

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО И НЕМАГНИТНОГО ТЕЛ В НЕЛИНЕЙНО НАМАГНИЧЕННОЙ ЖИДКОСТИ

Analytical methods the interaction of a fixed cylindrical magnet and nonmagnetic body in a magnetic fluid is investigated.

Введение. На тела, взвешенные в магнитной жидкости (МЖ), действуют силы магнитного происхождения, которые могут превышать силу Архимеда в сотни раз. Этот эффект находит применение в гидростатических опорах, сепараторах, различных трибологических системах. Теоретической основой для проектирования этих устройств является гидростатика магнитных жидкостей.

В общем случае, согласно [1–3], выражение силы, действующей на немагнитное тело с площадью поверхности S , погруженное в магнитную жидкость, имеет вид

$$F = - \oint_S \left[p + \frac{1}{2} \mu_0 (Mn)^2 \right] \mathbf{n} dS, \quad (1)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к участку поверхности dS .

Магнитожидкостное давление, входящее в подынтегральное выражение (1), определяется

$$p = \mu_0 \int_{H_0}^H M(H) dH. \quad (2)$$

Второе слагаемое в выражении (1) – магнитный скачок давления на границе тела, обусловлено скачком максвелловских напряжений при переходе через поверхность тела.

При вычислении (1) и (2) намагниченность магнитных жидкостей удобно описывать дробно-линейной зависимостью:

$$M = M_s H / (H + H_h), \quad (3)$$

где M_s – намагниченность насыщения, $H_h = M_s / \chi$ – поле половинного намагничивания, χ – магнитная восприимчивость жидкости, соответствующая начальному участку кривой намагничивания $M = \chi H$ [4].

Задача легко решается, если размеры тела малы по сравнению с характерным размером неоднородности поля. Если тело не является малым в указанном выше смысле, выталкивающая сила зависит от геометрических факторов. К настоящему времени закономерности этих зависимостей разработаны недостаточно.

Целью данной работы явилось изучение зависимости выталкивающей магнитной силы от

геометрических параметров немагнитного тела и источника магнитного поля.

Рассмотрим взаимодействие цилиндрического магнита радиусом R_2 с немагнитным цилиндрическим телом радиусом R_1 в магнитной жидкости с малой магнитной восприимчивостью ($\chi < 1$). В случае внутреннего взаимодействия магнит плавает внутри немагнитного полого цилиндра, заполненного намагничивающейся жидкостью (рис. 1), при внешнем взаимодействии оба тела взвешены в неограниченном объеме магнитной жидкости (рис. 2). Оси тел параллельны, но смещены на расстояние r_0 .

Магнит однородно намагничен перпендикулярно оси, его намагниченность равна M_f . Полагаем, что длина тел значительно больше их диаметров, так что геометрию задачи считаем плоской. В силу соображений симметрии сила взаимодействия будет иметь только x -составляющую.

Распределение напряженности поля, создаваемого длинным поперечно намагниченным цилиндром в намагничивающейся среде

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2(\mathbf{Pr})\mathbf{r}}{r^4} - \frac{\mathbf{P}}{r^2} \right), \quad P = \frac{\pi R^2 M_f}{1 + \chi/2}, \quad (4)$$

где $\mathbf{P}$ – дипольный момент на единицу длины цилиндра; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра диполя в точку наблюдения [5].

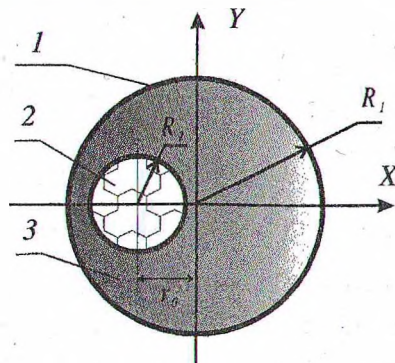


Рис. 1. Внутреннее взаимодействие:
1 – втулка; 2 – шип; 3 – магнитная жидкость

Присутствие немагнитного тела искажает первичное распределение поля, так что результирующее поле будет равно сумме пер-

вичного и вторичного (индуцированного неоднородностью среды, связанной с наличием немагнитного тела вблизи источника) полей. Уровень искажений определяется магнитной восприимчивостью жидкости. При малых значениях этого параметра искажением первичного магнитного поля, а также магнитным скачком давления на границе тела можно пренебречь.

