стоящее время, имея в виду, что среднее число посадочных мест в лесокультурах сосны в БССР составляет 6–7 тыс. штук на 1 га, можно рекомендовать в качестве минимума, являющегося аналогом полноты 0,3, 2 тыс.штук экземпляров благонадежного естественного возобновления или сохранившихся культур более или менее равномерно размещенных по площади.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юркевич И.Д., Гельтман В.С. География, типология и районирование лесной растительности. – Минск, 1965. 2. Антанайтис В.В., Загреев В.В. Прирост леса. – М., 1969. 3. Воропанов П.В. Таблицы древесного отпада насаждений основных лесообразующих пород СССР. – М., 1973. 4. Лосицкий К.Б., Чуенков В.С. Эталонные леса. – М., 1973. 5. Кожевников А.М., Феофилов В.А. Закономерности изменчивости текущего прироста в еловых насаждениях разной степени изреживания. – В сб. Текущий прирост древостоев и его применение в лесн. хоз-ве. Рига, 1972. 6. Чепинскис И.И. Исследования по совершенствованию нормативов лесоустроительного проектирования рубок ухода. Автореф.канд.дис. – Каунас, 1975. 7. Юркевич І.Д., Гельтман В.С. Перспектывы галоўнага карыстання у лясах Беларусі. – Весці АН БССР. Сер. біялаг. навук, 1964, № 3. 8. Справочник лесоустроителя Белоруссии/ В.С.Мирошников, Л.В.Дольский, О.А.Трулль и др. – Минск, 1973. 9. Загреев В.В. Влияние полноты на текущий прирост сосновых насаждений.– Лесн.хоз-во, 1962, № 9.

*УДК 630*523.4*

О.А.АТРОЩЕНКО

МАТЕМАТИКО–СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ РОСТА ДРЕВОСТОЕВ

Из многочисленных методов статистического анализа временных рядов рассмотрим ряд критериев проверки гипотез о случайности и независимости данных, автокорреляцию и спектральный анализ, имеющих первостепенное значение для правильного применения корреляционного и регрессионного анализов и построения стохастических (вероятностных) моделей роста древостоев. Временной ряд $Y(t)$ можно представить в виде математической модели как сумму некоторой полностью детерминированной последовательности $[\varphi(t)]$ и случайной последовательности (U_t), подчиняющихся вероятностному закону распределения [1,2]:

$$Y(t) = \varphi(t) + U_t . \tag{1}$$

Детерминированная составляющая или тренд-результат суммарного влияния комплекса факторов, действующих постоянно на изучаемый процесс, например, результат действия лесорастительных условий на рост насаждений, выраженный некоторой лесорастительной нормой по высоте, диаметру, запасу древостоя в течение длительного периода времени. Случайная компонента представляет собой результат действия случайных причин, не учтенных в эксперименте, которая может включать и ошибки наблюдений.

Для примера выполним статистический анализ временного ряда высот чистых сосновых насаждений по данным таксации древостоев на 44 пробных площадях в сосняке мшистом I класса бонитета.

Уровни временного ряда будут приблизительно нормально распределенными, если оценки выборочных показателей асимметрии и эксцесса не превышают их двойных среднеквадратических ошибок [2]: $A \pm m_a = 1{,}090 \pm 0{,}500$; $E \pm m_e = 0{,}896 \pm 0{,}775$.

По исследованиям ряда авторов (К.Е.Никитин (1963), Л.Странд (1964), М.Продан (1968), Н.Н.Свалов (1974)) для аппроксимации детерминированной составляющей роста древостоев по высоте наиболее подходят следующие функции (табл. 1).

Случайная вариация или вариация вокруг тренда составит $V_2 = \sum_{t=1}^{N} (Y_t - \hat{Y})^2$. Общая вариация $V = \sum_{t=1}^{N} (Y_t - \bar{Y})^2$, где $\bar{Y}$ – средний уровень ряда или среднее арифметическое. Наконец, вариация вследствие тенденции V_1 =

Таблица 1.

