УДК 630* 5.68

О.А.Атрощенко

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЕРЕВЬЕВ ПО ДИАМЕТРУ С ПОМОЩЬЮ БЕТА-ФУНКЦИИ

Для математического описания распределения деревьев по диаметру в древостое применяются различные функции: нормальное и логнормальное распределения, гамма- и бета- функции, распределение Вейбулла. В последнее время хорошие результаты были получены с применением бета-функции [1, 2, 4].

В настоящей работе приводятся алгоритмы вычисления бета-функции и особенности ее применения для аналитического выравнивания распределений деревьев по диаметру.

Бета-функция двух положительных чисел α и γ определяется интегралом

$$B(\alpha,\gamma) = \int_a^b (x - a)^{\alpha} (b - x)^{\gamma} dx, \tag{1}$$

где $B(\alpha,\gamma)$ - площадь под кривой распределения: α, γ - первая и вторая экспоненты бета-функции; x - переменная, например диаметр; a, b - нижний и верхний пределы переменной.

При использовании бета-функции для аппроксимации опытных рядов распределения деревьев по диаметру необходимо, чтобы площадь под кривой распределения была равна общему числу стволов N.

Это достигается введением коэффициента C.

$$f(x) = C (x-a)^{\alpha} (b-x)^{\gamma}. \tag{2}$$

Кривая преобразуется в вероятностное распределение, для которого интеграл плотности функции дает общее число деревьев

$$C = \frac{N}{\int_a^b (x-a)^{\alpha} (b-x)^{\gamma} dx}. \tag{3}$$

Следовательно, коэффициент C характеризует фактор выравнивания опытных данных по оси ординат (число деревьев), а пределы a и b по оси абсцисс (размах по диаметру).

Практически имеется четыре метода вычисления бета-распределения по опытным данным: 1) применение регрессионного анализа; 2) вычисление бета-распределения по системе кривых Пирсона; 3) определение экспонент распределения с помощью стандартных кривых; 4) вычисление бета-распределения через среднюю арифметическую, дисперсию и схематически определенных пределов на оси x -ов.

1. Для применения техники регрессионного анализа бета-распределение по формуле (2) преобразуется в логарифмическую форму

$$\log\left[f(x)\right] = \log C + \alpha \log(x-a) + \gamma \log(b-x), \quad (4)$$

где $y = \log\left[f(x)\right]$; $x_1 = \log(x-a)$; $x_2 = \log(b-x)$;
$b_o = \log C$; $b_1 = \alpha$; $b_2 = \gamma$.

Подставив в выражение (4) соответствующие обозначения, получим уравнение регрессии

$$y = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Оценка коэффициентов регрессии (b_0, b_1 и b_2) производится методом наименьших квадратов. Так как формула подобна функциям роста и прироста, бета-функция особенно подходит для демонстрации изменений, т.е. кривых прироста по диаметру [1, 3] .

2. Бета-распределение может быть рассмотрено в системе кривых Пирсона. Процедура заключается в вычислении первых четырех моментов, по которым определяются пределы и экспоненты бета-функции.

Систематическая ошибка ввиду группировки деревьев по интервалам (ступеням толщины) может быть существенно уменьшена. В то время как на первый и второй моменты (арифметическую среднюю и дисперсию) эта систематическая ошибка практически не влияет, то третий и четвертый моменты весьма чувствительны к ней. Поэтому этот способ не рекомендуется.

3. Стандартные кривые бета-распределений могут быть выполнены при следующих двух условиях:

а) экспоненты имеют соотношение $\alpha + 6 = \gamma$; (5)

б) $\mathrm{const} \int_a^b (x-a)^{\alpha} \; (b-x)^{\gamma} = N$ — постоянная величина. (6)

Графики стандартных кривых можно разработать для любых возможных сочетаний α / γ .

Для подбора стандартной кривой с целью выравнивания опытного распределения необходимо, чтобы кривые совпадали по площади и пределам a, b. Этот способ может быть использован для приближения в оценках экспонент α, γ, например при классификации лесов, для оценки постоянного множителя C.

4. Ф. Зехрер (1970) разработал программу BETKLA, по которой параметры бета-функции вычисляются через среднюю величину ($\bar{x}$) и дисперсию σ^2 распределения:

$$\gamma = \frac{\dfrac{P}{\sigma^2 (P+1)^2} - 1}{P+1} ; \qquad (7)$$

$$\alpha = P(\gamma + 1) - 1; \qquad (8)$$

$$P = \frac{\bar{x}}{1 - \bar{x}} . \qquad (9)$$

Если вероятностное распределение имеет величину интервала W, число их – K, среднее значение классов x_1, x_2, ..., x_j, x_k, то нижний и верхний пределы бета-распределения (a, b) получаем по формулам

$$a = x_1 - \frac{W}{2}; \quad b = x_k + \frac{W}{2} . \qquad (10)$$

Вычисляется постоянный множитель C по формуле (3) и, наконец, определяется функция или частоты для отдельных классов по формуле (2). Кроме того, число деревьев для любого интервала по диаметру можно установить, т. е. определить, сколько деревьев имеют диаметр выше принятого.

