УДК 631.3

В.П. Машковский, доцент

ДИФФЕРЕНЦИАЦИЯ ДЕРЕВЬЕВ В ЧИСТЫХ ДРЕВОСТОЯХ ПО РАЗМЕРАМ В ПРОЦЕССЕ РОСТА

Simulation model, enabling to determine a safety and size of the trees in the pure stand depending on rank and height of the biggest tree is described in this paper.

В настоящее время с целью интенсификации лесохозяйственного производства в Беларуси разрабатываются и внедряются новые технологии лесоинвентаризации, что позволяет повысить уровень лесоустроительного проектирования. Обновление технологий происходит параллельно с процессом компьютеризации лесного хозяйства и с привлечением мощного потенциала современных информационных систем. Новые технологии предполагают широкое использование многовариантных расчетов при лесоустроительном проектировании на основе актуализированных данных о лесном фонде. Выполнение таких расчетов, так же как и проведение актуализации информации повыдельного банка данных по лесному фонду, возможно при наличии системы математических моделей хода роста древостоев. К настоящему моменту известно множество уравнений, описывающих изменение с возрастом различных таксационных характеристик древостоев. Процесс разработки моделей такого рода продолжается и сейчас. В большинстве случаев они ориентируются на ход роста нормальных древостоев. Вместе с тем имеются разработки и для насаждений с полнотой, отличной от 1,0. Такие модели учитывают влияние густоты на ход роста древостоев. В связи с тем, что в процессе развития полнота насаждений меняется, уравнения, откликающиеся на данный показатель, дадут результаты более высокой точности.

В данной работе предлагается имитационная модель развития древостоя, учитывающая конкурентные взаимоотношения между деревьями в древостое и вызванную этим процессом дифференциацию деревьев по размерам. Модель была получена в результате следующих рассуждений. В каждый момент времени в древостое идет процесс продуцирования древесной массы – прирост. Величина этого прироста определяется лесорастительными условиями, возрастом и состоянием древостоя. Вместе с тем там, где древостой становится чрезмерно загущенным, часть деревьев отмирает. Идет процесс отпада. Предположим, что дереву для нормального свободного роста необходимо иметь площадь питания, равную

$$s = c \cdot v / h, \qquad (1)$$

где значение c – это какой-либо постоянный коэффициент; v – объем ствола свободно растущего дерева; h – высота свободно растущего дерева, а отношение объема ствола к высоте v/h – средняя для дерева площадь сечения ствола. Обозначим ее символом g, а сумму g для всех деревьев в древостое – символом G:

$$g = v / h = \pi \cdot r^2, \qquad (2)$$

где r^2 – радиус, соответствующий площади сечения g.

Кроме того, предполагается, что форма ствола в процессе развития свободно растущего дерева остается постоянной, то есть отношение

$$\frac{h}{r} = \varphi \qquad (3)$$

является константой. Преобразуем уравнение (3):

$$h = \varphi \cdot r, \qquad (4)$$

и далее, продифференцировав выражение (4), получим

$$dh = \varphi \cdot dr \qquad (5)$$

Теперь разделим уравнение (5) на (4):

$$\frac{dh}{h}=\frac{dr}{r}. \qquad (6)$$

Учитывая (2), выражение (6) можно преобразовать:

$$2\cdot\frac{dh}{h}=\frac{dg}{g}. \qquad (7)$$

Используя (7), можно выразить прирост g для свободно растущего дерева следующим образом:

$$\frac{dg}{dt}=\frac{2\cdot g}{h}\cdot\frac{dh}{dt}, \qquad (8)$$

где t – время.

Однако нельзя выразить изменение G как произведение числа стволов на прирост g свободно растущего дерева:

$$N\cdot\frac{dg}{dt}, \qquad (9)$$

где N – число деревьев в древостое.

