

АКТУАЛИЗАЦИЯ ЛЕСНОГО ФОНДА ПО ТАБЛИЦАМ КЛАССОВ ВОЗРАСТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

The wood fund actualization method under the tables of age classes with use of interpolation is described in this paper. The technique of interpolation of not decreasing or not growing dependences with the third degree polynomials is offered. At the given method on neighbor polynomials in units of interpolation the condition of equality their first derivative is imposed, which values are set so that to supply in an interval of interpolation performance of a condition not of decrease or not increases of smoothing function. Besides, at construction of system of smoothing cubic parabolas that fact is used, that they pass through units of interpolation. With the help of the given technique the cumulative areas of age classes are interpolated. The results of interpolation are used for performance of the forecast of distribution of woods on classes of age.

Введение. При расчете размера главного пользования, как правило, делают прогноз распределения площадей и запасов по классам возраста на конец ревизионного периода с последующим повторным расчетом пользования на второе десятилетие. При наличии повыведельной информации о лесном фонде такие прогнозы легко выполняются системой обработки лесоустроительной информации в ходе лесоустроительного проектирования. Однако часто прогноз распределения площадей и запасов древостоев по классам возраста приходится делать по данным таблиц классов возраста. В том случае, если величина класса возраста и период прогноза не совпадают друг с другом по величине, приходится вычислять, какая часть класса возраста перейдет в следующий, а какая нет. Как правило, при этом предполагается, что древостои в классе возраста распределяются равномерно. Тогда если величина класса возраста (K) больше периода прогноза (m), то определить площадь древостоев, которые перейдут из i -го в $(i + 1)$ -й класса возраста ($S_{i,i+1}$), можно по формуле

$$S_{i,i+1} = S_i \cdot \frac{m}{K},$$

где S_i – площадь древостоев i -го класса возраста.

Однако при такой методике прогноз будет содержать ошибки, обусловленные предположением о равномерном распределении древостоев в пределах класса возраста. Эти ошибки можно проиллюстрировать на примере, приведенном в табл. 1. В предлагаемом примере на основе распределения площадей еловых древостоев Минской области по классам возраста по состоянию на 01.01.94 г. выполнен прогноз возрастной структуры на 2004 г. Затем на основе полученных результатов прогноза на 2004 г. выполнена передвижка площадей еще на 10 лет до 2014 г. В рассматриваемом примере при выполнении прогноза предполагалось, что древостои распределяются равномерно в пределах класса возраста. Обусловленные этим предположением ошибки прогноза хорошо иллюстрируются данными табл. 1.

ложением ошибки прогноза хорошо иллюстрируются данными табл. 1.

Таблица 1

Площади еловых лесов Минской области, тыс. га (2-я группа лесов)

Класс возраста	1994 г.	2004 г.	2014 г.
I	17,90	9,75	8,68
II	15,50	16,70	13,23
III	24,80	20,15	18,43
IV	18,20	21,50	20,83
V	1,28	9,50	13,80
VI	0,32	0,40	3,05

Площадь еловых древостоев I класса возраста в 1994 г. составляла 17,90 тыс. га. Через 20 лет в 2014 г. все эти древостои должны быть отнесены ко II классу возраста. Однако согласно выполненному прогнозу на 2014 г. площадь II класса возраста будет составлять 13,23 тыс. га, что неверно. Такая же картина наблюдается и для остальных классов возраста.

Для того чтобы избежать подобного рода ошибок, попробуем путем интерполяции получить площади древостоев для каждого года в отдельности и дальнейший прогноз выполнять на основании этих данных. Интерполировать будем накопленные площади по классам возраста, начиная с младших возрастов. Каждой такой накопленной площади будем ставить в соответствие верхние границы классов возраста.

Существуют разные методы интерполяции: интерполяционный многочлен Лагранжа, интерполяционный многочлен Ньютона, интерполяционный многочлен Эрмита, сплайны и т. д. [1]. Однако интерполяция накопленных площадей древостоев по классам возраста требует специального подхода. Дело в том, что накопленные площади формируют неубывающую последовательность. Существующие методы не учитывают данной особенности. Это может привести к тому, что интерполирующая

функция в некоторых местах может оказаться убывающей, что недопустимо.

