УДК 625.711.84

А.С. Федоренчик, доцент; С.С. Макаревич, доцент;
Н.П. Вырко, профессор; П.А. Протас, аспирант

РАСЧЕТ ЛЕСНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ПУТЕЙ С УЧЕТОМ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

The settlement model of wood transport way's ground deformation under influence of forest machines is developed. Wood transporting ways are considered as layered media with various physicomechanical characteristics of layers.

Любую лесную дорогу, включая трелевочный волок, можно рассматривать как вязкоупругое слоистое полупространство, нагруженное осесимметричной нагрузкой от колеса лесотранспортной (лесозаготовительной) машины. Наиболее общей теорией, описывающей вязкоупругие свойства материалов, является теория наследственности Больцмана – Вольтерра. Согласно этой теории связь между деформациями и напряжениями записывается уравнением

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{E}\left[\sigma(t)+\int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)\,d\tau\right],$$

где E – модуль упругости; $K(t-\tau)$ – ядро интегрального уравнения (ядро ползучести).

Рассмотрим слоистое полупространство (рис.), нагруженное равномерно распределенной по площади круга вертикальной нагрузкой от колеса лесотранспортной машины, которую представим через интеграл Фурье – Бесселя:

$$q(r,t)=q(t)\xi\int_0^\infty J_1(\xi\alpha)J_0(\rho\alpha)\,d\alpha,$$

где q(t) – интенсивность сплошной нагрузки; $J_1(\xi\alpha)$, $J_0(\rho\alpha)$ – функции Бесселя первого рода первого и нулевого порядка; $\xi = R/h$ – безразмерная величина, соответствующая радиусу площадки загружения; $\rho = r/h$ – безразмерная величина, соответствующая текущему радиусу r; h – толщина слоев над грунтом.

Задачу будем решать в цилиндрической системе координат через функцию напряжений $\varphi=\varphi\ (r, z, t)$. Функцию напряжений примем аналогичной упругому решению [1], но с учетом фактора времени.

Для второго и любого последующего i-го слоя

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \int_0^\infty \left(A(t)+B(t)\left(\alpha(\eta-1)+2\mu_i\right)\right)e^{-\alpha\eta}\,J_0(\rho\alpha)\,d\alpha + \\ &+\sum_{\kappa=2}^{i}\int_0^\infty\Big(C_\kappa(t)\Big((1-2\mu_i)\left(1-e^{-2\lambda_\kappa^*}\right)+\lambda_\kappa^*\left(1+e^{-2\lambda_\kappa^*}\right)\Big)+ \\ &+D_\kappa(t)\Big(2\mu_i\left(1+e^{-2\lambda_\kappa^*}\right)-\lambda_\kappa^*\left(1-e^{-2\lambda_\kappa^*}\right)\Big)\Big)e^{-\alpha\eta}\,J_0(\rho\alpha)\,d\alpha,\end{aligned} \tag{1}$$

где $\eta = z/h$; $\lambda_\kappa^* = \alpha\left(\gamma_{(\kappa-1)}^* - \eta\right)$; $\gamma_i^* = h_i/h$.

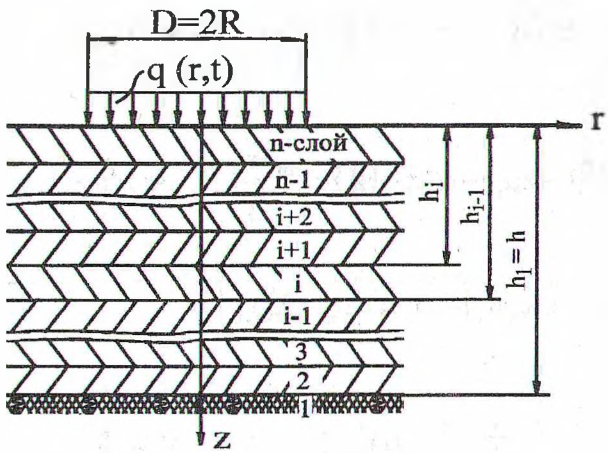

Рис. Расчетная схема слоистого полупространства лесотранспортного пути

Для первого слоя функцию φ получим, если примем i = 1, а $C_К(t) = D_К(t) = 0$.

