тельных условиях, т. е. для контроля и управления лесами. Совместно с моделями оптимизации модели роста леса смогут дать ключевую информацию для принятия правильных решений ведения лесного хозяйства.

Литература

1. Munro D.D. Forest growth models - a prognosis. - In Col.: Growth models for tree and stand simulation. Royal college of forestzy. Stockholm, 1974, 7-19 p. 2. Vuokila Y. Funktions for variabbe density yield tables of pine based on temporary sample plots. Communicationes instituti Forestalis Fenniae, 1966, t. 60, 86 p. 3. Suzuki T., Umemura T. Forest transition as a stochastic process. - In Col.: Growth models for tree and stand simulation. Stockholm, 1974, p. 358-371. 4. Peden L.M., Williams T.S., Frayer W.E. A Marcov model for stand projection. - Forest science, 1973, vol. 19, N 4, p. 303-314. 5. Свалов Н.Н. Прогнозирование роста древостоев. - В кн.: Лесоведение и лесоводство. М., 1978, т. 2. - 150 с. 6. Налимов В.В. Теория эксперимента. - М., 1971. - 207 с.

УДК 630*56:681.3

Л.Н.Толкачев, канд. с.-х. наук
(Гомельская лесоустроительная экспедиция)

ОСОБЕННОСТИ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ КРИВЫХ ПИРСОНА И КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ И ИХ ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ЭВМ

Большое значение в биологических исследованиях имеет закон нормального распределения. Опубликованные за последнее столетие работы по изучению строения насаждений показывают, что характер распределения числа деревьев по ступеням толщины, высоты, коэффициентов формы и т.д. приближается к нормальному.

Но эта кривая является довольно жесткой, так как определяется лишь двумя параметрами - M и σ и требует равенства нулю асимметрии и эксцесса. По исследованиям же ряда авторов [1 - 6], изучавших строение насаждений, асимметрия и эксцесс всегда отличны от нуля и, следовательно, безоговорочное применение нормального распределения может привести к значительным погрешностям.

В большой степени асимметрия и эксцесс распределений учитываются функцией Шарлье. Но и этот закон теряет силу при асимметрии, превышающей 0,84 [7] . Особенно часто это случается при изучении строения молодняков [4] . В этих случаях необходимо прибегать к системе кривых Пирсона, в которой указанные законы – лишь частные случаи. Пользование этой системой кривых очень удобно, так как ей практически подчиняются все распределения, встречающиеся в действительности. Имеются предложения отдельных авторов об использовании кривой типа I в качестве универсальной математической модели распределения числа стволов по ступеням толщины в насаждении [2] . Наши исследования в молодняках дуба показывают, что это предложение вполне приемлемо [8] .

В общем виде кривые Пирсона выражаются дифференциальным уравнением типа

$$\frac{dy}{y} = \frac{x + b}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}\, dx,$$

где b , a_0 , a_1, a_2 – параметры, определяющие вид функции. Общий интеграл этого уравнения можно представить равенством

$$y = y_0 e^{\int \frac{x + b}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}\, dx}.$$

Система кривых Пирсона заключает всего 13 типов кривых, главными из которых сам Пирсон считал типы I, IУ , IУ. Остальные являются переходными формами, зависящими от особых значений r_3 и r_4, что делает систему очень гибкой [9] .

Возражения, высказанные ранее против системы Пирсона, указывали главным образом на недостаточную ее теоретическую обоснованность и не касались ее практической применимости. В связи с этим уместно отметить, что впервые теоретическое обоснование этих кривых было предпринято советскими математиками А.А.Марковым (1917), А.Н.Колмогоровым (1931), С.Н.Бернштейном (1935) и др.

Однако до последнего времени в лесной таксации кривые системы Пирсона не находили практического применения из-за значительной их трудоемкости, а также в силу других причин [10] . Лишь с появлением современной вычислительной техники решение этих уравнений не представляет трудностей.

Тип кривой в этой системе определяется величиной показателя $\varkappa$, называемого критерием Пирсона и определяемого по уравнению

$$\varkappa = \frac{r_3^2(r_4+3)^2}{4(4r_4-3r_3^2-3r_3^2-6)},$$

где r_3 , r_4 - основные моменты распределения.