Например, при интерполяции сплайнами накопленных площадей группы возраста для еловых древостоев Минской области по состоянию на 01.01.94 г. после столетнего возраста мы получаем убывающий участок, что противоречит здравому смыслу (рис. 1).

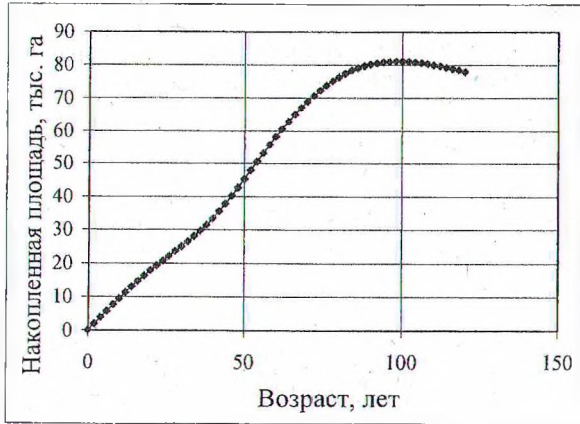


Рис. 1. Интерполяция накопленных площадей с помощью сплайнов

В связи с этим для интерполяции накопленных площадей древостоев воспользуемся следующим методом.

Сглаживание неубывающих последовательностей. Для интерполяции последовательности накопленных площадей воспользуемся полиномами третьей степени. Для каждого отдельного участка между двумя последовательными точками будем строить отдельный полином. При этом, так же как и при интерполяции сплайнами, для каждого узла будем выдерживать условие совпадения значений двух соседних интерполяционных полиномов со значением в узле интерполяции для всей последовательности точек. Кроме того, для каждого узла интерполяции будем соблюдать условие равенства первых производных для двух соседних интерполяционных функций. Однако в отличие от сплайнов, снимем ограничение на равенство вторых производных для соседних интерполяционных полиномов в узлах интерполяции. Вместо этого будем задавать значения первых производных в узлах интерполяции следующим образом:

$$y'_i = \frac{3 \cdot \frac{y_n - y_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})} \cdot \frac{y_{n+1} - y_n}{(x_{n+1} - x_n)}}{\frac{y_n - y_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})} + \frac{y_{n+1} - y_n}{(x_{n+1} - x_n)} + \sqrt{\frac{y_n - y_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})} \cdot \frac{y_{n+1} - y_n}{(x_{n+1} - x_n)}}}, \quad (1)$$

где x_i и y_i – координаты i -й точки интерполируемой последовательности; y'_i – производная в i -м узле интерполяции.

В том случае, если в интерполируемой последовательности есть три точки подряд, ле-

жащие на одном уровне, т. е. $y_{n-1} = y_n = y_{n+1}$, то величину производной в средней из этих трех точек будем брать равной нулю: $y'_n = 0$.

Поскольку интерполируемая последовательность неубывающая, т. е. $y_n \geq y_{n-1}$, то производные, задаваемые выражением (1) будут неотрицательны.

Введя обозначение

$$s_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, \quad (2)$$

перепишем выражение (1) следующим образом:

$$y'_n = \frac{3 \cdot s_n \cdot s_{n+1}}{s_n + s_{n+1} + \sqrt{s_n \cdot s_{n+1}}}. \quad (3)$$

Если наклон прямых линий, соединяющих две соседние точки интерполируемой последовательности одинаков в двух соседних интервалах интерполяции, т. е. $s_n = s_{n+1}$, то производная, задаваемая выражением (3) будет равна этому наклону. Если один из соседних участков интерполяции имеет наклон, равный нулю, т. е. $s_n = 0$ или $s_{n+1} = 0$, то производная задаваемая выражением (3) также будет равняться нулю.

