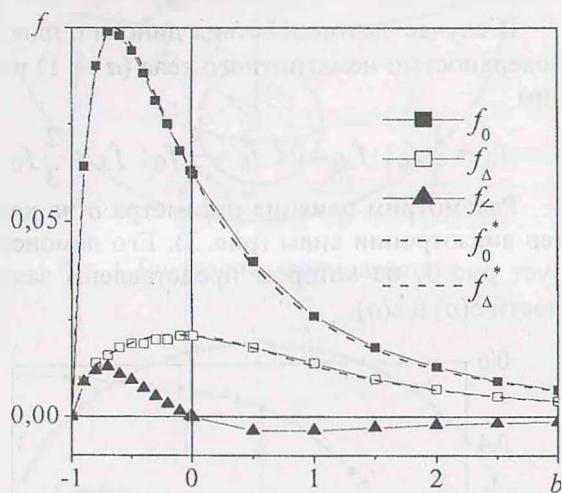


Рис. 4. Зависимость f_0 , f_Δ , f_\angle от параметра b в случае контакта сфер

Сопоставление $f_0(b)$, $f_\Delta(b)$, $f_\angle(b)$ показывает, что наибольший вклад в силу (6) дает зависимость $f_0(b)$, которая при внутреннем взаимодействии имеет максимум. Зависимость $f_\Delta(b)$ качественно повторяет зависимость $f_0(b)$, но своего максимума она достигает при $b = 0$, т. е. для случая взаимодействия магнитной сферы и немагнитной плоскости. Зависимость $f_\angle(b)$ имеет два экстремума – как при внутреннем, так и при внешнем контакте.

С неплохой для практических расчетов точностью зависимость $f_0(b)$ аппроксимируется формулой

$$f_0^{(a)} = \frac{(b+1)}{(b+2)^4} \quad (11)$$

Максимальное расхождение между зависимостями (7) и (11) составляет 6%. Положив в формулу (10) $a = 1 + b$, легко рассчитать $\delta(b)$ и $f_\Delta^{(a)} = f_0^{(a)}\delta(b)$ (рис. 4).

В таблицу сведены экстремальные характеристики, представленных на рис. 4 зависимостей, а также зависимостей $f_{\parallel}(b)$, $f_{\perp}(b)$.

Таблица

Экстремальные характеристики силы

Си-ла f	f_0	f_Δ	f_\angle	f_{\parallel}	f_{\perp}
	0,099	0,02	0,013	0,116	0,083
		1	-0,0037		
b^*	–	0	-0,737	–	–
	0,658		0,701	0,634	0,683
β	–	–	$\pm(\pi/4;$ $3\pi/4)$	0; π	$\pm\pi/2$

В табл. верхние значения f_\angle и соответствующее b^* относятся к внутреннему контакту, нижнее – к внешнему.

Таким образом, изменение оптимального значения параметра b^* в зависимости от ориентации намагниченности диполя лежит в диапазоне $-0,683 < b^* < -0,634$, а экстремальное значение силы соответственно $0,083 < f < 0,116$.

Значение $f_{\parallel} = 0,116$ определяет предел несущей способности сферического подвеса (рис. 1), который возможно достичь при оптимальном соотношении $R_2 / R_1 = 0,634$ и ориентации намагниченности сферического магнита $\beta = 0; \pm\pi$.

Как видно из таблицы, положения экстремума для различных составляющих силы не совпадают, однако достаточно близки, чтобы при доминирующем значении продольной составляющей силы $\vec{f}_z = f_0(1 + \delta \cdot \cos 2\beta)\vec{e}_z$ общую максимальную силу (6) рассчитывать по параметру

$$b_z^* = \left[\frac{(b_{\parallel}^* + b_{\perp}^*)}{2} + \frac{(b_{\parallel}^* - b_{\perp}^*)}{2} \cdot \cos 2\beta \right] = \quad (12)$$

$$= -[0,658 - 0,0245 \cdot \cos 2\beta].$$

Наличие в формуле (6) поперечной силы обуславливает взаимодействие сфер посредством моментов сил. Действующий на немагнитную сферу вращающий момент относительно центра магнита равен

$$\vec{M} = \vec{r}_0 \times \vec{F} = \vec{e}_z \times \vec{e}_x \cdot f_\angle \cdot r_0 \cdot F_* = \quad (13)$$

$$= \vec{e}_y \cdot f_\angle \sin 2\beta \cdot a/b \cdot M_*$$

где $M_* = F_* R_2$.