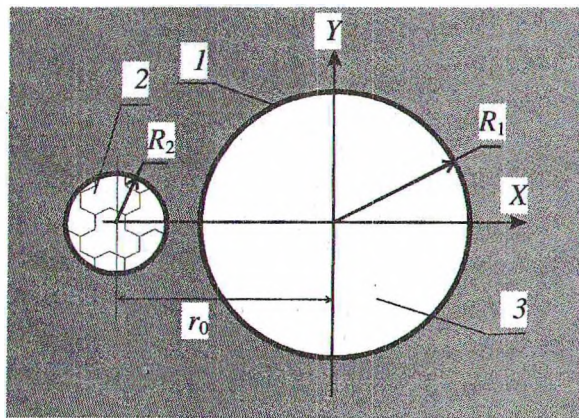


Рис. 2. Внешнее взаимодействие:
1 – втулка; 2 – шип; 3 – магнитная жидкость

Для удобства анализа результатов решения задачи введем ряд параметров: p_h – зависящее от рода жидкости характеристическое давление, которое согласно (2), (3) для линейно намагничивающейся жидкости выражается

$$p_h = \frac{1}{2} \mu_o \chi H_h^2, \text{ а намагниченной до насыщения}$$

жидкости комплексом – $p_h = \mu_o M_s H_h$;

$\frac{H}{H_h} = N \cdot h$ – безразмерная напряженность

поля; $N = \frac{H_*}{H_h}$ – параметр нелинейности кри-

вой намагничивания; $h = \frac{H}{H_*} = \frac{R_2^2}{r^2}$ – безраз-

мерное распределение модуля напряженности поля, нормированное на единицу;

$$H_* = \frac{P}{2\pi r^2} = \frac{M_f}{(2+\chi)} \text{ – характерный масштаб}$$

напряженности поля; $b = R_2/R_1$ и $a = r_0/R_1$ –

обезразмеренные отношения соответственно радиуса магнита и смещения к радиусу немагнитного тела. Данная задача допускает обобщение случаев внутреннего и внешнего взаимодействий [6, 7]. Область изменения параметров: $0 < a < 1$, $-1 < b < 0$, $a < 1 + b$ – для внутренней задачи; $1 < a < \infty$, $0 < b < \infty$, $a > 1 + b$ – для внешней задачи.

1. Модель для линейно намагничивающейся жидкости. Сила, действующая на магнит в линейно намагничивающейся жидкости ($M = \chi H$) равна

$$F = -p_h N^2 \oint \frac{1}{2} h^2 n dS = p_* \pi 2 R_2 l f^{(1)} = \\ = p_* \pi 2 R_1 l b f^{(1)}, \quad p_* = p_h N,$$

$$f^{(1)} = -\frac{b^3}{2\pi} \oint \frac{R_1^4}{2r^4} \frac{n dS}{R_1 l} = \frac{\Phi}{N^2}. \quad (5)$$

Здесь $f^{(1)}$ удельная (отнесенная к площади продольного сечения магнита $S = 2R_2 l$) сила, действующая на магнит, $b f^{(1)}$ – на немагнитное тело, $dS = R_1 d\varphi dz$, $r^2 = R_1^2 (1 + a^2 - 2a \cos \varphi)$. В соответствии с выбором направления оси x $n_x = -\cos \varphi$ для внутренней задачи, $n_x = \cos \varphi$ для внешней задачи.

В этом случае модуль силы магнит-немагнитного взаимодействия описывается одинаковой формулой для обоих видов расположения тел:

$$f^{(1)} = \frac{ab^3}{(a^2 - 1)^3}. \quad (6)$$

При переходе от внутреннего расположения тел к внешнему проекция силы изменяет знак, поскольку качественно изменяется характер взаимодействия центров тел: при внутреннем расположении центры тел притягиваются и соосное расположение цилиндров является положением устойчивого равновесия, при внешнем – отталкиваются.

При внутреннем расположении тел, когда $a \leq 0,1$ ($b \geq 0,9$) сила $f^{(1)}$ прямо пропорциональна смещению – $f_0^{(1)} = b^3 a$, т.е. является квазиупругой. Для внешнего расположения в области $a \geq 11$ ($b \geq 10$) – обратно пропорционально 5-й степени смещения $f_\infty^{(1)} = b^3 a^{-5}$. Расхождения значений $f_0^{(1)}$, $f_\infty^{(1)}$ и (6) на границах областей a составляют соответственно $\epsilon f_0^{(1)} \leq 1,5\%$ и $\epsilon f_\infty^{(1)} \leq 2,5\%$.