При анализе таксационного строения насаждений чаще всего приходится пользоваться уравнением типа 1 [2, 4]. Особое значение это уравнение приобретает при изучении строения молодняков, где из-за большой дифференциации деревьев наблюдается скопление их в низших ступенях [7] . По данным наших исследований, в культурах дуба (80 пробных площадей), в 96% случаев распределения числа стволов по диаметру следует согласно кривой типа I. Величина асимметрии находится в пределах 0,198 - 1,124 [8] .

В общем выражении эта кривая имеет вид

$$y = y_o\left(1+\frac{x}{l_1}\right)^{g_1}\left(1-\frac{x}{l_2}\right)^{g_2},$$

где x - нормированное отклонение изучаемого признака от величины аргумента с максимальной ординатой; y_o, l_1, l_2, g_1, g_2 - - параметры функции.

Характер кривой определяется алгебраической и абсолютной величинами показателей степени, вследствие чего кривая может принимать различную форму - от выпуклой до вогнутой и j -образной. При изучении строения насаждений в подавляющем большинстве случаев показатели степени g_1 и $g_2 > 0$, т.е. кривая имеет выпуклый характер.

Порядок вычисления основных типов кривых Пирсона достаточно подробно рассмотрен П.Эльдертоном [9] , А.К.Митропольским [3] , К.Е.Никитиным [4] и др. Поэтому мы остановимся лишь на некоторых частностях, в той или иной степени позволяющих рационализировать их решение в связи с применением для этих целей ЭВМ.

Характерной особенностью кривых Пирсона является то, что при их решении необходимо вычислить значения гамма-функции или ее логарифмов

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \, dx \, .$$

Гамма-функция относится к классу специальных функций математического анализа, посредством которой понятие факториала (n !) распространяется на любые числа - дробные, отрицательные, комплексные. Эта функция представляет собой несобственный интеграл вида

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \, dx \, ,$$

называемый интегралом Эйлера второго рода.

Для нахождения значений гамма-функции можно применять разные методы (формула Стирлинга и др.). Наиболее часто для этой цели используется одно из основных ее свойств, называемое формулой приведения, которая и позволяет обобщить понятие факториала на любые числа.

Если основное свойство факториала выражается уравнением

$$n!\,(n+1) = (n+1)!\,,$$

то гамма-функция удовлетворяет таким соотношениям:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n! \qquad \text{при } n \geq 1;$$

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \qquad \text{при } 0 \leq n < 1.$$

Эти формулы и приняты нами для вычислений гамма-функции.

Как видно из этих уравнений, для определения значений гамма-функции искомого аргумента необходимо иметь ее числовые значения на определенном отрезке, например, для аргументов от 1,0 до 2,0, которые подставляются в приведенные уравнения для нахождения гамма-функции. Для практического применения составлена специальная таблица этих значений [11].

Однако пользование табличными данными при вычислениях на ЭВМ не совсем удобно, поэтому в поисках более рационального пути решения гамма-функции мы представили ее на отрезке от 1,0 до 2,0 в виде следующего полинома 6-й степени:

$$y = 2{,}4093 - 2{,}3786293x + 1{,}1167655x^2 - 0{,}3014518x^3 + 0{,}292926x^4 - 0{,}1735406x^5 + 0{,}0337396x^6 \quad (1{,}0 \leq n \leq 2{,}0). \qquad (1)$$

Средняя ошибка уравнения - 0,00036.

Путем умножения факториальных сомножителей и вычисленной по уравнению [10] величины находится гамма-функция заданного аргумента.

При вычислении гамма-функции на ЭВМ по приведенной схеме мы часто можем сталкиваться с "переполнением" ячеек памяти. Это происходит вследствие того, что в памяти машина может записать максимальное число, равное 12 При вычислении кривых Пирсона порой нужно вычислять факториалы чисел значительно больших, например, 50!. С учетом этого программа предусматривает вычисление логарифмов сомножителей, суммируя которые мы получаем логарифмы значений гамма-функции [$\lg\Gamma(n)$] , тем более, что в дальнейшем при нахождении численностей распределений мы оперируем именно этими величинами. Составленные таким образом программы по вычислению кривых системы Пирсона компактны и весьма надежны.

Можно отметить, что использование вместо чисел их логарифмов при работе на ЭВМ во многих случаях весьма желательно, а в нашем случае, как указано выше, единственно возможно для успешной работы машины. Приведем второй пример этого явления.