В дополнение надо задать значение первых производных для самого первого и самого последнего узлов интерполяции. Эти значения можно взять, например, равными нулю или задать с помощью следующих выражений:

$$y'_0 = \frac{2 \cdot s_0^2}{s_0 + s_1}; \quad y'_n = \frac{2 \cdot s_n^2}{s_{n-1} + s_n}. \quad (4)$$

Докажем, что сформированные таким образом полиномы будут неубывающими. Запишем формулу полинома для интерполяции n -го интервала, расположенного между $n-1$ и n узлами интерполяции:

$$y = y_{n-1} + y'_{n-1} \cdot (x - x_{n-1}) + c_n \cdot (x - x_{n-1})^2 + d_n \cdot (x - x_{n-1})^3, \quad (5)$$

где x_i и y_i – координаты i -й точки интерполируемой последовательности; y'_i – производная в i -м узле интерполяции; c_n и d_n – коэффициенты интерполяционного полинома для интервала между $(n-1)$ -м и n -м узлами интерполяции.

Производная для n -го интервала будет выражаться уравнением

$$y' = y'_{n-1} + 2 \cdot c_n \cdot (x - x_{n-1}) + 3 \cdot d_n \cdot (x - x_{n-1})^2. \quad (6)$$

Используя уравнения (5) и (6), а также условия, описанные выше, составим систему уравнений, с помощью которой определим коэффициенты c_n и d_n :

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + y'_{n-1} \cdot (x_n - x_{n-1}) + c_n \cdot (x_n - x_{n-1})^2 + d_n \cdot (x_n - x_{n-1})^3, \\ y'_n = y'_{n-1} + 2 \cdot c_n \cdot (x_n - x_{n-1}) + 3 \cdot d_n \cdot (x_n - x_{n-1})^2. \end{cases} \quad (7)$$

Введем обозначение

$$h_n = x_n - x_{n-1}, \quad (8)$$

запишем систему уравнений (7) следующим образом:

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + y'_{n-1} \cdot h_n + c_n \cdot h_n^2 + d_n \cdot h_n^3, \\ y'_n = y'_{n-1} + 2 \cdot c_n \cdot h_n + 3 \cdot d_n \cdot h_n^2. \end{cases} \quad (9)$$

Выразим из второго уравнения системы (9) коэффициент d_n :

$$d_n = \frac{y'_n - y'_{n-1} - 2 \cdot c_n \cdot h_n}{3 \cdot h_n^2}. \quad (10)$$

Теперь подставим полученное выражение (10) для коэффициента d_n в первое уравнение системы (9):

$$y_n = y_{n-1} + \left(y'_{n-1} + c_n \cdot h_n + \frac{y'_n - y'_{n-1} - 2 \cdot c_n \cdot h_n}{3} \cdot h_n \right) \cdot h_n \quad (11)$$

и выразим из выражения (11) коэффициент c_n :

$$c_n = \frac{1}{h_n} \cdot \left(3 \cdot \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - y'_n - 2 \cdot y'_{n-1} \right). \quad (12)$$

Подставляя полученное выражение (12) в (10), выразим d_n через координаты узлов интерполяции и значения производных в этих узлах:

$$d_n = \frac{1}{h_n^2} \left(y'_n + y'_{n-1} - 2 \cdot \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right). \quad (13)$$

Если две соседние точки в интерполируемой последовательности лежат на одном уровне, т. е. есть $y_{n-1} = y_n$, то с учетом выражений (1), (12) и (13), уравнение (5) примет вид

$$y = y_{n-1},$$

а это – неубывающая функция.

Далее рассмотрим случай, когда $y_{n-1} < y_n$.

В том случае если коэффициент d_n отрицательный, производная (6) будет иметь максимум. Это значит, что если производная будет принимать неотрицательные значения, то все они будут представлены одним непрерывным интервалом. Следовательно, в интервале от x_{n-1} до x_n производная будет неотрицательна, так как на концах интервала значения производной больше или равны нулю.

Если коэффициент d_n равен нулю, то производная (6) примет вид прямой линии. Следовательно, если на концах интервала $[x_{n-1}, x_n]$ производные будут неотрицательны, то и внутри интервала производная также будет принимать только неотрицательные значения.

Рассмотрим случай, когда коэффициент d_n положительный. В том случае если коэффициент c_n неотрицательный, производная (6) в ин-

тервале $[x_{n-1}, x_n]$ будет возрастать. Следовательно, если в начале интервала производная неотрицательная, то и на всем интервале $[x_{n-1}, x_n]$ она будет также неотрицательной.