Наибольшее значение $f^{(1)} = f_m^{(1)}$ достигается в момент контакта цилиндров. При внутреннем взаимодействии зависимость $f_m^{(1)}$ от b имеет максимум (рис. 3, кривая 1). Функцию $f_m^{(1)}(b)$ будем называть удельной несущей способностью магнита, ее максимум – пределом. Данная функция имеет вид

$$f_m^{(1)} = \frac{(1+b)}{(2+b)^3}. \quad (7)$$

Формула (7) и модель [5] для значений $\chi < 0,1$ дают тождественные результаты. Из условия экстремума $\frac{df_m^{(1)}}{db} = 0$ находим оптимальное отношение

радиусов $b_* = -0,5$ и значение предела удельной несущей способности магнита $f_m^{(1)}(-0,5) = f_*^{(1)} = 0,148$. В размерной форме при внутреннем расположении тел выражение предела несущей способности магнита имеет вид

$$F_{\max} = 0,148 \cdot 2\pi p_h N^2 (2R_2 l). \quad (8)$$

Удельная несущая способность немагнитного цилиндра $bf_m^{(1)}$ представлена на рис. 4 кривой 1. В отличие от функции $f_m^{(1)}$ она имеет два экстремума – при внутреннем (*in*) и внешнем (*ex*) расположении цилиндров. Предел удельной несущей способности немагнитного цилиндра находим из условия экстремума:

$$\frac{d(bf_m^{(1)})}{db} = 0 \Rightarrow b_* = \begin{cases} b_*^{\text{in}} = -0,732 \\ b_*^{\text{ex}} = 2,732, \end{cases}$$

$$bf_*^{(1)} = \frac{b_*(1+b_*)}{(2+b_*)^3} = \begin{cases} -0,096 \\ 0,096. \end{cases}$$

Таким образом, предел несущей способности немагнитного цилиндра одинаков для обоих видов расположения тел и в размерном виде имеет выражение

$$F_{\max} = \mp 0,096 \cdot 2\pi p_h N^2 (2R_1 l). \quad (9)$$

В (9) и далее знак «-» соответствует внутреннему контакту, «+» – внешнему.

2. Модель для намагниченной до насыщения жидкости. Сила, действующая на магнит в намагниченной до насыщения жидкости ($M = M_s$).

$$F = -p_h N \oint \frac{R_2^2}{r^2} n dS = p_* \pi 2R_2 l f^{(2)} = \quad (10)$$

$$= p_* \pi 2R_1 l b f^{(2)}, \quad p_* = p_h N,$$

$$f^{(2)} = -\frac{b}{2\pi} \oint \frac{R_1^2}{r^2} \frac{n dS}{R_1 l} = \frac{\phi}{N}.$$

Обобщенное решение внутренней и внешней задач имеет вид

$$f^{(2)} = \frac{ba}{a^2 - 1} E(a), \quad (11)$$

$$E(a) = \frac{2}{1+a^2 + |1-a^2|} = \begin{cases} 1, & a < 1 \\ a^{-2}, & a > 1 \end{cases}$$

Функцию $E(a)$ определим как функцию внешнего расположения тел, поскольку при внутреннем расположении она равна 1. При внутреннем расположении тел в области $a \leq 0,1$ сила $f_0^{(2)} = ba$ также как и $f^{(1)}$ является квазиупругой; при внешнем, когда $a \geq 1$ – обратно пропорциональна кубу смещения $f_{\infty}^{(2)} = ba^{-3}$. Расхождение $f_0^{(2)}$, $f_{\infty}^{(2)}$ с (11) на границах областей a не превышает 1%.

Удельная несущая способность магнита при внутреннем и внешнем контактах имеет выражение

$$f_m^{(2)} = \begin{cases} \frac{1+b}{2+b}, & a < 1 \\ \frac{1}{(1+b)(2+b)}, & a > 1. \end{cases} \quad (12)$$

Максимум $f_{\max}^{(2)} = f_m^{(2)}|_{b \rightarrow 0} = f_*^{(2)} = 1/2$ достигается при взаимодействии цилиндрического магнита с плоской немагнитной поверхностью (рис. 3, кривая 7). При изменении b от -1 до 0 (внутренний контакт) она монотонно возрастает от 0 до $1/2$, при изменении b от 0 до ∞ (внешний контакт) – монотонно убывает от $1/2$ до 0 . Следует отметить, что с уменьшением параметра b достижение предела насыщения становится проблематичным. При $b \rightarrow 0$ магнитное насыщение жидкости должно быть достигнуто во всем пространстве, что невозможно.