Это вызвано тем, что деревья в насаждении растут в окружении других деревьев, а не свободно. В связи с этим имеет место конкуренция за ресурсы окружающей среды, необходимые для развития. Это приводит к тому, что соотношение (3) не остается постоянным, а меняется в зависимости от густоты древостоя. Поэтому общий прирост сечений g всех деревьев в древостое окажется меньшим, чем величина, которую нам дает выражение (9). Кроме того, в результате конкуренции за ресурсы среды часть деревьев погибает. В древостое наблюдается отпад. Причем этот процесс тем интенсивнее, чем выше густота древостоя. С учетом конкурентных взаимоотношений между растениями изменение площади G древостоя можно описать следующим выражением:

$$N\cdot\frac{dg}{dt}-N\cdot\frac{dg}{dt}\cdot\frac{N\cdot s}{S}, \qquad (10)$$

где S – площадь, занимаемая древостоем. Величина $N\cdot s$ – это площадь питания всех деревьев в древостое. Отношение этой величины к общей площади древостоя характеризует полноту насаждения. Часть выражения (10), представляющая собой произведение этого отношения на выражение (9), дает нам потери за счет уменьшения прироста, вызванного недостатком жизненного пространства в древостое и за счет отпада деревьев:

$$N\cdot\frac{dg}{dt}\cdot\frac{N\cdot s}{S}.$$

Используя (1), (2) и (10), можно записать дифференциальное уравнение, характеризующее динамику G:

$$\frac{dG}{dt}=N\cdot\frac{dg}{dt}\cdot\left(1-\frac{N\cdot k\cdot g}{S}\right). \qquad (11)$$

Учитывая (8), выражение (11) можно преобразовать:

$$\frac{dG}{dt}=N\cdot\frac{2\cdot g}{h}\cdot\frac{dh}{dt}\cdot\left(1-\frac{N\cdot k\cdot g}{S}\right)=\frac{2\cdot G}{h}\cdot\frac{dh}{dt}\cdot\left(1-\frac{G}{G_m}\right), \qquad (12)$$

где $G_m=S/k$. В связи с тем, что при получении уравнения (12) использовалось соотношение (8), характерное для свободно растущего дерева, в качестве величины h целесообразно взять высоту наиболее крупных деревьев в древостое, так как эти деревья в наименьшей степени будут подвержены воздействию соседних деревьев.

Уравнение (12) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{dG}{dh}=\frac{2\cdot G}{h}\cdot\left(1-\frac{G}{G_m}\right). \tag{13}$$

Решив уравнение (13) относительно h, получим

$$G=G_m\cdot\frac{\dfrac{N_0\cdot h^2}{G_m\cdot\eta}}{\dfrac{N_0\cdot h^2}{G_m\cdot\eta}+1}, \tag{14}$$

где N_0 – число стволов в древостое в начальный момент времени; h_0 – высота дерева в начальный момент времени; g_0 – средняя площадь сечения дерева в начальный момент времени,

$$\eta=\frac{h_0^2}{g_0}. \tag{15}$$

Деревья в древостое отличаются друг от друга по размеру и, следовательно, будут иметь разный прирост. Если предположить, что соотношение приростов по площади сечения двух деревьев с разными размерами будет равно соотношению между площадями их питания (1), то можно записать следующее равенство:

$$\frac{dg_1/dt}{dg_2/dt}=\frac{c\cdot v_1/h_1}{c\cdot v_2/h_2}. \tag{16}$$

С учетом (2) выражение (16) можно привести к виду

$$\frac{dg_1}{dg_2}=\frac{g_1}{g_2}. \tag{17}$$

Кроме того, дерево в древостое растет в окружении других деревьев. В результате конкурентной борьбы за ресурсы окружающей среды идет процесс дифференциации деревьев по размерам. Упорядочим все деревья в древостое по размеру и перенумеруем их, начиная с самого большого. Каждое дерево, растущее в древостое, будет взаимодействовать как с деревьями, имеющими больший размер, так и с более мелкими. Для упрощения будем предполагать, что на прирост дерева будут влиять деревья, стоящие в ранжированном ряду перед рассматриваемым деревом, то есть те, которые имеют больший размер. Более маленькие деревья будут проигрывать в конкурентной борьбе и не повлияют на прирост рассматриваемого дерева. Исходя из этих рассуждений, самое большое дерево в древостое условно можно принять за свободно растущее дерево. Кроме того, если мы будем рассматривать только часть древостоя, представленную группой наиболее крупных деревьев, в начальный момент времени состоящей из n деревьев, то, исходя из сделанных выше предположений, зависимость суммы g всех деревьев такой группы (G_n) от высоты можно описывать уравнением (14), в котором в качестве значения N_0 используется исходная численность группы n:

$$G_n=G_m\cdot\frac{\dfrac{n\cdot h^2}{G_m\cdot\eta}}{\dfrac{n\cdot h^2}{G_m\cdot\eta}+1}. \tag{18}$$