Поскольку обе сферы образуют замкнутую систему, на магнит будет действовать момент, вращающий его относительно своего центра, равный по величине, но противоположный по направлению моменту, действующему на немагнитную сферу. Если угол β острый, то он стремится сориентировать магнитный момент диполя вдоль вектора смещения, если угол β тупой, то – противоположно. Вращающий мо-

мент, так же как и поперечная сила, достигает максимальных значений относительно β при промежуточных ориентациях намагниченности $\beta = \pm\pi/4; \pm 3\pi/4$. При поперечной и продольной ориентации он равен нулю.

Относительно параметра a поперечная сила, а следовательно, и вращающий момент достигают своего максимума в момент контакта сфер, когда $a = 1 + b$. Положив $\sin 2\beta = 1$, получим зависимость $m(b) = M/M_*$ для контакта сфер (рис. 5).

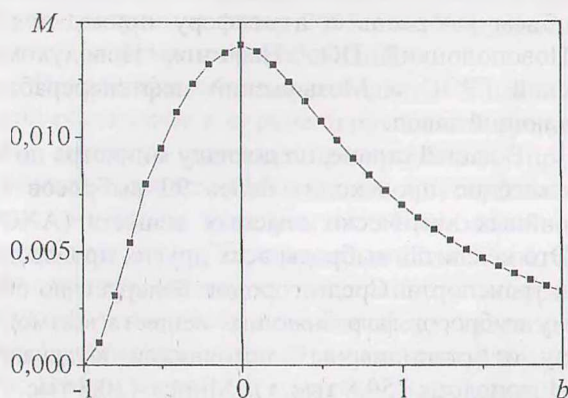


Рис. 5. Зависимость момента m от параметра b для контакта сфер

На рис. 5 для наглядности представлен график модуля момента, из которого видно, что момент максимален, когда параметр $b \rightarrow 0$, что соответствует контакту сферического магнита с плоской немагнитной поверхностью. В этом случае значение $m_{b \rightarrow 0} = 0,014$. Следует отметить, что в области $|b| < 1$ более высокие значения момента достигаются при внешнем контакте.

Найденные экстремальные параметры позволяют оценить предел несущей способности сферического подвеса. В размерной форме выражение максимума продольной силы имеет вид: $F_z^* = 0,116\mu_0\chi M_f^2\pi R_2^2$, при $\beta = 0$ и $b = b_{||}^* = -0,634$. Максимальное значение поперечной силы $F_x^* = 0,013\mu_0\chi M_f^2\pi R_2^2$, при $\beta = \pi/4$ и $b = b_{\perp}^* = -0,737$. Вращающий момент, дейст-

вующий на магнит со стороны немагнитной плоскости

$$M_y^* = m^* F_* R_2 = 1,05 \cdot 10^{-2} \mu_0 \chi M_f^2 \frac{4}{3} \pi R_2^3.$$

Достоверность аналитического решения задачи подтверждена ее численным расчетом с помощью компьютерного математического пакета MathCad 11.

Литература

1. Вислович А. Н., Лобко С. И., Лобко Г. С. Взаимодействие твердых тел, взвешенных в магнитной жидкости в однородном поле // *Магнитная гидродинамика*. — 1986. — № 4. — С. 43–51.
2. Квитанцев А. С., Налетова В. А., Турков В. А. Левитация магнитов и тел из магнитомягких материалов в сосудах, заполненных магнитной жидкостью // *Механика жидкости и газа*. — 2002. — № 3. — С. 51–59.
3. Вислович А. Н., Гаранин В. Н., Бирич В. В. Внешнее и внутреннее взаимодействие сферических тел в магнитной жидкости // 10-я Междунар. Плесская конф. по магнитным жидкостям. — Плес. — 2002. — С. 215–220.
4. Dudarev V., Garanin V., Vislovich A. Interaction of magnets and nonmagnetic bodies in magnetic fluid // *Book of Abstracts. Ninth international conference on magnetic fluid*. — Brasilia. — 2004. — P. 158–160.
5. Баштовой В. Г., Берковский Б. М., Вислович А. Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. — М.: ИВТАН СССР, 1985. — 188 с.
6. Берковский Б. М., Медведев В. Ф., Краков М. С. *Магнитные жидкости*. — М., Химия, 1989.
7. Bashtovoi V. G., Berkovski B. M., Vislovich A. N. Introduction to thermomechanics of magnetic fluids. // Hemisphere Publ. Corp., — 1988. — 216 p.
8. Вислович А. Н. Феноменологическое уравнение статического намагничивания // *Магнитная гидродинамика*. — 1990. — № 2. — С. 54–60.