Параметры и другие показатели уравнений роста сосновых древостоев по высоте

№ уравнения	Уравнения*	Максимальные отклонения		V_1	V_2	Среднеквадратическая ошибка S
		–	+			
1	$y = \dfrac{t^2}{16{,}22+1{,}5958t+0{,}01904t^2}$	–1,3	1,0	615,55	10,73	0,766
2	$y = 37{,}58(1-e^{-0{,}154t})^{1{,}25}$	1,7	0,8	613,21	13,07	1,005
3	$\lg y = -1{,}249+2{,}162\lg t - 0{,}4101\lg^2 t$	1,3	1,1	615,79	10,49	0,749
4	$y = 4{,}307 + 0{,}2116t + 0{,}001213t^2 - 0{,}00000977t^3$	1,7	1,5	610,84	15,44	1,188
5	$y = \left(\dfrac{t}{5{,}2376 + 0{,}2795t}\right)^3$	1,7	1,3	611,19	15,09	1,006

* y – высота; t – возраст.

Таблица 2.

Опытные и сглаженные средние высоты сосновых древостоев

t	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
Y_t	7,6	8,5	11,7	13,1	15,4	16,5	17,7	18,4	18,6	20,0	23,0	23,5	22,9	25,0	24,6	27,6	28,1
$\varphi(t)$	7,2	9,2	11,1	12,8	14,5	16,0	17,4	18,7	19,9	21,1	22,1	23,1	24,1	25,0	25,8	26,6	27,3
U_t	0,4	−0,7	0,6	0,3	0,9	0,5	0,3	−0,3	−1,3	−1,1	0,9	0,4	−1,2	0	−1,2	1,0	0,8

Таблица 3.

Коэффициенты автокорреляции временного ряда по высоте

L, лет	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
R_L	0,981	0,973	0,965	0,959	0,972	0,966	0,950	0,936	0,907	0,863	0,942	0,895

$= V - V_2$. Уравнение параболы III порядка (4) может быть использовано для интерполяции опытных данных, но часто не пригодно для экстраполяции [1]. Функцию (5) удобно применять при построении системы кривых высот. Функция Бакмана (3) хорошо передает рост по высоте, но требует логарифмического преобразования переменных, что не всегда приемлемо. Наиболее подходящими являются функции Корсуня (1) и Дракина-Вуевского (2). Последняя хорошо передает разные периоды роста по высоте и является асимптотической при неограниченном увеличении возраста. Функция Корсуня, хотя и является эмпирической, но более проста в оценке параметров.

После выделения тренда по уравнению (1) вычитают его значения $\varphi(t)$ из соответствующих уровней первоначального ряда динамики (Y_t) и в дальнейшем пользуются отклонением U_t (табл.2). Анализ показывает, что ряд остатков приблизительно согласуется с нормальным распределением: $A \pm m_a = -0{,}521 \pm 0{,}500$; $E \pm m_e = -1{,}227 \pm 0{,}775$. Проверим случайный характер ряда остатков по критерию медианы и критерию максимумов и минимумов [2]. Для критерия медианы ряд ранжируется и определяется медиана Y_m. Уровни первоначального ряда сравниваются с медианой и получают новый ряд из знаков плюс $(Y_t > Y_m)$ и минус $(Y_t < Y_m)$. Ряд состоит из случайных величин, если выполнены неравенства

$$
\begin{aligned}
&K_{max} < [3{,}3\ (\lg N + 1)]\,;\\
&v(n) > \left[\ \frac{1}{2}\ (N + 1 - 1{,}96\ \sqrt{N - 1})\right],
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где K_{max} — длина наибольшей серии (плюсов и минусов); v_n – число серий. Для ряда остатков $K_{max} = 3 < 7{,}4$ и $v(n) = 7 > 5{,}2$.

