

Представляют интерес данные по формированию подлесочного яруса на некоторых пробных площадях кафедры лесоводства, заложенных для изучения различных методов и интенсивности рубок ухода. В табл. 2 показаны характеристики подлеска, полученные в 1982 году и в 1998 году, т. е., 16 лет спустя. Как видно, существенных изменений в них нет. Обращает на себя внимание лишь некоторое увеличение доли кустов, образовавшихся отводками. Несмотря на высокую полноту, заметно увеличилось число кустов и их высота в сравнительно молодом древостое на стационаре 8^н. В целом же надо отметить медленность процесса формирования подлеска.

Выводы.

Начало формирования можжевельного подлеска в сосновых мшистых и вересковых насаждениях приходится на вторую половину II класса возраста и связано с прохождением кульминации текущего прироста по высоте, заканчивающейся дифференциацией деревьев и образованием мохового покрова.

Второй этап начинается в IV-V классах возраста и связан с увеличением территории, занимаемой подлеском, за счет интенсивного вегетативного возобновления и роста отдельных экземпляров, а также дальнейшего размножения семенами.

УДК 630*526.5

В. П. Машковский, доцент

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗИ ЗАПАСА И ПРОДУКТИВНОСТИ ДРЕВОСТОЕВ С ВЫСОТОЙ

Mathematical model of relations between a volume and height of the stand and between a total productivity and height of the stand is described in this article.

Изучение лесных сообществ, анализ происходящих взаимодействий между компонентами леса и их влияния на динамику развития древостоев довольно часто выполняют с использованием математического моделирования исследуемых объектов. Для моделирования динамики наиболее важных характеристик древостоев - запаса и общей продуктивности - нередко строятся модели, основанные на учете энергетического баланса территории, занятой древостоем. По этому принципу построена биогеофизическая теория динамики запаса насаждений, предложенная Г. Ф. Хильми [1]. Данная модель пригодна для описания изменения запаса в зависимости от возраста в период полно-

го поглощения физиологической радиации древостоем. Другими словами, речь идет о периоде, когда древостой достиг достаточной степени сомкнутости для того, чтобы практически полностью усваивать все доступные энергетические ресурсы.

Однако развитие деревьев в высокополнотном и в разреженном древостоях происходит по-разному. Чтобы учесть эту особенность, Галицкий В. В. и Комаров А. С. использовали понятие свободно растущего растения, рост которого характеризовали двумя функциями, описывающими динамику биомассы растения и изменение с возрастом площади, необходимой для его свободного роста [2,3].

Детерминированная модель чистого соснового древостоя, предложенная Ермаковым В. Е. и Севастьяновым В. Д., также основана на моделировании развития отдельного дерева [4,5]. При этом рассматривалось распределение ресурсов в элементарных сечениях ствола на поддержание жизнедеятельности клеток растения и на деление клеток в камбиальном слое.

В данной работе предлагается математическая модель, описывающая изменение запасов и общей продуктивности в чистых одно-возрастных древостоях в зависимости от высоты насаждения. При построении модели была сделана попытка учесть влияние полноты древостоев на соотношение приростов по высоте и диаметру. Модель была получена в результате следующих рассуждений. В каждый момент времени в древостое идет процесс продуцирования древесной массы - прирост. Величина этого прироста определяется лесорастительными условиями, возрастом и состоянием древостоя. Вместе с тем, там, где древостой становится чрезмерно загущенным, часть деревьев отмирает. Идет процесс отпада. Предположим, что дереву для нормальной жизнедеятельности необходимо иметь площадь питания, равную $k \cdot V/H$. Значение k - это какой-либо постоянный коэффициент, а отношение объема ствола к высоте V/H - средняя для дерева площадь сечения ствола. Обозначим ее символом g_c .

$$g_c = V/H = \pi \cdot r_c^2, \quad (1)$$

где r_c^2 - радиус, соответствующий площади сечения g_c . Кроме того, предполагается, что форма ствола в процессе развития свободно растущего дерева остается постоянной, то есть отношение

$$\frac{H}{r_c} = \rho \quad (2)$$

является константой. Преобразуем уравнение (2) следующим образом:

$$H = \rho \cdot r_c, \quad (3)$$

и далее:

$$dH = \rho \cdot dr_c. \quad (4)$$

Разделив уравнение (4) на (3), получим:

$$\frac{dH}{H} = \frac{dr_c}{r_c}. \quad (5)$$

Учитывая (1), выражение (5) можно преобразовать следующим образом:

$$2 \cdot \frac{dH}{H} = \frac{dg_c}{g_c}. \quad (6)$$

С учетом (6) изменение объема свободно растущего дерева можно представить выражением

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3 \cdot V}{H} \cdot \frac{dH}{dt}, \quad (7)$$

где V - объем дерева, t - время.