Напряжения через функцию φ определятся по формулам, аналогичным теории упругости [2]

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right), \quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right), \\ &\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right), \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial z}\left((1-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Для определения перемещений известные формулы [2] дополним членами, учитывающими деформацию материалов во времени:

$$\left.\begin{aligned} &U = -\frac{1+\mu}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z} + \int_0^t \frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z}K(t-\tau)\,d\tau\right), \\ &W = \frac{1+\mu}{E}\left[\left(2(1-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) + \int_0^t \left(2(1-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)K(t-\tau)\,d\tau\right], \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где U – горизонтальное перемещеяние; W – вертикальное перемещение.

Подставляя (1) в (2) и (3), получим напряжения и перемещения для второго и последующего i-го слоя

$$\sigma_{z,i} = \frac{1}{h^3}\int_0^\infty \{A(t)+B(t)[1+\alpha(\eta-1)]\}e^{-\alpha\eta}\,\alpha^3 J_0(\rho\alpha)\,d\alpha +$$

$$+\frac{1}{h^3}\sum_{к=2}^{i}\int_0^\infty \left[C_к(t)\lambda_к^*\omega_к + D_к(t)(\omega_к - \lambda_к\chi_к)\right]e^{-\alpha\eta}\,\alpha^3 J_0(\rho\alpha)\,d\alpha; \qquad (4)$$

$$\sigma_{r,i}=-\frac{1}{h^3}\int\limits_0^\infty\{A(t)-B(t)[1-\alpha(\eta-1)]\}e^{-\alpha\eta}\alpha^3J_0(\rho\alpha)d\alpha+$$

$$+\frac{1}{h^3}\int\limits_0^\infty\{A(t)-B(t)[(1-2\mu_i)-\alpha(\eta-1)]\}e^{-\alpha\eta}\frac{\alpha^2}{\rho}J_1(\rho\alpha)d\alpha-$$

$$-\frac{1}{h^3}\sum_{\kappa=2}^{i}\int\limits_0^\infty\left\{C_\kappa(t)\left[2\chi_\kappa+\lambda^*_\kappa\omega_\kappa\right]-D_\kappa(t)\left[\omega_\kappa+\lambda^*_\kappa\chi_\kappa\right]\right\}\times$$

$$\times e^{-\alpha\eta}\alpha^3J_0(\rho\alpha)d\alpha+\frac{1}{h^3}\sum_{\kappa=2}^{i}\int\limits_0^\infty\left\{C_\kappa(t)\left[2(1-\mu_i)\chi_\kappa+\lambda^*_\kappa\omega_\kappa\right]-\right.$$

$$\left.-D_\kappa(t)\left[(1-2\mu_i)\omega_\kappa+\lambda^*_\kappa\chi_\kappa\right]\right\}e^{-\alpha\eta}\frac{\alpha^2}{\rho}J_1(\rho\alpha)d\alpha;\tag{5}$$

$$\sigma_{\theta,i}=\frac{2\mu_i}{h^3}\int\limits_0^\infty B(t)\alpha^3e^{-\alpha\eta}J_0(\rho\alpha)d\alpha-\frac{1}{h^3}\int\limits_0^\infty\{A(t)-B(t)[(1-2\mu_i)-$$

$$-\alpha(\eta-1)]\}e^{-\alpha\eta}\frac{\alpha^2}{\rho}J_1(\rho\alpha)d\alpha-\frac{2\mu_i}{h^3}\sum_{\kappa=2}^{i}\int\limits_0^\infty[C_\kappa(t)\chi_\kappa-D_\kappa(t)\omega_\kappa]\times$$

$$\times\alpha^3e^{-\alpha\eta}J_0(\rho\alpha)d\alpha-\frac{1}{h^3}\sum_{\kappa=2}^{i}\int\limits_0^\infty\left\{C_\kappa(t)\left[2(1-\mu_i)\chi_\kappa+\lambda^*_\kappa\omega_\kappa\right]-\right.$$