По второму критерию уровень ряда остатков (U_t) является точкой поворота (при максимуме $U_{t-1} < U_t > U_{t+1}$ или при минимуме наоборот). В случайном ряду математическое ожидание числа точек поворота $\overline{P}$ и дисперсия σ_p^2 выражаются формулами

$$
\begin{aligned}
&\overline{P} = \frac{2}{3}\,(N - 2)\,;\\
&\sigma_p^2 = \frac{16N - 29}{90}\,.
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Критерием случайности с вероятностью 0,95 является неравенство

$$P > \left[\ \frac{2}{3}\ (N - 2) - 1{,}96\ \sqrt{\frac{16N - 29}{90}}\ \right]. \qquad (4)$$

Для ряда остатков Р = 8> 6,8. Таким образом, ряд остатков от тренда представляет собой случайную последовательность U_t.

Во временных рядах часто наблюдается автокорреляция, которая представляет собой корреляционную зависимость между последующими и предыдущими членами временного ряда, т.е. корреляцию между рядами $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ и $Y_{L+1}, Y_{L+2}, \ldots, Y_{L+N}$. Теснота связи между уровнями ряда динамики характеризуется коэффициентом автокорреляции ряда [2]

$$R_L = \frac{C_x(L)}{C_x(0)}. \tag{5}$$

Автоковариация определяется как математическое ожидание произведений отклонений уровеней ряда, смещенных на период L, от среднего уровня:

$$C_x(L) = E\left[(x_i - \overline{x})(x_{i+L} - \overline{x})\right]. \tag{6}$$

Анализ показывает наличие сильной автокорреляции в ряду динамики высот (табл. 3). С увеличением временного сдвига L коэффициент автокорреляции уменьшается, т.е. автокорреляционная функция затухает.

Первый и второй коэффициенты автокорреляции в ряду остатков имеют столь малые значения (R_1 = 0,023 и R_2 = 0,085), что можно отрицать наличие автокорреляции в случайной составляющей. Автокорреляция в остатках может быть обусловлена рядом причин [2] : 1) в модели не учтен некоторый существенный фактор; 2) выбран неправильный тип модели; 3) автокорреляция присуща специфической структуре случайной компоненты.

Многие временные ряды имеют периодическую составляющую, которую можно математически описать с помощью гармоник или тригонометрических функций времени [1,2]. Спектральный анализ временных рядов проводится с целью определения существенных гармонических составляющих. Значение спектра временного ряда оцениваются по формуле:

$$f(\omega_i) = \frac{1}{2\pi}\left\{\lambda_o\gamma_o + 2\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\gamma_k\cos\omega_i K\right\}; \tag{7}$$

$$\omega_j = \frac{\pi j}{m}; \quad j = 0,1,\ldots,m,$$

где ω_j – частоты, для которых определяются значения спектра; λ_k – веса значений автоковариационной функции, зависящие от числа частот m; γ_k – автоковариационная функция:

$$\gamma_k = \frac{1}{N-K}\left\{\sum_{t=1}^{N-K} Y_t Y_{t+k} - \frac{1}{N-K}\sum_{t=k+1}^{N} Y_t \sum_{t=1}^{N-K} Y_t\right\}. \tag{8}$$

Число исследуемых частот равно числу временных сдвигов K для автоковариационной функции и зависит от длины временного ряда. При коротких временных рядах роста насаждений $K \approx N/3$. Оценка Тьюки–Хэннинга имеет вид

$$\lambda_k = \frac{1}{2}\ (1+\cos\frac{\pi K}{m}). \tag{9}$$

Заменяя значения λ_k в формуле (7) выражением (15), получим

$$L_j = \frac{1}{2\pi}\ (\gamma_o + 2\sum_{k=1}^{m=1} \gamma_k \cos\frac{\pi K_j}{m} + \gamma_m \cos \pi j). \tag{10}$$