Как уже отмечалось выше, в процессе развития средняя площадь сечения дерева, растущего в древостое, будет увеличиваться медленнее, чем у свободно растущего дерева. Кроме этого, есть вероятность того, что дерево вообще отпадет. Если вероятность того, что дерево, стоявшее в начальный момент времени в упорядоченном по убыванию размеров ряду деревьев на месте с номером n сохранилось и не отпало, обозначить буквой p_n, а среднюю площадь сечения такого дерева обозначить символом g_n, то произведение $g_n \cdot p_n$ даст нам математическое ожидание средней площади сечения дерева, стоявшего в начальный момент времени в упорядоченном по убыванию размеров ряду деревьев на месте с номером n. Получить эту величину можно, продифференцировав выражение (18) по n:

$$g_n \cdot p_n = \frac{dG_n}{dn} = \frac{h^2}{\eta \cdot \left(\frac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1 \right)^2}. \tag{19}$$

Проинтегрировав выражение (19) по h, с учетом (18) и (19), мы получим дифференциальное уравнение, описывающее зависимость изменения $g_n \cdot p_n$ от h:

$$\frac{dg_n \cdot p_n}{dh} = \frac{2 \cdot g_n \cdot p_n}{h} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{G_n}{G_m}\right). \tag{20}$$

Изменение выражения $g_n \cdot p_n$ (20) можно разложить на две составляющие: увеличение g_n за счет роста дерева и уменьшение p_n, обусловленное процессом отпада деревьев в древостое. Записать это можно следующим образом:

$$\frac{d(g_n \cdot p_n)}{dh} = g_n \cdot \frac{dp_n}{dh} + p_n \cdot \frac{dg_n}{dh} = \frac{2 \cdot g_n \cdot p_n}{h} - \frac{2 \cdot g_n \cdot p_n}{h} \cdot 2 \cdot \frac{G_n}{G_m}. \tag{21}$$

Величина $\frac{2 \cdot g_n \cdot p_n}{h}$ в правой части выражения (21) соответствует увеличению произведения $g_n \cdot p_n$ при условии отсутствия конкуренции между деревьями, а значение

$$\frac{2 \cdot g_n \cdot p_n}{h} \cdot 2 \cdot \frac{G_n}{G_m} \tag{22}$$

показывает, насколько меньше растет величина $g_n \cdot p_n$ из-за конкуренции между деревьями, которая имеет место в древостое, причем величина

$$2 \cdot \frac{G_n}{G_m} \tag{23}$$

показывает, какая часть от прироста в условиях свободного роста теряется.

Как уже отмечалось выше, конкуренция растений за ресурсы среды приводит как к уменьшению прироста отдельных деревьев, так и к отпаду части растений. По всей видимости, деревья, хорошо развитые и имеющие не намного меньшие размеры в сравнении с самыми крупными деревьями, в результате конкурентных взаимоотношений будут в основном терять в приросте, но все же оставаться живыми. Деревья же из наименьших ступеней толщины, напротив, за счет конкуренции в основном будут погибать, переходя в отпад. В качестве показателя, характеризующего местоположение дерева в ранжированном ряду, возьмем отношение средней площади сечения дерева к средней площади сечения самого большого дерева в древостое. С учетом сказанного величину (22) можно разделить на две составляющие следующим образом:

$$\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot 2\cdot\frac{G_n}{G_m}=\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot b'\cdot\frac{g_n}{g}\cdot\frac{G_n}{G_m}+$$
$$+\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot\left(2-b'\cdot\frac{g_n}{g}\right)\cdot\frac{G_n}{G_m}, \tag{24}$$

где b' – константа.

Величина $\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot b'\cdot\frac{g_n}{g}\cdot\frac{G_n}{G_m}$ показывает, сколько дерево теряет в приросте из-за конкуренции, имеющей место в древостое, оставаясь живым. Эта величина связана со степенью напряженности конкурентных взаимоотношений в древостое, характеризуемой сомножителем $\frac{G_n}{G_m}$. Кроме того, она будет изменяться с изменением местоположения дерева в ранжированном по размеру ряду за счет сомножителя $\frac{g_n}{g}$, который равен 1 для самого большого дерева в древостое и уменьшается с уменьшением размера дерева. Второе слагаемое правой части выражения (24) $\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot\left(2-b'\cdot\frac{g_n}{g}\right)\cdot\frac{G_n}{G_m}$ представляет долю потерь прироста величины $g_n\cdot p_n$, вызванную отпадом деревьев. Эта величина увеличивается с уменьшением размера дерева.

