

## КРИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕРЕВЬЕВ ПО ДИАМЕТРУ В БЕРЕЗОВЫХ ДРЕВОСТОЯХ

О.А. Атрошенко

(Белорусский технологический институт им. С.М.Жирова)

Известно три метода аналитического описания эмпирических распределений: 1) применение функций теоретических распределений (нормального, пуассоновского и т.д.); 2) представление эмпирической плотности распределения в виде ряда от производных нормальной плотности (ряды Грамма - Шарлье, Эджворта и т.д.); 3) обобщенные методы описания (кривые Пирсона, распределение Джонсона).

Рассмотрим вопрос аналитического выравнивания эмпирических распределений с точки зрения теоретического обоснования и особенностей кривых распределения.

Опытный материал представлен в виде данных таксации чистых одновозрастных высокополнотных березовых насаждений. Характер распределения деревьев по диаметру (ступеням толщины) в древостое изучался вычислением статистических показателей рядов распределения: среднего значения, основного отклонения, меры косости и меры крутости. В дальнейшем оценку закона распределения производили при помощи коэффициентов асимметрии и эксцесса (табл. 1).

Аналитическое выравнивание эмпирических распределений может быть произведено бесконечным числом способов. Самый простой из них - параболическое выравнивание по способу наименьших квадратов [1].

Теорией математической статистики выдвинут ряд общих условий, предъявляемых к кривым распределения:

1) кривая распределения должна быть по возможности теоретически обоснована, т.е. опираться на те или иные стохастические (вероятностные) схемы, по которым может происходить изучаемое явление;

2) кривая распределения должна иметь возможно более простое уравнение;

3) уравнение кривой должно содержать небольшое число параметров, числовая фиксация которых определяет кривую;

4) кривая распределения должна по возможности сохранить типичные, характерные черты наблюдаемого явления и отбросить второстепенное, несущественное, связанное с недостаточным объемом выборки.

Среди различных кривых распределения особое место занимает нормальное распределение. Кривая распределения нормальной совокупности изображает дифференциальную функцию распределения непрерывной случайной величины в виде плотности распределения вероятности.

Таким образом, кривая нормального распределения имеет два параметра (среднюю и дисперсию), а также произвольную постоянную (площадь распределения), которые должны соответствовать по величине параметрам опытного распределения.

Закон нормального распределения проявляется в эмпирических распределениях только при достаточно многочисленной совокупности, равенстве нулю нечетных центральных моментов, коэффициентов асимметрии и эксцесса. В большинстве кривых распределения при выборочном наблюдении (отдельный древостой) заметна более или менее значительная асимметрия. Условием, опровергающим гипотезу нормального распределения, является превышение показателей асимметрии и эксцесса над их двойной ошибкой [2]. Как показывают данные табл. 1, только в 23 случаях из 81 (30%) опытные ряды распределения деревьев по диаметру подчиняются закону нормального распределения. Нечетные центральные моменты опытных рядов распределения практически во всех случаях отличаются от нуля.

Кривые Грамма-Шарлье типа А представляют собой обобщение нормального распределения в том смысле, что дают по крайней мере теоретическую возможность представить распределение в виде нормального (первый член ряда) и поправка к нему (следующие члены ряда). Точное представление опытных данных с помощью кривых распределения Шарлье типа А можно получить только при известных моментах высших степеней и при условии сходимости ряда. Практические кривые Шарлье типа А дают хорошие результаты, если опытное распределение не сильно асимметрично ( $A_s \leq 0,5$ ).

Из 81 опытного распределения только 28 распределений деревьев по диаметру (34%) характеризуются незначительной мерой косости и крутости, т.е. могут быть успешно выравнены с помощью кривой Шарлье типа А.

Вычисленные статистические показатели рядов распределения деревьев по ступеням толщины показали, что опытные распределения значительно отличаются от распределения Пуассона: среднее значение, дисперсия и третий центральный

Таблица 1. Показатели рядов распределения деревьев по диаметру в березовых древостоях