$$\left.-D_\kappa(t)\left[(1-2\mu_i)\omega_\kappa+\lambda^*_\kappa\chi_\kappa\right]\right\}e^{-\alpha\eta}\frac{\alpha^2}{\rho}J_1(\rho\alpha)d\alpha;\tag{6}$$

$$\tau_{rz,i}=\frac{1}{h^3}\int\limits_0^\infty[A(t)+B(t)\alpha(\eta-1)]e^{-\alpha\eta}\alpha^3J_1(\rho\alpha)d\alpha+$$

$$+\frac{1}{h^3}\sum_{\kappa=2}^{i}\int\limits_0^\infty\left\{C_\kappa(t)\left[\omega_\kappa+\lambda^*_\kappa\chi_\kappa\right]-D_\kappa(t)\lambda^*_\kappa\omega_\kappa\right\}e^{-\alpha\eta}\alpha^3J_1(\rho\alpha)d\alpha;\tag{7}$$

$$U_i=-\frac{1+\mu_i}{E_ih^2}\int\limits_0^\infty\{A(t)-B(t)[(1-2\mu_i)-\alpha(\eta-1)]\}e^{-\alpha\eta}\alpha^2\times$$

$$\times J_1(\rho\alpha)d\alpha-\frac{1+\mu_i}{E_ih^2}\sum_{\kappa=2}^{i}\int\limits_0^\infty\left\{C_\kappa(t)\left[2(1-\mu_i)\chi_\kappa+\lambda^*_\kappa\omega_\kappa\right]+\right.$$

$$\left.+D_\kappa(t)\left[(2\mu_i-1)\omega_\kappa-\lambda^*_\kappa\chi_\kappa\right]\right\}e^{-\alpha\eta}\alpha^2J_1(\rho\alpha)d\alpha-$$

$$-\frac{1+\mu_i}{E_i h^2}\int_0^t\int_0^\infty\{A(t)-B(t)[(1-2\mu_i)-\alpha(\eta-1)]\}e^{-\alpha\eta}\,\alpha^2 J_1(\rho\alpha)\times$$

$$\times K_i(t-\tau)d\alpha d\tau-\frac{1+\mu_i}{E_i h^2}\sum_{\kappa=2}^{i}\int_0^t\int_0^\infty\Big\{C_\kappa(t)\big[2(1-\mu_i)\chi_\kappa+\lambda_\kappa^*\omega_\kappa\big]+$$

$$+D_\kappa(t)\big[(2\mu_i-1)\omega_\kappa-\lambda_\kappa^*\chi_\kappa\big]\Big\}e^{-\alpha\eta}\,\alpha^2\,J_1(\rho\alpha)K_i(t-\tau)d\alpha d\tau; \qquad (8)$$

$$W_i=-\frac{1+\mu_i}{E_i h^2}\int_0^\infty\{A(t)+B(t)[2(1-\mu_i)+\alpha(\eta-1)]\}e^{-\alpha\eta}\,\alpha^2\times$$

$$\times J_0(\rho\alpha)d\alpha+\frac{1+\mu_i}{E_i h^2}\sum_{\kappa=2}^{i}\int_0^\infty\Big\{C_\kappa(t)\big[(1-2\mu_i)\omega_\kappa-\lambda_\kappa^*\chi_\kappa\big]-$$

$$-D_\kappa(t)\big[2(1-\mu_i)\chi_\kappa-\lambda_\kappa^*\omega_\kappa\big]\Big\}e^{-\alpha\eta}\,\alpha^2\,J_0(\rho\alpha)d\alpha-$$

$$-\frac{1+\mu_i}{E_i h^2}\int_0^t\int_0^\infty\{A(t)+B(t)[2(1-\mu_i)+\alpha(\eta-1)]\}e^{-\alpha\eta}\,\alpha^2 J_0(\rho\alpha)\times$$

$$\times K_i(t-\tau)d\alpha d\tau+\frac{1+\mu_i}{E_i h^2}\sum_{\kappa=2}^{i}\int_0^t\int_0^\infty\Big\{C_\kappa(t)\big[(1-2\mu_i)\omega_\kappa-\lambda_\kappa^*\chi_\kappa\big]-$$

$$-D_\kappa(t)\big[2(1-\mu_i)\chi_\kappa-\lambda_\kappa^*\omega_\kappa\big]\Big\}e^{-\alpha\eta}\,\alpha^2\,J_0(\rho\alpha)K_i(t-\tau)d\alpha d\tau, \qquad (9)$$

где $\chi_\kappa=1+e^{-2\lambda_\kappa^*}$; $\omega_\kappa=1-e^{-2\lambda_\kappa^*}$.