Исследования показали, что частоты, вычисленные с помощью бета-функции, обычно меньше в правой части распределения, близкой к пределу b. Этот недостаток преодолели в программе BETKLA путем последовательного увеличения численности выборки к верхнему пределу. Для каждой последовательности значение суммы квадратов отклонений бета-функции от опытного распределения оценивается. Бета-распределение, где сумма квадратов минимальна, рассматривается как "оптимум" и автоматически отбирается.

В настоящем исследовании была использована программа BETKLA с тремя незначительными изменениями [2]:

а) для уменьшения ошибки интервальной оценки точки полигона распределения могут отклоняться от средних значений классов статистического ряда;

б) при последовательном увеличении размаха по диаметру применяется шаг длиной в 1 см;

в) при выборе "оптимальной" бета-функции применяется коэффициент корреляции между опытным распределением и бета-функцией вместо суммы квадратов отклонений.

Коэффициент корреляции как критерий согласия вычисляет - ся по формуле

$$r^2 = 1 - \frac{k-1}{k-3} \frac{\sum_i (\delta f_i - n_i)^2}{\sum_i (n_i - n)^2}, \tag{11}$$

где k - число интервалов (классов статистического ряда); δ - величина интервала; n - число деревьев в i-ом ин - тервале, $n = \sum_i n_i / k$; f_i — значение бета-функции в центре i-го интервала.

Опытный материал представлен данными перечислительной таксации сосновых насаждений Белоруссии на 47 временных пробных площадях. Обработка его производилась в вычисли - тельном центре лесохозяйственного отделения Хельсинкского университета. Сосновые насаждения в возрасте от 5 до 30 лет характеризуются I^a — III классами бонитета (табл.1). Нижние пределы опытных рядов распределения деревьев в древостое варьируют от 0,5 до 7,5 см (коэффициент вариации v=74,9%), а верхние пределы от 5,5 до 22,5 см и характеризуются значительно меньшей вариацией (v = 34,1%). Среднее значение первой экспоненты $\bar{\alpha}$ = 1,047 (v= 75,7%), второй экспо - ненты $\bar{\gamma}$ = 2,326 (v = 64,9%).

Как показывают коэффициенты корреляции ($r^2 > 0,8 - 0,9$; v = 6,4%), опытные ряды распределения деревьев по диаметру хорошо аппроксимируются с помощью бета-функции.

Одновершинное симметричное распределение при $\alpha = \gamma > 0$. С увеличением экспонент крутость кривой возрастает.

Прямоугольное распределение при $\alpha = \gamma = 0$. Это крайний случай одновершинного распределения, характеризующегося значительной плосковершинностью.

Кривая стремится к минимуму распределения при $\alpha = \gamma < 0$.

Одновершинное асимметричное распределение типично для распределений деревьев по диаметру, высоте, объему, видовому числу и другим таксационным признакам в древостое. Условие этого распределения $\alpha \neq \gamma$, оба > 0.

Левовершинное распределение (отрицательная асимметрия) при $\alpha < \gamma$ характерно для распределения деревьев по диа-

Т а б л и ц а 1. Параметры бета-распределения деревьев по диаметру в сосновых молодняках

Возраст, лет	Коэффициент, C	Пределы		Экспоненты		Коэффициент корреляции,
		a	b	α	γ	
			I^a бонитет			
8	$0{,}462\cdot10^{-2}$	0,5	9,5	2,191	4,206	0,964
13	1,62	1,5	12,5	1,346	2,212	0,837
26	0,890	3,5	17,5	1,052	1,820	0,887
			I бонитет			
10	2,52	0,5	9,5	1,219	1,532	0,894
15	11,6	0,5	13,5	0,609	1,481	0,977
20	$0{,}221\cdot10^{-1}$	1,5	16,5	1,801	3,255	0,898
23	16,9	3,5	15,5	0,429	1,050	0,959
			II бонитет			
6	15,4	7,5	28,5	0,548	1,020	0,941
10	2,40	1,5	7,5	0,301	3,267	0,962
15	5,55	1,5	12,5	0,306	2,228	0,963
20	$0{,}564\cdot10^{-2}$	1,5	19,5	0,364	3,572	0,965
26	0,152	3,5	20,5	0,909	2,270	0,959
			III бонитет			
10	102	0,5	5,5	0,380	0,578	0,827
15	48,5	1,5	10,5	0,442	1,238	0,858
21	85,7	2,5	13,5	0,158	0,817	0,943
27	0,554	3,5	16,5	1,442	2,159	0,926

метру в одновозрастных древостоях, не пройденных или пройденных слабыми рубками ухода.

Л и т е р а т у р а

1. Z ö h r e r F. The beta-distribution for best fit of stem-diameter-distributions. - In coll.: Third conference Advisory group of forest statisticians. Paris, 1970. 2. V ä l i a h o H., V u o k i l a Y. A system for simulation of the development of stem-diameter distributions. Helsinki, 1973. 3. P r o d a n M. Forest Biometrics. Oxford, 1968. 4. Х а н Г., Ш а п и р о С. Статистические модели в инженерных задачах. М., 1969.