Учитывая сделанное ранее допущение о том, что самое крупное дерево можно считать свободно растущим, сделаем некоторые преобразования (24). Выразив r из равенства (4) и подставив его в выражение (2), получим

$$g=\pi\cdot r^2=\pi\cdot\frac{h^2}{\varphi^2}. \tag{25}$$

Подставив выражение (25) в (24) и используя обозначение $b=\frac{b'\cdot\varphi^2}{\pi}$, получим

$$\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot 2\cdot\frac{G_n}{G_m}=\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot b\cdot\frac{g_n}{h^2}\cdot\frac{G_n}{G_m}+$$
$$+\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot\left(2-b\cdot\frac{g_n}{h^2}\right)\cdot\frac{G_n}{G_m}. \tag{26}$$

С учетом (26) выражение (21) можно преобразовать к виду

$$g_n\cdot\frac{dp_n}{dh}+p_n\cdot\frac{dg_n}{dh}=\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}-\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot 2\cdot\frac{G_n}{G_m}=\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}-$$
$$-\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot b\cdot\frac{g_n}{h^2}\cdot\frac{G_n}{G_m}-\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot\left(2-b\cdot\frac{g_n}{h^2}\right)\cdot\frac{G_n}{G_m}$$

и далее разложить на два уравнения:

$$p_n\cdot\frac{dg_n}{dh}=\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}-\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot b\cdot\frac{g_n}{h^2}\cdot\frac{G_n}{G_m}=$$
$$=\frac{2\cdot g_n\cdot p_n}{h}\cdot\left(1-b\cdot\frac{g_n}{h^2}\cdot\frac{G_n}{G_m}\right)$$

и

$$g_n \cdot \frac{dp_n}{dh} = -\frac{2 \cdot g_n \cdot p_n}{h} \cdot \left(2 - b \cdot \frac{g_n}{h^2}\right) \cdot \frac{G_n}{G_m},$$

преобразовав которые получим

$$\frac{dg_n}{dh} = \frac{2 \cdot g_n}{h} \cdot \left(1 - b \cdot \frac{g_n}{h^2} \cdot \frac{G_n}{G_m}\right) \tag{27}$$

$$\frac{dp_n}{dh} = -\frac{2 \cdot p_n}{h} \cdot \left(2 - b \cdot \frac{g_n}{h^2}\right) \cdot \frac{G_n}{G_m}.$$

Воспользовавшись подстановкой $g_n = \frac{1}{z_n}$, преобразуем уравнение (27) к следующему виду:

$$\frac{dz_n}{dh} = \frac{2 \cdot b}{h^3} \cdot \frac{G_n}{G_m} - \frac{2}{h} z_n. \tag{28}$$

Подставив (18) в выражение (28), получим

$$\frac{dz_n}{dh} = \frac{2 \cdot b}{h^3} \cdot \frac{\dfrac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta}}{\dfrac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1} - \frac{2}{h} z_n.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решением которого является выражение

$$z_n = \left[\frac{b}{h_0^2} \cdot \ln\left(\frac{\dfrac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1}{\dfrac{n \cdot h_0^2}{G_m \cdot \eta} + 1}\right) + z_{n_0}\right] \cdot \frac{h_0^2}{h^2}.$$

Сделав обратную подстановку $z_n = \frac{1}{g_n}$ и учитывая (15) и то, что $h_0 = 0$, получим

$$g_n = \frac{h^2}{b \cdot \ln\left(\dfrac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1\right) + \eta}. \tag{29}$$

Разделив уравнение (19) на (29), получим выражения для p_n:

$$p_n = \frac{b \cdot \ln\left(\dfrac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1\right) + \eta}{\eta \cdot \left(\dfrac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1\right)^2}. \tag{30}$$

В ходе развития древостоя конкурентные взаимоотношения между растениями, по-видимому, будут влиять не только на прирост деревьев по объему, но и на прирост по высоте, хотя, возможно, и не в такой степени. В целом относительные потери прироста по площади сечения в древостое характеризуются коэффициентом (23). Целесообразно предположить, что характер влияния полноты на прирост по высоте будет аналогичен. Вместе с тем учитывая, что степень этого влияния будет отличаться от аналогичного влияния на прирост по площади сечений, в выражение (23) следует добавить коэффициент, показывающий эти отличия. Учитывая сказанное, относительное влияние конкурентных взаимоотношений на прирост по высоте можно выразить следующим образом:

$$2 \cdot \tau \cdot \frac{G_n}{G_m}, \tag{31}$$

где τ – постоянный коэффициент.