Сглаженные оценки спектра $U_j = 0{,}25L_{j-1} + 0{,}5\,L_j + 0{,}25L_{j+1}$; $L_{-1}=L_{+1}$; $L_{m-1} = L_{m+1}$. Оценим значения автоковариационной функции для ряда остатков, принимая $K = 6$; $\gamma_o = 0{,}631$; $\gamma_1 = -0{,}013$; $\gamma_2 = -0{,}054$; $\gamma_3 = -0{,}180$; $\gamma_4 = -0{,}119$; $\gamma_5 = 0{,}171$; $\gamma_6 = 0{,}111$. Оценки Тьюки-Хэннинга весов значений автоковариационной функции: $\lambda_o = 1{,}0$; $\lambda_1 = 0{,}993$; $\lambda_2 = 0{,}750$; $\lambda_3 = 0{,}500$; $\lambda_4 = 0{,}250$; $\lambda_5 = 0{,}067$; $\lambda_6 = 0$. Приблизительные оценки спектра: $L_o = 0{,}180$; $L_1 = 0{,}099$; $L_2 = ,0{,}228$; $L_3 = 0{,}062$; $L_4 = 0{,}063$; $L_5 = 0{,}144$; $L_6 = 0{,}070$. Отсюда сглаженные оценки спектра: $U_o = 0{,}140$; $U_1 = 0{,}151$; $U_2 = 0{,}154$; $U_3 = 0{,}104$; $U_4 = 0{,}083$; $U_5 = 0{,}105$.

Таким образом, с точки зрения статистического анализа временных рядов можно создать три вида математических моделей роста древостоев [1]:

1. Модель, где влияние времени установлено на систематическую составляющую или тренд, например современные таблицы хода роста насаждений. При построении подобных регрессионных моделей необходимо выполнить анализ случайной составляющей (остатков), так как регрессия предполагает постоянство их дисперсии и нулевое математическое ожидание.

2. Модель, где влияние времени установлено на случайную компоненту временного ряда. Одной из общих моделей этого типа является стационарный случайный процесс, который можно аппроксимировать моделью авторегрессии достаточно высокого порядка.

3. Модель, где влияние времени сказывается на обе компоненты временного ряда. В этом случае систематическая составляющая аппроксимируется с помощью некоторой функции как тренд во времени, а случайная составляющая образует случайный процесс, для описания структуры которого применяется ковариационная последовательность или спектральная плотность.

Статистический анализ хода роста сосновых древостоев по высоте показал, что временной ряд содержит значительную автокорреляцию, а случайная компонента представляет собой последовательность независимых и случайных наблюдений, для которых правомерно применение корреляционного анализа. Подобную методику статистического анализа можно использовать для анализа рядов роста древостоев по диаметру, запасу и другим таксационным признакам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М., 1976. 2. Вайну Я.Я. –Ф. Корреляция рядов динамики. – М., 1977.

*УДК 630*524.12*

Д.В.МИХНЮК

ИЗМЕНЧИВОСТЬ ВИДОВЫХ ЧИСЕЛ СТВОЛОВ В СПЕЛЫХ СОСНОВЫХ ДРЕВОСТОЯХ

Видовое число является одним из расчетных показателей при определении объемов стволов и запасов древостоев. Поэтому в лесной таксации большое внимание уделяется изучению закономерностей изменения видовых чисел и установлению связей их с другими таксационными показателями деревьев и древостоев. Наибольшее теоретическое значение и практическое применение получили старые и нормальные видовые числа. Однако до настоящего времени в периодической печати появляются публикации, в которых высказываются прямо противоположные мнения о достоинствах и недостатках этих видовых чисел.

По данным В.К.Захарова и А.С.Головачева [1–3], Е.Гроховского [4], изменчивость нормальных видовых чисел стволов в сосновых древостоях составляет 3–5% и почти в два раза меньше, чем старых. По данным других исследователей [5–10], изменчивость нормальных и старых видовых чисел стволов в древостоях примерно одинакова.

Величина изменчивости того или иного таксационного показателя деревьев в древостое определяет количество необходимых наблюдений для установления его с требуемой степенью точности. Определение же видовых чисел связано с рубкой деревьев и является очень трудоемкой работой. Поэтому установление величины изменчивости видовых чисел имеет очень важное не только теоретическое, но и практическое значение для определения объемов стволов и запасов древостоев.

С целью изучения изменчивости видовых чисел использованы материалы четырех пробных площадей со сплошной рубкой 810 деревьев. Пробные площади заложены на лесосеках в чистых спелых сосновых древостоях II,III,Y и Y^{a} классов бонитета в брусничном, багульниковом и осоково-сфагновом типах леса. При разработке лесосек на пробных площадях диаметры стволов