Если в уравнениях (4) – (9) положить i = 1, а $C_K(t)=D_K(t)=0$, то получим напряжения и перемещения для первого слоя.

Для определения A(t), B(t), $C_K(t)$, и $D_K(t)$ могут быть использованы граничные условия:

а) на поверхности при $\eta=0$

$$\sigma_z=\begin{cases}-q(r,\ t) & \text{при } r\le R,\\ 0 & \text{при } r\rangle R,\end{cases}\qquad \tau_{rz}=0; \qquad (10)$$

б) на границе между любыми двумя i –1 и i-м слоями при $\eta=\gamma_{i-1}$

$$\sigma_{z,i-1}=\sigma_{z,i},\qquad U_{i-1}=U_i,$$

$$\tau_{rz,i-1}=\tau_{rz,i},\qquad W_{i-1}=W_i. \qquad (11)$$

Если записать условия совместности перемещений согласно (11) для i –1 и i-го слоев, то после преобразования по Лапласу получим

$$C_i(p)\left(1+K_i(p)\right)=\frac{1}{4(1-\mu_i)}\{A(p)\left[a_{ii}\left(1+K_{i-1}(p)\right)-\left(1+K_i(p)\right)\right]-$$
$$-B(p)\left[a_{ii}b_{i-1,i-1}\left(1+K_{i-1}(p)\right)-b_{i-1,i}\left(1+K_i(p)\right)\right]+$$
$$+\sum_{к=2}^{i-1}\left[C_к(p)\left(a_{ii}f_{i-1,i-1,к}\left(1+K_{i-1}(p)\right)-f_{i-1,i,к}\left(1+K_i(p)\right)\right)+\right.$$
$$\left.+D_к(p)\left(a_{ii}d_{i-1,i-1,к}\left(1+K_{i-1}(p)\right)-d_{i-1,i,к}\left(1+K_i(p)\right)\right)\right]\};$$
$$D_i(p)\left(1+K_i(p)\right)=\frac{1}{4(1-\mu_i)}\{A(p)\left[a_{ii}\left(1+K_{i-1}(p)\right)-\left(1+K_i(p)\right)\right]+$$
$$+B(p)\left[a_{ii}\ell_{i-1,i-1}\left(1+K_{i-1}(p)\right)-\ell_{i-1,i}\left(1+K_i(p)\right)\right]+$$
$$+\sum_{к=2}^{i-1}\left[-C_к(p)\left(a_{ii}S_{i-1,i-1,к}\left(1+K_{i-1}(p)\right)-S_{i-1,i,к}\left(1+K_i(p)\right)\right)+\right.$$
$$\left.+D_к(p)\left(a_{ii}t_{i-1,i-1,к}\left(1+K_{i-1}(p)\right)-t_{i-1,i,к}\left(1+K_i(p)\right)\right)\right]\},\qquad(12)$$

где $a_{ii}=\frac{E_i}{E_{i-1}}\cdot\frac{1+\mu_{i-1}}{1+\mu_i}$; $b_{i-1,j}=1-2\mu_j-\alpha(\gamma_{i-1}-1)$;

$$\ell_{i-1,j}=2(1-\mu_j)+\alpha(\gamma_{i-1}-1);$$
$$f_{i-1,j,к}=2(1-\mu_j)\cdot\left(1+e^{-2\nu_к}\right)+\nu_к\left(1-e^{-2\nu_к}\right);$$
$$d_{i-1,j,к}=(2\mu_j-1)\cdot\left(1-e^{-2\nu_к}\right)-\nu_к\left(1+e^{-2\nu_к}\right);$$
$$S_{i-1,j,к}=(1-2\mu_j)\cdot\left(1-e^{-2\nu_к}\right)-\nu_к\left(1+e^{-2\nu_к}\right);$$
$$t_{i-1,j,к}=2(1-\mu_j)\cdot\left(1+e^{-2\nu_к}\right)-\nu_к\left(1-e^{-2\nu_к}\right);$$
$$\nu_к=\alpha(\gamma_{к-1}-\gamma_{i-1}).$$

В принятых обозначениях индекс "j" может принимать значения i или i −1, что видно из формул (12). Индекс "к" обозначает номер слагаемого в сумме.