В размерном виде предел несущей способности магнита составит

$$F_{\max} = \frac{1}{2} \pi p_h N (2R_2 l). \quad (13)$$

Удельная несущая способность немагнитного цилиндра $bf_m^{(2)}$ представлена на рис. 4 кривой 7. Условия экстремума $\frac{d(bf_m^{(2)})}{db} = 0$

приводят к конечным значениям оптимального отношения радиусов b_* цилиндров и предела несущей способности $bf_*^{(2)}$:

$$b_* = \begin{cases} b_*^{\text{in}} = -0,5858, \\ b_*^{\text{ex}} = 1,414; \end{cases} \quad (14)$$

$$bf_*^{(2)} = \begin{cases} \frac{b_*(1+b_*)}{(2+b_*)} = -0,1716, \\ \frac{b_*}{(1+b_*)(2+b_*)} = 0,1716. \end{cases}$$

В размерном виде предел несущей способности немагнитного цилиндра, как и в первом

случае, для обоих видов расположения тел определяется общей зависимостью

$$F_{\max} = \mp 0,1716\pi p_h N(2R_2 l). \quad (15)$$

Обобщенный результат двух моделей определяет диапазон изменения экстремальных характеристик.

3. Модель для нелинейно намагничивающейся жидкости. Сравнение моделей 1 и 2 показывает, что зависимости силы от магнитных и геометрических параметров в слабых и сильных полях разделяются. Имеется переходный диапазон полей, в котором характер зависимости силы от геометрических параметров существенно меняется при изменении интенсивности поля.

Рассмотрим общий случай, когда жидкость намагничивается по нелинейному закону, сила, действующая на магнит, имеет вид

$$F_x = -\mu_0 M_s H_h l \oint (Nh - \ln(1 + Nh)) n_x dS = p_h \pi 2R_2 l \phi, \quad (16)$$

$$\phi = \frac{a}{b} \left(N' - 1 + \frac{1 + a'}{N' + a' + \sqrt{1 + 2N'a' + N'^2}} \right) E(a),$$

$$a' = \frac{1 + a^2}{|1 - a^2|}, \quad N' = \frac{Nb^2}{|1 - a^2|}.$$

Зависимость (16) трансформируется в области слабых полей ($N \ll 1$) $\frac{\phi}{N^2} \rightarrow f^{(1)}$, в области сильных полей ($N \gg 1$) $\frac{\phi}{N} \rightarrow f^{(2)}$.

Сила, действующая на немагнитное тело

$$F = p_h 2\pi R_1 l b \phi. \quad (17)$$

Функционалы ϕ , $b\phi$ можно рассматривать как безразмерное давление.

На рис. 3, 4 представлено сравнение удельной несущей способности для магнита, $\phi^{(1)} \equiv b\phi_m / N^2$, $\phi^{(2)} \equiv \phi_m / N$, немагнитного тела $b\phi^{(1)} \equiv b\phi_m / N^2$, $b\phi^{(2)} \equiv b\phi_m / N$, рассчитанное по (16) с обоими предельными случаями – постоянной магнитной восприимчивости $f_m^{(1)}$, $b f_m^{(1)}$ и постоянной намагниченности $f_m^{(2)}$, $b f_m^{(2)}$.

Видно, что приближения для постоянной восприимчивости и намагниченности уже при сравнительно невысоких значениях N начинают давать заметно завышенные результаты. Так, $f_m^{(1)} > \phi_m / N^2$ при $N > 0,1$ и $f_m^{(2)} > \phi_m / N$ при $N < 1000$ составляют более 5%.