Однако нельзя выразить общий прирост древостоя как

$$N \cdot \frac{dV}{dt}, \quad (8)$$

где N - число деревьев в древостое. Это вызвано тем, что деревья в насаждении растут в окружении других деревьев, а не свободно. В связи с этим имеет место конкуренция за ресурсы окружающей среды, необходимые для развития. Это приводит к тому, что соотношение (2) не остается постоянным, а меняется в зависимости от густоты древостоя. В связи с этим общий прирост древостоя окажется меньшим, чем величина, которую нам дает выражение (5). Предположим, что его величину с достаточной точностью можно описать выражением

$$N \cdot \frac{dV}{dt} \cdot \frac{S - \lambda \cdot N \cdot k \cdot V / H}{S} = N \cdot \frac{dV}{dt} - N \cdot \frac{dV}{dt} \cdot \lambda \cdot \frac{N \cdot k \cdot V / H}{S}, \quad (9)$$

где S - площадь, занимаемая древостоем; λ - постоянный коэффициент. Величина $N \cdot k \cdot V / H = M \cdot k / H$ - это площадь питания всех деревьев в древостое. Отношение этой величины к общей площади древостоя характеризует полноту насаждения. Часть выражения (9), представляющая собой произведение этого отношения на выражение (8), дает нам ту часть прироста, которая теряется из-за недостатка жизненного пространства в древостое:

$$N \cdot \frac{dV}{dt} \cdot \lambda \cdot \frac{N \cdot k \cdot V / H}{S} \quad (10)$$

Кроме того, что прирост в радиальном направлении будет уменьшаться с увеличением полноты древостоя, аналогичным образом будет изменяться и отпад древостоя, величину которого, по-видимому, можно охарактеризовать аналогичным выражением:

$$N \cdot \frac{dV}{dt} \cdot \tau \cdot \frac{N \cdot k \cdot V / H}{S}, \quad (11)$$

где τ - постоянный коэффициент.

С учетом сказанного выше динамику изменения запаса и общей продуктивности в чистых одновозрастных древостоях можно описать следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{dH}{dt} \cdot G_c \cdot \frac{3 - 2 \cdot \lambda \cdot k \cdot G_c}{S}, \quad (12)$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dH}{dt} \cdot G_c \cdot \frac{3 - 2 \cdot (\lambda + \tau) \cdot k \cdot G_c}{S}, \quad (13)$$

где Π - общая продуктивность, M - запас, $G_c = g_c \cdot N$.

Решая уравнения (12) и (13), получим:

$$\Pi = G_m \cdot \left[((3 - 2 \cdot \varphi) \cdot H - \arcsin \left(\sqrt{\frac{H^2}{b^2 + H^2}} \right) \cdot 3 \cdot b \cdot (1 - \varphi) - \frac{\varphi \cdot b^2 \cdot H}{b^2 + H^2} \right], \quad (14)$$

$$M = G_m \cdot \frac{H^3}{b^2 + H^2}, \quad (15)$$

где $G_m = \frac{S}{(\lambda + \tau) \cdot k}$, $b^2 = G_m \cdot \frac{H_0^2}{G_0} - H_0^2$, $\varphi = \frac{\lambda}{(\lambda + \tau)}$.

Уравнения (14) и (15) описывают связь между запасом и высотой древостоя, и между общей продуктивностью и высотой древостоя.

С целью проверки работоспособности модели методом наименьших квадратов были определены коэффициенты уравнений (14) и