В том случае если коэффициент d_n положительный, а коэффициент c_n отрицательный, производная (6) будет иметь минимум. Рассмотрим подробнее этот случай. Приравняв производную (6) к нулю, получим квадратное уравнение, корни которого, если они есть, будут границами интервала, в котором производная будет принимать отрицательные значения:

$$y'_{n-1} + 2 \cdot c_n \cdot (x - x_{n-1}) + 3 \cdot d_n \cdot (x - x_{n-1})^2 = 0. \quad (14)$$

Введем новую переменную $z = x - x_{n-1}$. Тогда корни уравнения (14) будут:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \cdot c_n \pm \sqrt{4 \cdot c_n^2 - 12 \cdot d_n \cdot y'_{n-1}}}{6 \cdot d_n} = \frac{-c_n \pm \sqrt{c_n^2 - 3 \cdot d_n \cdot y'_{n-1}}}{3 \cdot d_n}. \quad (15)$$

Если дискриминант будет меньшим или равным нулю:

$$c_n^2 - 3 \cdot d_n \cdot y'_{n-1} \leq 0, \quad (16)$$

то производная (6) будет принимать только неотрицательные значения.

Используя выражения (12) и (13), преобразуем неравенство (16) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_n^2} \cdot \left(3 \cdot \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - y'_n - 2 \cdot y'_{n-1} \right)^2 - \\ & - \frac{3 \cdot y'_{n-1}}{h_n^2} \cdot \left(y'_n + y'_{n-1} - 2 \cdot \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right) \leq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что h_n положительно, умножим обе части неравенства (17) на h_n^2 :

$$(3 \cdot s_n - y'_n - 2 \cdot y'_{n-1})^2 - 3 \cdot y'_{n-1} \cdot (y'_n + y'_{n-1} - 2 \cdot s_n) \leq 0. \quad (18)$$

Теперь раскроем скобки в левой части неравенства (18):

$$9 \cdot s_n^2 + y_n'^2 + 4 \cdot y_{n-1}'^2 - 6 \cdot s_n \cdot y'_n - 12 \cdot s_n \cdot y'_{n-1} + 4 \cdot y'_n \cdot y'_{n-1} - 3 \cdot y_{n-1}' \cdot y'_n - 3 \cdot y_{n-1}'^2 + 6 \cdot y'_{n-1} \cdot s_n \leq 0$$

и приведем подобные члены:

$$9 \cdot s_n^2 + y_{n-1}'^2 + y_n'^2 - 6 \cdot s_n \cdot y'_{n-1} - 6 \cdot s_n \cdot y'_n + y'_n \cdot y'_{n-1} \leq 0. \quad (19)$$

Учитывая, что s_n является величиной положительной, разделим обе части неравенства (19) на s_n^2 :

$$9 + \left(\frac{y'_{n-1}}{s_n} \right)^2 + \left(\frac{y'_n}{s_n} \right)^2 - 6 \cdot \frac{y'_{n-1}}{s_n} - 6 \cdot \frac{y'_n}{s_n} + \frac{y'_n}{s_n} \cdot \frac{y'_{n-1}}{s_n} \leq 0. \quad (20)$$

Введем обозначения:

$$k_0 = \frac{y'_{n-1}}{s_n} \text{ и } k_1 = \frac{y'_n}{s_n}. \quad (21)$$

$$2 \cdot c_n + 6 \cdot d_n \cdot (x - x_{n-1}) = 0. \quad (33)$$

Преобразуем уравнение (33) следующим образом:

$$x - x_{n-1} = -\frac{2 \cdot c_n}{6 \cdot d_n}. \quad (34)$$

Если величина $(x - x_{n-1})$ будет больше, чем $(x_n - x_{n-1} = h_n)$, то первая производная интерполяционного полинома достигнет своего минимума правее интервала $[x_{n-1}, x_n]$. Это значит, что в интервале $[x_{n-1}, x_n]$ она будет убывать. Следовательно, если на концах данного интервала первая производная будет положительна, то и на всем интервале она также будет принимать положительные значения. Построим неравенство, удовлетворяющее описанному выше условию:

$$-\frac{2 \cdot c_n}{6 \cdot d_n} > h_n. \quad (35)$$

С учетом того, что коэффициент d_n в рассматриваемом случае положителен, преобразуем неравенство (35) следующим образом:

$$-c_n > 3 \cdot d_n \cdot h_n. \quad (36)$$

Используя выражения (2), (8), (12) и (13), приведем неравенство (36) к виду

$$\frac{3 \cdot s_n - 2 \cdot y'_{n-1} - y'_n}{h_n} - 3 \cdot h_n \cdot \frac{-2 \cdot s_n + y'_{n-1} + y'_n}{h_n^2} > 0. \quad (37)$$