Возраст	Бонитет	Асимметрия	Эксцесс	Кривая Пирсона	
				Критерий	Тип
1	2	3	4	5	6

Семенного происхождения

45	I	-0,003 ± 0,163	-0,822 ± 0,326	-0,00003	II
48	I	0,963 ± 0,148	0,741 ± 0,300	-0,665	I
60	I	0,269 ± 0,140	3,598 ± 0,280	0,726	IY
60	I	0,605 ± 0,160	-0,099 ± 0,320	-0,234	I
62	I	0,476 ± 0,129	0,240 ± 0,256	-0,901	I
65	I	0,306 ± 0,148	-0,585 ± 0,294	-0,050	I
67	I	0,472 ± 0,139	0,056 ± 0,278	-0,818	I
70	I	0,413 ± 0,120	0,079 ± 0,240	-0,378	I
6	II	0,641 ± 0,111	-1,316 ± 0,222	-0,106	I
6	II	1,665 ± 0,101	3,106 ± 0,202	-15,818	III
11	II	1,070 ± 0,111	0,999 ± 0,222	-0,777	I
12	II	1,304 ± 0,105	3,968 ± 0,210	-1,105	I
13	II	0,888 ± 0,110	0,707 ± 0,202	-0,748	I
20	II	0,264 ± 0,119	-0,405 ± 0,238	-0,053	I
31	III	0,743 ± 0,134	0,184 ± 0,268	-0,370	I
31	III	0,528 ± 0,136	0,470 ± 0,272	0,216	IY
45	III	0,661 ± 0,139	0,155 ± 0,278	-0,366	I
45	III	0,821 ± 0,141	0,772 ± 0,282	-1,2370	I
55	III	0,318 ± 0,134	0,199 ± 0,268	0,877	IY
55	III	0,041 ± 0,140	-0,006 ± 0,280	0,181	IY
70	III	0,274 ± 0,155	-0,272 ± 0,310	-0,075	I
70	III	0,267 ± 0,150	-0,647 ± 0,300	-0,037	I

Порослевого происхождения

10	I	-0,296 ± 0,115	0,529 ± 0,230	0,085	VII
15	I	0,514 ± 0,150	2,747 ± 0,300	-1,969	I
19	I	0,901 ± 0,170	0,443 ± 0,340	-0,480	I
24	I	0,517 ± 0,180	-0,131 ± 0,360	-0,203	I
26	I	0,961 ± 0,120	-0,094 ± 0,240	-0,346	I
32	I	0,044 ± 0,200	-0,436 ± 0,400	-0,002	I
43	I	0,162 ± 0,174	-0,476 ± 0,348	-0,019	I
46	I	0,106 ± 0,180	-0,371 ± 0,360	-0,011	I
50	I	-0,038 ± 0,175	0,802 ± 0,350	0,0007	VII
57	I	0,066 ± 0,171	-0,428 ± 0,342	-0,004	I

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6
63	I	0,014 ± 0,173	-0,197 ± 0,346	-0,0004	II
70	I	0,101 ± 0,172	0,175 ± 0,344	0,024	IY
77	I	0,354 ± 0,173	0,080 ± 0,346	-4,484	I
11	II	0,792 ± 0,118	0,914 ± 0,236	-10,112	III
16	II	1,397 ± 0,120	2,011 ± 0,240	-1,204	I
19	II	1,326 ± 1,61	1,677 ± 0,322	-1,004	I
24	II	1,240 ± 0,139	2,134 ± 0,278	-4,632	I
29	II	0,966 ± 0,150	1,073 ± 0,298	-1,324	I
36	II	-0,069 ± 0,175	-0,125 ± 0,346	-0,135	I
42	II	0,148 ± 0,157	-0,429 ± 0,316	-0,018	I
47	II	0,467 ± 0,155	0,095 ± 0,310	-0,372	I
50	II	0,036 ± 0,148	0,816 ± 0,296	0,0006	VII
50	II	-0,419 ± 0,141	0,006 ± 0,282	-0,268	I
50	II	0,136 ± 0,141	-0,224 ± 0,282	-0,028	I
53	II	0,412 ± 0,188	0,222 ± 0,374	-2,047	I
57	II	0,426 ± 0,159	-0,884 ± 0,316	-0,065	I
60	II	-0,650 ± 0,141	0,282 ± 0,282	-0,500	I
63	II	0,296 ± 0,175	-0,086 ± 0,348	-1,546	I
66	II	0,258 ± 0,187	0,716 ± 0,372	0,205	IY
70	II	-0,135 ± 0,140	0,167 ± 0,280	0,049	IY
74	II	-0,037 ± 0,171	-0,671 ± 0,342	-0,062	I
79	II	0,136 ± 0,173	-0,193 ± 0,346	-0,032	I
10	III	1,329 ± 0,113	2,404 ± 0,226	-3,900	I
11	III	1,778 ± 0,136	4,013 ± 0,272	-2,928	I
15	III	0,218 ± 0,160	-0,596 ± 0,320	-0,027	I
25	III	0,725 ± 0,142	0,280 ± 0,284	-0,442	I
29	III	1,303 ± 0,170	2,580 ± 0,340	25,966	III
30	IV	1,272 ± 0,173	2,125 ± 0,346	-0,442	I
36	III	0,769 ± 0,170	1,151 ± 0,340	0,966	IY
42	III	1,896 ± 0,143	4,651 ± 0,286	-3,464	I
46	III	0,263 ± 0,149	0,782 ± 0,298	0,039	IY
50	III	0,178 ± 0,199	0,151 ± 0,398	0,115	IY
53	III	0,022 ± 0,179	-0,123 ± 0,358	-0,015	I
62	III	0,554 ± 0,200	-0,668 ± 0,400	-0,115	I
68	III	0,213 ± 0,173	-0,649 ± 0,346	-0,024	I
71	III	0,165 ± 0,174	-0,726 ± 0,348	-0,014	I
10	IY	0,432 ± 0,123	-0,09 ± 0,249	-0,847	I
15	IY	1,092 ± 0,123	3,573 ± 0,244	1,346	YI
20	IY	-0,018 ± 0,173	-0,410 ± 0,346	-0,003	I