Из условия на поверхности (10) при $\eta = 0$ и $r \le R$ после преобразования по Лапласу будем иметь

$$\left.\begin{aligned}&A(p)+(1-\alpha)B(p)+\sum_{к=2}^{n}\{C_к(p)\cdot\alpha\cdot\gamma_{к-1}\left(1-e^{-2\alpha\cdot\gamma_{к-1}}\right)+\\&+D_к(p)\left[\left(1-e^{-2\alpha\cdot\gamma_{к-1}}\right)-\alpha\gamma_{к-1}\left(1+e^{-2\alpha\cdot\gamma_{к-1}}\right)\right]\}=-q(p)M,\\&A(p)-\alpha B(p)+\sum_{к=2}^{n}\{C_к(p)\left[\left(1-e^{-2\alpha\cdot\gamma_{к-1}}\right)+\alpha\gamma_{к-1}\times\right.\\&\left.\times\left(1+e^{-2\alpha\cdot\gamma_{к-1}}\right)\right]-D_к(p)\alpha\cdot\gamma_{к-1}\left(1-e^{-2\alpha\cdot\gamma_{к-1}}\right)\}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

где $M=\frac{\xi\cdot h^3}{\alpha^3}J_1(\xi\cdot\alpha)$; n – число всех слоев, включая основание.

Записав уравнение (12) последовательно для границы соответствующих слоев, можно определить $C_2(p)$, $D_2(p)$ через $A(p)$ и $B(p)$, затем $C_3(p)$, $D_3(p)$ через $A(p)$ и $B(p)$ и т.д. все $C_K(p)$ и $D_K(p)$ через $A(p)$ и $B(p)$. Затем, подставив эти значения $C_K(p)$ и $D_K(p)$ в (13), получим два уравнения с двумя неизвестными $A(p)$ и $B(p)$.

Определив $A(p)$ и $B(p)$, можно найти остальные неизвестные $C_K(p)$ и $D_K(p)$ как функции параметра преобразования p. После обратного преобразования по Лапласу получим значения коэффициентов $A(t)$, $B(t)$, $C_K(t)$, $D_K(t)$, выраженные через нагрузку, вязкоупругие характеристики слоев и время нагружения.

Пасечный или магистральный волок чаще всего состоит из двух слоев: основания и верхнего слоя в виде отходов лесозаготовок. В этом случае, полагая в уравнениях (12) $i = 2$, будем иметь

$$
\left.
\begin{aligned}
&C_2(p)(1+K_2(p)) = \frac{1}{4(1-\mu_2)}\left\{A(p)\left[\frac{E_2}{E_1}\frac{1+\mu_1}{1+\mu_2}(1+K_1(p)) - (1+K_2(p))\right] - \right.\\
&\left. - B(p)\left[\frac{E_2}{E_1}\frac{(1+\mu_1)(1-2\mu_1)}{1+\mu_2}(1+K_1(p)) - (1-2\mu_2)(1+K_2(p))\right]\right\},\\
&D_2(p)(1+K_2(p)) = \frac{1}{4(1-\mu_2)}\left\{A(p)\left[\frac{E_2}{E_1}\frac{1+\mu_1}{1+\mu_2}(1+K_1(p)) - (1+K_2(p))\right] + \right.\\
&\left. + B(p)\left[\frac{E_2}{E_1}\frac{2(1+\mu_1)(1-\mu_1)}{1+\mu_2}(1+K_1(p)) - 2(1-\mu_2)(1+K_2(p))\right]\right\}.
\end{aligned}
\right. \qquad (14)
$$

Полагая в уравнениях (13) n = 2, получим

$$
\left.
\begin{aligned}
&A(p) + (1-\alpha)B(p) + \lambda_1\alpha C_2(p) + (\lambda_1 - \alpha\lambda_2)D_2(p) = -q(p)M,\\
&A(p) - \alpha B(p) + (\lambda_1 + \alpha\lambda_2)C_2(p) - \lambda_1\alpha D_2(p) = 0,
\end{aligned}
\right| \qquad (15)
$$

где $\lambda_1 = 1 - e^{-2\lambda}$; $\lambda_2 = 1 + e^{-2\lambda}$.