Выражение (17) показывает нам, как соотносятся изменения площадей сечений двух разных по размеру деревьев при условии, что влияние конкуренции отсутствует. Воспользовавшись соотношением (2), преобразуем его:

$$\frac{dr_1}{dr_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Далее, с учетом выражения (3), получим

$$\frac{dh_1}{dh_2} = \frac{h_1}{h_2}. \tag{32}$$

Учитывая (31) и равенство (32), по аналогии с выражением (20) для высоты дерева, стоящего на n-м месте в упорядоченном по убыванию размеров ряду деревьев в древостое, можно записать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dh_n}{dh} = \frac{h_n}{h} \cdot \left(1 - 2 \cdot \tau \cdot \frac{G_n}{G_m}\right). \tag{33}$$

Воспользовавшись (18), преобразуем уравнение (33):

$$\frac{dh_n}{h_n} = \frac{dh}{h} \cdot \left(1 - 2 \cdot \tau \cdot \frac{\dfrac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta}}{\dfrac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1}\right).$$

Это дифференциальное уравнение с разделенными переменными. Решив для него задачу Коши с начальными условиями h_0, h_{n_0} и $h_0 = h_{n_0}$, получим

$$h_n = h \cdot \frac{b \cdot \ln\left(\dfrac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1\right) + \eta}{\eta \cdot \left(\dfrac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1\right)^{2+\tau}}. \tag{34}$$

Теперь, с учетом (2), а также используя выражения (29) и (34), мы можем определить объем дерева следующим образом:

$$v_n = h_n \cdot g_n = \frac{h^3}{\eta \cdot \left(\dfrac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1\right)^{2+\tau}}. \tag{35}$$

Если проинтегрировать выражение (30) от 0 до n, то есть найти суммарную вероятность сохранности для первых n наиболее крупных деревьев, которые были в начальный момент времени в древостое, то мы получим уравнение, показывающее, сколько из этих n деревьев останется к тому моменту, когда высота наиболее крупных деревьев будет равна h:

$$N_n = \int_0^n \frac{b \cdot \ln\left(\frac{m \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1\right) + \eta}{\eta \cdot \left(\frac{m \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1\right)^2} \cdot dm =$$

$$= \frac{G_m}{h^2} \cdot \left(\frac{(b+\eta) \cdot \left(\frac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta}\right) - b \cdot \ln\left(\frac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1\right)}{\frac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1} \right), \tag{36}$$

где N_n – число деревьев, сохранившееся к текущему моменту из n наиболее крупных деревьев, которые были в древостое в начальный момент времени.

Уравнение (36) показывает, как идет процесс изреживания древостоя в зависимости от положения деревьев в упорядоченном по размерам ряду. Однако более предпочтительным было бы связать процесс изреживания древостоя с размерными характеристиками деревьев, а не с их рангом в начальный момент времени. Это можно сделать следующим образом. Избавимся от величины n в правой части уравнения (36). Для этого преобразуем уравнение (35):

$$\frac{n \cdot h^2}{G_m \cdot \eta} + 1 = \left(\frac{h^3}{v_n \cdot \eta}\right)^{\frac{1}{2+\tau}}. \tag{37}$$

Теперь, используя подстановку выражения (37) в уравнение (36), получим

$$N_n = \frac{G_m}{h^2} \cdot \left(\frac{(b+\eta) \cdot \left(\left(\frac{h^3}{v_n \cdot \eta}\right)^{\frac{1}{2+\tau}} - 1\right) - \frac{b}{2+\tau} \cdot \ln\left(\frac{h^3}{v_n \cdot \eta}\right)}{\left(\frac{h^3}{v_n \cdot \eta}\right)^{\frac{1}{2+\tau}}} \right). \tag{38}$$

С помощью уравнения (38) можно определить, сколько в древостое деревьев имеют объем, превышающий величину v_n.

Проверка работоспособности модели выполнялась по материалам таксации 38 пробных площадей, заложенных в чистых или с небольшой примесью других пород березовых древостоях. Расчеты выполнялись по орляковому (12 пробных площадей), кисличному (12 пробных площадей) и черничному (13 пробных площадей) типам леса.

Материалы таксации пробных площадей обрабатывались по общепринятым методикам. Кроме вычисления обычных таксационных показателей, на каждой пробной площади были выполнены дополнительные расчеты.