Наряду с составлением программ уравнений для выравнивания опытных данных были составлены программы их оценки. Для этой цели были использованы критерии согласия Колмогорова и Пирсона и правило Романовского [3] . Вычисление последних двух критериев не представляет особых трудностей. Наиболее важным моментом в вычислении критерия Пирсона P $(\varkappa)^2$ является установление числа степеней свободы и достаточных численностей крайних ступеней.

Для оценки нормальных кривых и ряда Шарлье чаще других использовался критерий согласия Колмогорова, который выведен в предположении, что число наблюдений достаточно велико и интегральная функция распределения $F(x)$ непрерывна.

Наибольшее значение разности между ступенчатой функцией накопленных частностей опытного ряда $F_n(x)$ и интегральной функцией распределения $F(x)$ представляет собой случайную величину

$$D_n = \max_{-\infty < x < +\infty} / F_n(x) - F(x) /$$

$$\lim P\left\{ D_n \sqrt{n} \leq \lambda \right\} = k(\lambda)$$

или равенство $1 - k(\lambda) = P(\lambda) = P\left\{ D_n \sqrt{n} > \lambda \right\}$, для которого составлена таблица значений.

В литературе примерно до середины 50-х гг. $F(x)$ представлялась обычно как ступенчатая функция выравненных частностей, что больше подходит к сравнению двух опытных рядов между собой, чем сравнение их с теоретическим [12]. В последнее время $f(x)$ представляется непрерывной интегральной функцией, т.е. такой, какой была использована самим А.Н.Колмогоровым [3].

Для нормального распределения эта функция имеет следующий вид:

$$F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t}{2}} dt;$$

для обобщенного нормального уравнения:

$$F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t}{2}} dt + \frac{A}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} x$$

$$x e^{-\frac{x}{2}} (1-x^2) + \frac{E}{24} \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{x^2}{2}} (3x - x^3).$$

Приняв во внимание, что $F_1(0) = \frac{1}{2}$, можно записать

$$F_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \int_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Разлагая интеграл в асимптотический знакочередующий ряд, получим

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2!\,2^2 \cdot 5} - \frac{x^7}{3!\,2^3 \cdot 7} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^9}{4!\,2^4 \cdot 9} - \ldots \right).$$

Как видно, общий член бесконечного ряда выражается формулой

$$(-1)^{(n+1)} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(n-1)! \cdot 2^{n-1}(2n-1)},$$

которая и принята для составления программы вычисления $F_1(x)$.

Задаваясь определенной точностью вычисления интеграла, можно определить $F_1(x)$ любого аргумента. При ограничении точностью 0,0001 уже при $x > 2{,}8$ происходит "переполнение". Поэтому и в данном случае следует произвести замену чисел их логарифмами.

Таким образом, приведенные примеры практической реализации гамма-функции и факториалов на ЭВМ могут оказаться полезными при изучении строения насаждений с помощью уравнений системы Пирсона.

Литература

1. Бурневский Ю.И. Закономерности строения и роста осиновых смешанных молодняков и особенности их таксации: Автореф. дис. ... канд. с.-х. наук. - Л., 1968. - 26 с. 2. Дыренков С.А. Закономерности дифференциации деревьев по толщине и их математическая интерпретация. - В кн.: Сб. трудов по материалам совещания: ЭВМ и математ. методы в лесн. хоз-ве. Л., 1969, с. 78 - 84. 3. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. - М., 1971. - 374с. 4. Никитин К.Е. Применение ЭВМ в лесной таксации. - М., 1972. - 131 с. 5. Патацкас А.И. Применение функции Шарлье для исследования закономерностей строения насаждений. - Лесн. журнал, 1964, №6, с. 7 - 10. 6. Патацкас А.И. Некоторые распределения и корреляции в строении насаждений. - Лесн. журнал, 1967, №4, с.11 - 14. 7. Моисеев В.С. Таксация молодняков. - Л., 1971. - 343 с. 8. Толка-

чев Л.Н. Исследование таксационного строения, роста и товарности культур дуба белорусского Полесья: Автореф.дис.. . . канд. с.-х. наук. - Минск, 1974. - 24 с. 9. Эльдертон В.П. Кривые распределения численностей и корреляции. - М., 1924. - 164 с. 10. Боярский А.Я. Теория математической статистики. - М., 1931. - 412 с. 11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). - М., 1973. - 831 с. 12. Романовский В. Математическая статистика. - М., 1938. - 621 с.