Из уравнений (14) и (15) можно определить $A(p)$ и $B(p)$:

$$
\left.
\begin{aligned}
&A(p) = -Mq(p)\frac{(a_7(1+K_2(p)) + a_8(1+K_1(p)))(1+K_2(p))}{S_1(1+K_2(p))^2 + S_2(1+K_1(p))(1+K_2(p)) + S_3(1+K_1(p))^2},\\
&B(p) = -Mq(p)\frac{(a_5(1+K_2(p)) + a_6(1+K_1(p)))(1+K_2(p))}{S_1(1+K_2(p))^2 + S_2(1+K_1(p))(1+K_2(p)) + S_3(1+K_1(p))^2},
\end{aligned}
\right| \qquad (16)
$$

где $S_1 = a_1a_7 + a_5a_3$; $S_2 = a_1a_8 + a_2a_7 + a_3a_6 + a_4a_5$; $S_3 = a_2a_8 + a_4a_6$;

$$a_1 = 1 + \frac{1}{4} m_2 (\alpha\lambda_2 - \alpha\lambda_1 - \lambda_1); \quad a_2 = -\frac{m_1}{4} (\alpha\lambda_2 - \alpha\lambda_1 - \lambda_1);$$

$$a_3 = 1 - \alpha + \frac{1}{4} (m_4 \alpha\lambda_1 - 2\alpha\lambda_2 - 2\lambda_1); \quad a_4 = \frac{1}{4} (2m_5 (\lambda_1 - \alpha\lambda_2) - m_3 \alpha\lambda_1);$$

$$a_5 = 1 - \frac{m_2}{4} (\alpha\lambda_2 - \alpha\lambda_1 + \lambda_1); \quad a_6 = \frac{m_1}{4} (\alpha\lambda_2 - \alpha\lambda_1 + \lambda_1);$$

$$a_7 = \alpha - \frac{1}{4} (m_4 (\lambda_1 + \alpha\lambda_2) + 2\alpha\lambda_1); \quad a_8 = \frac{1}{4} (m_3 (\lambda_1 + \alpha\lambda_2) + 2m_5 \alpha\lambda_1);$$

$$m_1 = \frac{E_2 (1 + \mu_1)}{E_1 (1 - \mu_2^2)}; \quad m_2 = \frac{1}{1 - \mu_2}; \quad m_3 = \frac{E_2 (1 + \mu_1)(1 - 2\mu_1)}{E_1 (1 - \mu_2^2)};$$

$$m_4 = \frac{1 - 2\mu_2}{1 - \mu_2}; \quad m_5 = \frac{E_2 (1 - \mu_1^2)}{E_1 (1 - \mu_2^2)}.$$

Если задано изменение нагрузки q во времени и известно ядро ползучести K(t) для каждого слоя, то, производя обратное преобразование по Лапласу выражений (16), найдем коэффициенты A и B, которые будут являться функциями времени, а также зависеть от нагрузки и вязкоупругих характеристик материала слоев.