(15) по материалам таблиц хода роста березовых древостоев Багинского В. Ф., Моисеенко Ф. П. [6] и Атрощенко О. А. [7]. Расчеты были выполнены в пределах каждого бонитета в отдельности. Для получения аналогичных моделей по типам леса использовались таблицы хода роста Ермакова В. Е. [7]. В результате выполненных расчетов было обнаружено, что коэффициенты G_m и b из уравнений (14) и (15) связаны с бонитетом древостоя. Эта связь носит линейный характер и с достаточной точностью может быть описана уравнением прямой. С учетом этого выражения (14) и (15) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & P = (A_g + B_g \cdot B) \times \\
 & \times \left[(3 - 2 \cdot \varphi) \cdot H - \arcsin \left(\sqrt{\frac{H^2}{(A_b + B_b \cdot B)^2 + H^2}} \right) \times \right. \\
 & \left. \times 3 \cdot (A_b + B_b \cdot B) \cdot (1 - \varphi) - \frac{\varphi \cdot (A_b + B_b \cdot B)^2 \cdot H}{(A_b + B_b \cdot B)^2 + H^2} \right], \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$M = (A_g + B_g \cdot B)^2 \cdot \frac{H^3}{(A_b + B_b \cdot B)^2 + H^2}, \quad (17)$$

где $A_g, B_g, A_b, B_b, A_h, B_h$ - постоянные коэффициенты, B - индекс бонитета, принимающий значения 0, 1..., 5 для бонитетов 1^a, 1..., 5 соответственно.

В результате выполненных расчетов получены следующие значения коэффициентов уравнений (16) и (17).

По данным таблиц хода роста березовых древостоев Багинского В. Ф., Моисеенко Ф. П. для уравнений (16) и (17): $A_0 = 18.324$, $B_0 = -1.207$, $\varphi = 0.268$, $A_b = 14.099$, $B_b = -1.686$, ($R^2 = 0.9967$).

По данным таблиц хода роста березовых древостоев Атрощенко О. А. для уравнений (16) и (17): $A_0 = 15.453$, $B_0 = -1.071$, $\varphi = 0.2589$, $A_b = 10.797$, $B_b = -1.346$, ($R^2 = 0.9939$).

По данным обеих таблиц хода роста березовых древостоев Багинского В. Ф., Моисеенко Ф. П. и Атрощенко О. А. для уравнений (16) и (17): $A_0 = 17.769$, $B_0 = -1.442$, $\varphi = 0.268$, $A_b = 13.422$, $B_b = -1.833$, ($R^2 = 0.9939$).

По данным таблиц хода роста березовых древостоев Ермакова В. Е. для уравнений (14) и (15): березняки кисличные - $G_m = 15.510$, $b = 11.014$, $\varphi = 0.657$; березняки черничные - $G_m = 12.963$, $b = 7.178$,

$\varphi = 0.657$; березняки мшистые - $G_m = 13.192$, $b = 7.139$, $\varphi = 0.657$; ($R^2 = 0.9961$).

По данным трех таблиц хода роста березовых древостоев Ермакова В. Е.; Багинского В. Ф., Моисеенко Ф. П.; Атрощенко О. А. для уравнений (16) и (17): $A_0 = 18.401$, $B_0 = -1.597$, $\varphi = 0.250$, $A_b = 14.783$, $B_b = -2.162$, ($R^2 = 0.9864$).

При выполнении расчетов по последнему варианту в качестве индекса класса бонитета для данных из таблиц Ермакова В.Е. по кислочному типу леса использовался 0 (1^а бонитет), для мшистого и черничного типа леса - 2 (2 бонитет).

Результаты расчетов говорят о хорошей согласованности предлагаемой модели с экспериментальными данными. Даже при включении в расчет данных таблиц хода роста, полученных разными авторами, и более того, построенных по разной методике, получен достаточно высокий коэффициент детерминации $R^2 = 0.9864$. Это говорит о том, что положенные в основу предлагаемой модели рассуждения достаточно полно и правильно описывают процесс развития насаждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хильми Г. Ф. Теоретическая биогеофизика леса М.: Издательство Академии наук СССР, 1957.
2. Галицкий В. В., Комаров А. С. Несвободный рост биомассы организма Пушино, 1974.
3. Галицкий В. В., Комаров А. С. Дискретная модель популяции деревьев // Моделирование почвенных процессов и автоматизация их исследования М.: Наука, 1976.- С. 91-106.
4. Ермаков В. Е., Севастьянов В. Д. Детерминированная модель чистого соснового древостоя // Изв. вузов. Лес. ж.- 1978.- № 6.- С. 11-14.
5. Севастьянов В. Д. Некоторые теоретические аспекты биофизики чистых древостоев // Лесоведение и лесное хозяйство, 1980. Вып. 15.- С. 57-61.
6. Нормативные материалы для таксации леса Белорусской ССР.- М., 1984.
7. Справочник таксатора.- Мн.: Ураджай, 1980.