

В.Е. Ермаков, канд.с-х.наук,
В.Т. Слобода, ассист.
(БТИ)

ОБОСНОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРИЕМОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ ЕСТЕСТВЕННОГО ИЗРЕЖИВАНИЯ ЧЕРНООЛЬХОВЫХ ДРЕВОСТОЕВ

В связи с тем что в зоне с дефицитом спелых древостоев все большее значение приобретает промежуточное пользование и все больше древостоев охватывается уходом, весьма актуально изучение процессов их изреживания в возрасте от момента формирования до главной рубки. Имеющиеся на этот счет исследования затрагивают преимущественно хвойные и твердолиственные древостои. В БССР расположена основная сырьевая база ольхи черной [1], условия эксплуатации которой существенно улучшились после проведения в республике гидролесомелиоративных работ. В настоящее время начался процесс вовлечения в промежуточное пользование ранее труднодоступных участков черноольшанников с ненарушенной естественной структурой древостоев. Математическое описание процессов естественного изреживания древостоев необходимо для уточнения на его основе нормативных показателей, регулирующих промежуточное пользование по полноте и запасу, и выработки подобных нормативов по числу деревьев на единице площади. Для ольсов требование нормирования изреживания при уходе по числу стволов определяется особенностями мест их произрастания, где в ряде случаев нормально развивающийся и полностью использующий возможности среды древостой может вообще не достигать сомкнутости полога, характерной для участков с несколько более благоприятными условиями [2]. Непосредственному применению опытных данных для указанных целей должна сопутствовать выработка принципов их обобщения, причем некоторые приемы математического описания процессов естественного изреживания черноольховых древостоев могут быть обоснованы уже при анализе таблиц хода роста. В качестве исходных для такого анализа были избраны таблицы хода роста черноольховых насаждений Белоруссии, разработанные Институтом экспериментальной ботаники АН БССР [2]. Полученный нами по коренным типам ольсов экспериментальный материал подтверждает высокое качество указанных таблиц и правомерность выработки на их основе математических зависимостей, характеризующих верхнюю границу численности деревьев на единице площади в определенных условиях произрастания в зависимости от времени, прошедшего с момента формирования древостоя. Построение подобной границы

максимальной численности, превышение которой в определенных условиях произрастания маловероятно, создаст предпосылки для перехода к решению оптимизационных задач.

Рассмотрим таблицы хода роста как базирующуюся на обобщенных опытных данных теоретическую модель развития древостоя при относительно постоянных амплитудах и периодах колебаний уровней воздействия как благоприятных, так и неблагоприятных факторов внешней среды. Предположение об усредненном учете влияния экзогенных факторов в указанных таблицах позволяет ожидать выявления связей между параметрами, характеризующими внутреннюю динамику развития древостоя, при анализе процесса естественного изреживания; отличия же в ходе изреживания по каждой группе представленных в таблицах ольсов связывать со спецификой комплекса факторов условий их произрастания. В этом аспекте таблицы, построенные на естественной основе (по типам, или по группам типов леса) более пригодны для дальнейшего анализа, так как позволяют определить в природе эквивалентные им по комплексу фактора участка, не накладывая предварительных ограничений на связь числа деревьев на единице площади с прочими таксационными параметрами древостоя. Отметим, что при анализе таблиц хода роста, построенных с применением элементов метода указательных насаждений, имеются достаточные основания для принятия на первом этапе положения о статистической независимости наблюдаемого числа деревьев по табличным интервалам времени. При этом условии продолжительность существования любого дерева в древостое t можно считать случайной величиной и изучать плотность распределения продолжительности существования $f(t)$ как исчерпывающую характеристику этой случайной величины. Для выяснения вида $f(t)$ возможно применение к табличным данным методов оценивания по усеченной выборке. Для табличного периода изменения времени $0 < t < \infty$ могут быть применены математические методы теории надежности. Измерения всех таксационных показателей, характеризующих возрастную динамику древостоя, производятся на фоне уменьшения числа деревьев на единице площади с ростом t . Поэтому даже при широких предположениях относительно вида исходного распределения продолжительности существования с плотностью $f(t)$ возможен ввод следующих характеристик процесса естественного изреживания:

1) вероятность отпада дерева на произвольно малом промежутке времени Δt , между моментами времени t и $t + \Delta t$

$$dF = f(t)\Delta t; \quad (1)$$

2) вероятность существования дерева в течение времени t (или вероятность отпада дерева после достижения указанного времени)

$$F(t) = \int_t^{\infty} f(t) dt; \quad (2)$$

3) интенсивность отпада

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{F(t)}. \quad (3)$$

Функция $f(t)$ характеризует частоту отпада, т.е. показывает, какая доля от начального числа деревьев N_0 переходит в отпад в единицу времени после момента $t \geq t_0$ (для малых единиц времени). Функция $\lambda(t)$ характеризует долю от растущих в момент t деревьев, которая перейдет в отпад в единицу времени после момента t . Для малых промежутков времени очевидна связь $\lambda(t)$ с процентом отпада. Последний может быть вычислен непосредственно по таблицам хода роста.

Предполагая, что вероятность бесконечно длительного существования для ольхи черной равна нулю, из выражения (2) получим

$$\frac{dF}{dt} = -f(t) \quad (4)$$

и из (3) и (4)

$$\frac{dF}{F(t)} = -\lambda(t) dt. \quad (5)$$

Учитывая, что в исходный момент времени t_0 $F(t_0) = 1$, интегрируя выражение (5), получим

$$F(t) = \exp \left[- \int_{t_0}^t \lambda(t) dt \right]. \quad (6)$$

Уравнения (2), (3), (4) и (6) дают связь функций $f(t)$, $F(t)$ и $\lambda(t)$, причем достаточно выяснения вида любой из них для определения остальных двух. Качественный анализ формы $\lambda(t)$ на основании таблиц хода роста показывает, что наиболее пригодны для дальнейшего исследования логарифмически-нормальное распределение, распределение Коши и, начиная с момента кульминации прироста по высоте, распределение Парето. Для выбора вида распределения рассматривались условия уменьшения значений $\lambda(t)$ с ростом t и наличия точки максимума соответствующей $\lambda(t)$ кривой при условии существования функции $\lambda(t)$ по обе стороны t_{\max} . Понятно, что для распределения Парето последнее условие не выполняется.

На основании упорядоченного ряда наблюдений, представленного в таблицах хода роста, возможно также выделение информации о процессе естественного изреживания, содержащейся в некоторых порядковых статистиках, в частности в статистиках экстремальных значений. Отметим, что в этом случае исходное положение о статистической независимости табличных данных иногда не является обязательным.

Примем за исходное определение [3] и будем считать нормальным такое насаждение, которое полностью использует все природные возможности, а также и то, что в нормальном насаждении теоретически нет недостающих деревьев, которыми можно заполнить свободное пространство. Устойчивость конкретного насаждения в таком состоянии на данном этапе не рассматривается. Таким образом, таблицы хода роста нормальных древостоев характеризуют максимально возможное число деревьев $N(t)$, доживающих до определенного возраста $t = 5, 10, 15 \dots$ лет из исходной численности N_0 .

Изучим формулу асимптотической функции распределения наибольших значений (7) — двойное экспоненциальное распределение первого типа [4].

Согласно [4], [5], исходными здесь могут быть экспоненциальное, нормальное, логарифмическое-нормальное, гамма-распределение, "Хи-квадрат" в некоторые менее применяемые в статистических исследованиях распределения "генеральной совокупности". В общем случае распределение вероятностей порядковых статистик связано с исходным распределением, но не повторяет его.

Формула распределения

$$\Phi(x) = \exp(-e^{-y}). \quad (7)$$

Плотность распределения

$$G(x) = a_n \exp(-y - e^{-y}). \quad (8)$$

Приведенное экстремальное значение

$$y = a_n(x - u_n), \quad (9)$$

где u_n — характеристическое наибольшее значение; a_n — экстремальная интенсивность.