Умножим обе части неравенства на h_n , учитывая, что это положительная величина:

$$-3 \cdot s_n + 2 \cdot y'_{n-1} + y'_n + 6 \cdot s_n - 3 \cdot y'_{n-1} - 3 \cdot y'_n > 0, \quad (38)$$

и приведем подобные члены:

$$3 \cdot s_n - y'_{n-1} - 2 \cdot y'_n > 0. \quad (39)$$

Поскольку величина s_n положительная, то, разделив обе части неравенства (39) на s_n и учитывая (21), преобразуем его следующим образом:

$$3 - k_0 - 2 \cdot k_1 > 0. \quad (40)$$

Приравняв левую часть неравенства (40) к нулю, получим уравнение прямой линии:

$$k_0 + 2 \cdot k_1 = 3, \quad (41)$$

являющейся границей области, в которой первая производная интерполяционного многочлена достигает минимума правее интервала $[x_{n-1}, x_n]$.

На рис. 2 этому уравнению соответствует линия CE . Область, в которой первая производная интерполяционного многочлена достигает минимума правее интервала $[x_{n-1}, x_n]$, и, следовательно, на всем этом интервале производная положительна, находится под этой линией (наклонная штриховка).

Таким образом, на рис. 2 четырехугольник $ABCD$ ограничивает область возможных значений k_0 и k_1 , которые соответствуют рассматриваемому в данный момент случаю, когда коэффициент $c_n < 0$, а коэффициент $d_n > 0$.

Вся эта область соответствует положительным значениям первой производной интерполяционного полинома, так как она полностью накрывается либо эллипсом (вертикальная штриховка), внутри которого первая производная принимает только положительные значения, либо находится под линией CE (наклонная штриховка), где первая производная также может принимать только положительные значения.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи, и для каждого из них доказали, что первая производная интерполяционного полинома, построенного описанным выше способом, будет положительна в интервале интерполяции. Следовательно, предлагаемый способ интерполяции неубывающих последовательностей точек, приводит к созданию ряда неубывающих интерполяционных полиномов. Такой способ интерполяции будет корректно работать при интерполяции любых неубывающих последовательностей точек.

Если выполнить интерполяцию накопленных площадей групп возраста для еловых древостоев Минской области по состоянию на 01.01.94 г. с помощью описанного выше метода, то никаких убывающих участков не будет, в отличие от рассмотренного ранее случая использования для этой цели кубических сплайнов (рис. 3).

В данном примере значения производной в начальной и конечной точках интерполируемой последовательности принимались равными нулю. Это привело к тому, что в младших возрастах появился ненужный изгиб. Если значения производных на концах задать с помощью выражений (4), то мы получим в результате интерполяции более плавную кривую (рис. 4).

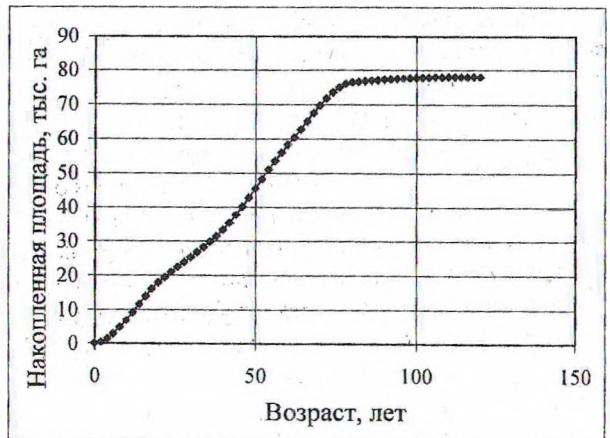


Рис. 3. Интерполяция накопленных площадей древостоев (производные на концах равны 0)