Примем ядро ползучести слоев в виде экспонент

$$K_1(t) = \delta_1 e^{-\beta_1 t}; \qquad K_2(t) = \delta_2 e^{-\beta_2 t},$$

а нагрузку q – постоянной во времени. Тогда изображением по Лапласу ядер ползучести и нагрузки будет

$$K_1(p) = \frac{\delta_1}{p + \beta_1}; \quad K_2(p) = \frac{\delta_2}{p + \beta_2}; \quad q(p) = \frac{q}{p}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16), получим

$$A(p) = -M \frac{q}{p} \frac{F_1(p)}{F(p)}; \qquad B(p) = -M \frac{q}{p} \frac{F_2(p)}{F(p)}. \tag{18}$$

Обратное преобразование по Лапласу уравнений (18) дает

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= -Mq \left(\frac{F_1(0)}{F(0)} + \sum_{i=1}^{4} \frac{F_1(r_i)}{r_i F'(r_i)} e^{r_i t} \right), \\ B(t) &= -Mq \left(\frac{F_2(0)}{F(0)} + \sum_{i=1}^{4} \frac{F_2(r_i)}{r_i F'(r_i)} e^{r_i t} \right), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где $F_1(p) = p^4 (a_7 + a_8) + p^3 (2a_7 \psi_1 + a_8 (\psi_1 + \psi_2)) + p^2 \left(a_7 \left(2\gamma_2 \beta_1 + \psi_1^2 \right) + \right.$

$$+a_8\psi_3\Big)+p\Big(2a_7\beta_1\gamma_2\psi_1+a_8\big(\gamma_1\beta_2\psi_1+\gamma_2\beta_1\psi_2\big)\Big)+a_7\beta_1^2\gamma_2^2+a_8\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2;$$

$$\gamma_1=\delta_1+\beta_1;\ \ \gamma_2=\delta_2+\beta_2;\ \ \psi_1=\gamma_2+\beta_1;\ \ \psi_2=\gamma_1+\beta_2;$$

$$\psi_3=\gamma_1\beta_2+\gamma_1\beta_1+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2+\gamma_2\beta_2+\gamma_2\beta_1.$$

$F_2(p)$ получим, если в выражении $F_1(p)$ заменим a_7 на a_5 и a_8 на a_6.

$$F(p)=ap^4+bp^3+cp^2+fp+\ell;$$
$$a=S_1+S_2+S_3;\ \ b=2S_1\psi_1+S_2\big(\psi_1+\psi_2\big)+2S_3\psi_2;$$
$$c=S_1\left(2\gamma_2\beta_1+\psi_1^2\right)+S_2\psi_3+S_3\left(2\gamma_1\beta_2+\psi_2^2\right);$$
$$f=2S_1\gamma_2\beta_1\psi_1+S_2\big(\gamma_1\beta_2\psi_1+\gamma_2\beta_1\psi_2\big)+2S_3\gamma_1\beta_2\psi_2;$$
$$\ell=S_1\gamma_2^2\beta_1^2+S_2\gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2+S_3\gamma_1^2\beta_2^2;$$

r_i – корни уравнения $F(p)=0$.

В знаменателях уравнений (19) $F'(r_i)$ – значение производной $\dfrac{dF(p)}{dp}$ при $p=r_i$.

Из уравнений (15), произведя обратное преобразование Лапласа, можно определить $C_2(t)$ и $D_2(t)$ через $A(t)$ и $B(t)$.

$$\left.\begin{aligned}
C_2(t)&=\frac{qM\lambda_1\alpha+A(t)\big(\alpha\lambda_1+\lambda_1-\alpha\lambda_2\big)+B(t)\alpha^2\big(\lambda_2-\lambda_1\big)}{\alpha^2\lambda_2^2-\lambda_1^2-\alpha^2\lambda_1^2},\\
D_2(t)&=\frac{qM\big(\lambda_1+\alpha\lambda_2\big)+A(t)\big(\alpha\lambda_2+\lambda_1-\alpha\lambda_1\big)+B(t)\big(\lambda_1+\alpha(1-\alpha)\big(\lambda_2-\lambda_1\big)\big)}{\alpha^2\lambda_2^2-\lambda_1^2-\alpha^2\lambda_1^2}.
\end{aligned}\right\}$$

Зная $A(t)$, $B(t)$, $C_2(t)$ и $D_2(t)$, можно по уравнениям (4) – (9) определить напряжения и перемещения в первом слое (т.е. в грунтовом основании) и во втором слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Туроверов К.К. К вопросу исследования напряженного и деформированного состояния упругого слоистого полупространства // Тр. Ленинградской лесотехн. академии, 1962. – Вып. 94. – С. 87 – 101.

2. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968.