Во-первых, вычислялись накопленные частоты для распределения стволов по диаметру, начиная от самой большой ступени толщины.

Во-вторых, вычислялись накопленные суммы площадей сечений на высоте груди, начиная от самой большой ступени толщины.

В-третьих, определялись высоты для нижних границ ступеней толщины.

В-четвертых, вычислялись объемы стволов для нижних границ ступеней толщины. Для этого использовалось уравнение, полученное ранее при построении математической модели сортиментных таблиц, с помощью которого можно вычислить объем любой части ствола [1].

$$V(h_н, h_в) = \int_{h_н}^{h_в} g(x)dx = \frac{g_m \cdot [(h-h_н)^{2\cdot a+1} - (h-h_в)^{2\cdot a+1}]}{(h-1.3)^{2\cdot a} \cdot (2\cdot a+1)}, \tag{39}$$

где $V(h_н,h_в)$ – объем отрезка ствола; g_m – площадь сечения ствола на высоте груди; $h_н$ – высота, на которой начинается отрезок ствола; $h_в$ – высота, на которой заканчивается отрезок ствола.

Так как вычислять надо было объем всего ствола, то в качестве высот $h_н$ и $h_в$ были взяты 0 и высота ствола соответственно. Если подставить эти величины в формулу (39) вместо высот $h_н$ и $h_в$, получим

$$v = \frac{g_m \cdot h^{2\cdot a+1}}{(h-1.3)^{2\cdot a} \cdot (2\cdot a+1)}, \tag{40}$$

где v – объем ствола.

Значение коэффициента a из этого уравнения для березы было определено ранее по материалам сортиментных таблиц Ф.П. Моисеенко [1]. Однако сортиментные таблицы ориентированы в основном на спелые древостои, а в данной работе затрагиваются все периоды развития древостоя. В связи с этим с помощью нелинейного метода наименьших квадратов было определено новое значение коэффициента a. Для расчетов использовались данные таблицы объемов маломерных стволов березы по высоте и диаметру О.А. Трулля [2] и таблицы объемов стволов березы по А.В. Тюрину [3, 4].

Несмотря на то, что модель настраивалась по двум разным таблицам одновременно, получены достаточно хорошие результаты: F = 131568421; R^2 = 0,999995. Вычисление объемов древесных стволов для нижних границ ступеней толщины на пробных площадях выполнялось с помощью уравнения (40) с использованием вновь вычисленного значения коэффициента a = 0,697597.

Для вычисления значений параметров системы моделирования распределения деревьев в древостое по диаметрам использовался нелинейный метод наименьших квадратов. В качестве зависимой переменной использовались накопленные частоты по ступеням толщины (суммирование начиналось от максимальных диаметров). Вычисление зависимой переменной выполнялось по уравнению (38), причем в качестве высоты самого крупного дерева использовалась высота самой большой ступени толщины. Расчеты выполнялись для каждого типа леса в отдельности. Полученные результаты говорят о согласованности математической модели с экспериментальными данными (таблица).

Таблица

Статистические показатели, характеризующие модель распределения деревьев по диаметрам

Порода	Тип леса	Параметры				F-критерий Фишера	Коэффициент детерминации, R^2
		Gm	r	*b*	τ		
Береза	ОР	31,38	21281 2	16,14	1,368	25,39506	0,606159
	КИС	34,98	19574 5	$15{,}12 \cdot 10^5$	0,8186	137,5050	0,858039
	ЧЕР	423860,5	25172 5	578,2	62791,6	296,9592	0,937640

Предлагаемая модель позволяет проследить связь распределения числа стволов в древостое по ступеням толщины с высотой самых крупных деревьев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Машковский В.П. Уравнения для определения выхода древесины заданной крупности // Труды БГТУ. Сер. I: Лесное хозяйство. – Мн.: БГТУ, 2000. Вып. VIII. – С. 157–164.

2. 2. Справочник лесоустроителя Белоруссии / Под общ. ред. В.С. Мирошникова. – Мн.: Вышэйшая школа, 1973. – 268 с.

3. Лесотаксационный справочник / Б.И. Грошев, С.Г. Синицын, П.И. Мороз, И.П. Сеперович. – 2-е изд., перераб. - М.: Лесн. пром-сть, 1980. – 288 с.

4. Полевой справочник по таксации леса / Под общ. руководством П.В. Воропанова. – Брянск, 1958. – 210 с.