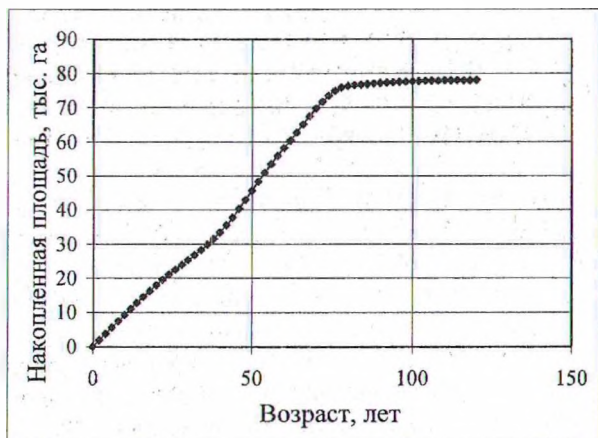


Рис. 4. Интерполяция накопленных площадей древостоев

Результаты и обсуждение. С использованием описанного выше способа интерполяции был выполнен прогноз возрастной структуры еловых древостоев Минской области (табл. 2).

Таблица 2
Площади еловых лесов Минской области, тыс. га (2-я группа лесов)

Класс возраста	1994 г.	2004 г.	2014 г.
I	17,90	4,60	4,60
II	15,50	16,05	17,90
III	24,80	20,25	15,50
IV	18,20	24,00	24,80
V	1,28	7,62	15,20
VI	0,32	0,00	0,00

Актуализация лесного фонда по таблицам классов возраста в рассматриваемом примере выполнялась следующим образом. Для распределения еловых лесов по классам возраста в 1994 г. были вычислены накопленные площади ельников начиная с I класса возраста. Каждой накопленной площади в соответствие была поставлена верхняя граница класса возраста. Далее, с помощью описанного выше метода интерполяции были построены интерполяционные полиномы, с помощью которых были вычислены накопленные площади ельников для каждого года. По разности накопленных площадей для двух соседних лет вычислялись площади еловых лесов для каждого отдельного года. После этого для выполнения прогноза возрастной структуры на следующий год, сначала возраст всех древо-

стоев увеличивался на один год, а затем, начиная с самых старших возрастов, снималась площадь, равная годичной лесосеке, и перемещалась в однолетние древостои. Данная последовательность действий выполнялась столько раз, сколько лет было в периоде прогноза. Таким образом, десять шагов было выполнено для получения возрастной структуры на 2004 г. и еще десять шагов было сделано для получения распределения еловых лесов Минской области по классам возраста на 2014 г.

Как видим, ошибка, которая присутствовала в результатах прогноза, выполненного для этих же данных, но на основе предположения о равномерности распределения древостоев в пределах классов возраста, в данном случае отсутствует. Действительно, площадь еловых древостоев I класса возраста в 1994 г. составляла 17,90 тыс. га. Через 20 лет, в 2014 г., согласно прогнозу, все эти древостои перешли во II класс возраста, как и должно быть. Аналогичная картина наблюдается и с другими классами возраста.

Описанная в данной работе методика интерполяции может использоваться не только при актуализации лесного фонда по таблицам классов возраста, но и для интерполяции любых последовательностей, если известно, что они неубывающие или невозрастающие. Этот метод с успехом использовался для интерполяции накопленных частот в алгоритме прогноза развития древостоев по материалам перечета деревьев по ступеням толщины при определении площадей сечения отдельных деревьев в древостое [2].

Заключение. Рассмотренный в данной работе метод актуализации лесного фонда по таблицам классов возраста с использованием интерполяции позволит повысить точность выполнения прогнозов возрастной структуры лесов. Предлагаемая методика интерполяции может быть использована для аппроксимации различных зависимостей, для которых известно, что они являются неубывающими или невозрастающими.

Литература

1. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: Наука. 1989. — 432 с.
2. Разработать биогеофизическую теорию конкуренции растений в древостое за ресурсы среды: науч. отчет. — Минск, 2005. — 84 с.