Число деревьев, доживающих до определенного возраста, в таблицах хода роста естественным образом упорядочено по убыванию, в то время как статистика экстремальных значений обычно оперирует данными, расположенными в порядке возрастания. Формула (10) учитывает указанный характер расположения данных:

$$F(y) = ce^{-y}, \quad (10)$$

здесь $c < 1$ — постоянный коэффициент, определяемый из условия усечения распределения. Сравним формулу (10) с общей формулой естественного изреживания (11), полученной Г.Ф. Хильми [6] из иных теоретических предположений:

$$N(t) = N_k \left(\frac{N_0}{N_k} \right)^e e^{-a(t-t_0)}, \quad (11)$$

где N_k — предельное число стволов на единице площади (предельная густота) при неограниченном увеличении возраста насаждения t ; N_0 — начальная густота в возрасте t_0 , принятом за исходный; a — константа самоизреживания.

Для перехода к функции, близкой по форме к некоторому усеченному распределению, разделим обе части уравнения (11) на N_0 и, приняв $P(t) = \frac{N(t)}{N_0} \leq 1$; $a = \frac{N_0}{N_k} > 1$; $b = \ln\left(\frac{N_0}{N_k}\right) > 0$, получим выражение (12):

$$P(t) = \frac{1}{a} e^{be^{-a(t-t_0)}} \quad (12)$$

Отметим совпадение выражений (10) и (12) с точностью до констант $a^{-1} < 1$, b , c , появление которых объясняется различием условий приведения переменных, усечения распределения (7) и заложенной в формуле (11) вероятностью бесконечно длительного существования части деревьев

N_k в древостое. Вероятность бесконечно длительного существования также может быть изучена с применением порядковых статистик [7], но в данном случае в отношении черноольховых древостоев принятие $N_k \neq 0$ для любого t было бы необоснованным. Г.Ф. Хильми [6] отметил ограниченную применимость формулы (11) к древостоям лиственных пород (березовым и осиновым). Поэтому целесообразно, с одной стороны, ограничить время развития древостоя, для которого формулы типа (10), (11) достаточно точно могут описывать процесс естественного изреживания черноольшанников (как это и было сделано во введении данной статьи), и, с другой — наметить возможность применения для аппроксимации табличных данных асимптотических функций распределения наибольших значений второго и третьего типов.

В ы в о д ы. 1) Представленные в таблицах хода роста виртуальные процессы естественного изреживания черноольховых древостоев могут быть описаны при помощи математического аппарата, базирующегося на вероятностных основаниях.

2) При описании процессов естественного изреживания нормальных черноольховых древостоев целесообразно применение порядковых статистик, в частности статистик экстремальных значений.

3) Избранные приемы математического описания процессов естественного изреживания особенно перспективны в отношении ольхов с учетом того, что эта формация до настоящего времени оказалась наименее подверженной антропогенному воздействию.

Л и т е р а т у р а

1. Ю р к е в и ч И.Д., Г е л ь т м а н В.С. География, типология и районирование лесной растительности. — Минск, 1965. — 228 с. 2. Ю р к е в и ч И.Д., Г е л ь т м а н В.С., Л о в ч и й Н.Ф. Типы и ассоциации черноольховых лесов. — Минск, 1968. — 376 с. 3. А н т а н а й т и с В.В. Современное направление лесоустройства. — М., 1977. — 280 с. 4. Г у м б е л ь Э. Статистика экстремальных значений. — М., 1965. — 450 с. 5. О н ж е. Статистическая теория экстремальных значений (основные результаты). — В кн.: Введение в теорию порядковых статистик. М., 1970, с. 61–93. 6. Х и л ь м и Г.Ф. Теоретическая биогеофизика леса. — М., 1957. — 206 с. 7. Г у м б е л ь Э. Статистическое оценивание предела выносливости как приложение теории экстремальных значений. — В кн.: Введение в теорию порядковых статистик. М., 1970, с. 369–388.

УДК 630*524

В.Ф. Багинский, канд.с.-х.наук
(БелНИИЛХ)

ТИПЫ РОСТА СОСНЫ И ЕЛИ В СОСНОВО-ЕЛОВЫХ ДРЕВОСТОЯХ БЕЛОРУССИИ

Сосново-еловые древостои занимают в Белоруссии 4,4% от лесопокрываемой площади и размещаются в основном на свежих и влажных суглинистых и супесчаных почвах. Впервые они были описаны Ю.Д. Сироткиным [1]. В