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6
26	IУ	0,348 ± 0,149	0,037 ± 0,297	-0,326	I
33	IУ	0,389 ± 0,161	0,027 ± 0,320	-0,233	I
38	IУ	1,259 ± 0,155	2,499 ± 0,309	6,840	УI
41	IУ	1,330 ± 0,162	2,845 ± 0,323	4,986	УI
50	IУ	0,684 ± 0,159	-0,592 ± 0,317	-0,161	I
51	IУ	1,076 ± 0,136	1,989 ± 0,272	2,217	УI
54	IУ	1,541 ± 0,165	2,211 ± 0,328	-1,079	I
61	IУ	1,025 ± 0,159	1,138 ± 0,317	-1,139	I
66	IУ	1,160 ± 0,153	2,054 ± 0,306	19,905	III
74	IУ	1,185 ± 0,148	2,048 ± 0,294	-12,238	III

момент не равны между собой. Практически только в 3-5-летнем возрасте в момент смыкания крон деревьев и формирования насаждения отдельные выборочные распределения могут быть описаны с помощью закона Пуассона.

Э. Пирсон одним из первых обратил внимание на асимметрию распределения и предложил вместо формулы нормального распределения применять формулу гипергеометрического распределения. Кривые Пирсона имеют одинаковые с опытным распределением площадь, среднюю, дисперсию, асимметрию и эксцесс. В связи с этим формула Пирсона более гибкая и ближе может подходить к опытным данным, чем функция нормального распределения, содержащая только три параметра. Практически семь типов кривых Пирсона охватывают почти все встречающиеся распределения случайных величин [2].

Много примеров в пользу кривых Э. Пирсона приводят в своих работах Л.К. Лахтин [3] и В.Романовский [1].

Тип кривой Пирсона устанавливается по величине соответствующего критерия с учетом показателей асимметрии и эксцесса распределения (табл. 1). Следует подчеркнуть, что каждый из семи типов кривых Пирсона при непрерывном изменении параметров может перейти в кривую нормального распределения.

Как показывают данные табл. 1, критерий кривых Пирсона принимает в основном значения до -5, что соответствует кривой Пирсона типа I. Более 70% установленных кривых распределения относятся к типу I кривых Пирсона. На остальных 24 пробных площадях распределение деревьев по диаметру описывается кривыми Пирсона других типов, но почти полови-

на из них являются предельными и соответствуют закону нормального распределения.

Таким образом, кривая Пирсона типа I лучше подходит для аналитического выравнивания опытного распределения деревьев по диаметру в древостое. Естественно, что характер распределения случайных величин не остается одним и тем же, а изменяется в зависимости от изменения условий. Поэтому в дальнейшем необходимо изучить динамику изменения основных параметров кривой Пирсона типа I (среднего значения, основного отклонения, меры косости и меры крутости) с возрастом древостоев, установить влияние различных факторов на закономерности распределения этих параметров.

В настоящее время в лесостроительном проектировании широко используется электронно-вычислительная техника. В связи с этим вычисленные показатели асимметрии и эксцесса рядов распределения деревьев по ступеням толщины могут быть использованы при составлении модели рубок ухода в березовых древостоях, т.е. создании математической конструкции, отражающей взаимосвязь между факторами, определяющими эффективность лесохозяйственных мероприятий.

Показатели асимметрии и эксцесса распределений деревьев в древостое по таксационным признакам найдут в дальнейшем практическое применение при математическом моделировании производительности древостоев как в их строении (статистике), так и в их ходе роста (динамике).

#### Л и т е р а т у р а

1. Романовский В. Математическая статистика. М., 1938.
2. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. М., 1971.
3. Лахтин Л.К. Кривые распределения и построение для них интерполяционных формул. М., 1922.