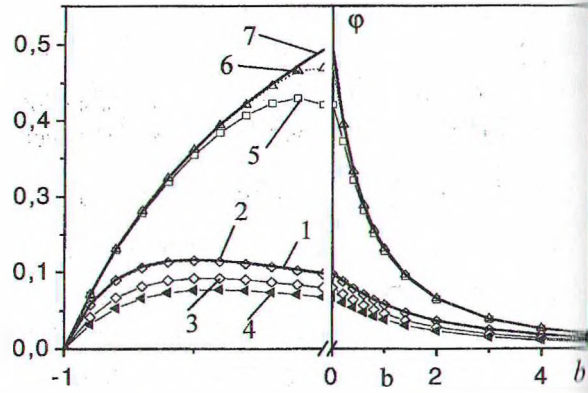


Рис. 3. Зависимость несущей способности магнита от параметра b : 1 – $f_m^{(1)}$ (модель линейного намагничивания); 2 – ϕ_m / N^2 ($N = 0,025$); 3 – ϕ_m / N^2 ($N = 0,5$); 4 – ϕ_m ($N = 1$); 5 – ϕ_m / N ($N = 100$); 6 – ϕ_m / N ($N = 1000$); 7 – $f_m^{(2)}$ (модель постоянной намагниченности жидкости)

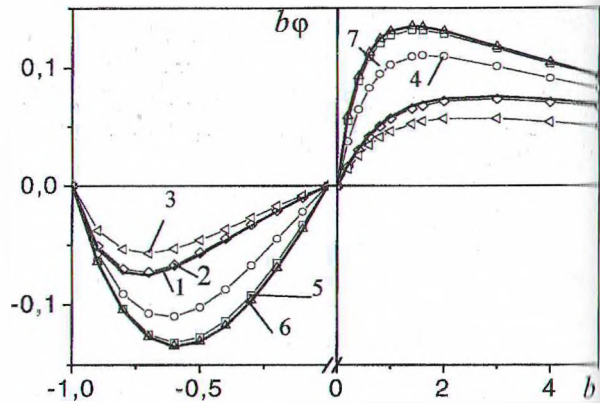


Рис. 4. Зависимость несущей способности немагнитного тела от параметра b : 1 – $b f_m^{(2)}$ (модель линейного намагничивания); 2 – ϕ_m / N^2 ($N = 0,5$); 3 – ϕ_m ($N = 1$); 4 – ϕ_m / N , ($N = 10$); 5 – ϕ_m / N ($N = 100$); 6 – ϕ_m / N , ($N = 1000$); 7 – $b f_m^{(2)}$ (модель постоянной намагниченности жидкости)

Экстремальные характеристики взаимодействия $\phi_*(N)$, $b^*(N)$ для всего диапазона полей определяются следующими зависимостями:

$$\phi_* = \begin{cases} 0,148N^2; & N < 0,1, \\ 0,098N^{1,75}; & 0,1 < N \leq 1, \\ 0,098 + 0,196(N-1)^{1,2}; & 1 \leq N < 20, \\ 6,755 + 0,433(N-20); & 20 < N < 100, \\ 41,99 + 0,474(N-100); & 100 < N \leq 1000, \\ 0,5N; & N > 1000; \end{cases}$$

$$|b_*| = \begin{cases} 0,5; & N < 0,1, \\ 0,5 - 0,077N^{0,85}; & 0,1 < N \leq 1, \\ 0,423 \left(\frac{3,8}{(N-1) + 3,8} \right)^{0,44}; & 1 \leq N \leq 1000, \\ 0; & N > 1000; \end{cases}$$

$$b\phi_* = \mp \begin{cases} 0,096N^2; & N < 0,1, \\ 0,059N^{1,75}; & 0,1 < N \leq 1, \\ 0,059 + 0,112(N-1) + 0,0043(N-1)^2; & 1 \leq N < 10, \\ 1,404 + 0,1713(N-10); & 10 \leq N \leq 1000, \\ 0,1716N; & N > 1000; \end{cases}$$

$$|b_*^{in}| = \begin{cases} 0,732; & N < 0,1, \\ 0,732 - 0,035N; & 0,1 < N \leq 1, \\ \frac{0,586(N-1) + 3,834}{(N-1) + 5,5}; & 1 \leq N \leq 1000, \\ 0,586; & N > 1000; \end{cases}$$

$$|b_*^{ex}| = \begin{cases} 2,732; & N < 0,1, \\ 2,732 - 0,431N^{0,77}; & 0,1 < N \leq 1, \\ \frac{1,418(N-1) + 8,974}{(N-1) + 3,9}; & 1 \leq N \leq 1000, \\ 1,414; & N > 1000. \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации $\epsilon_\phi \leq 2\%$.

Значения N разделяют весь диапазон полей на три области. В области малых полей зависимость $\phi_*(N)$ точнее описывается параболой, которая в переходной области разворачивается в прямую линию, что соответствует достижению сильных полей.

Значения оптимального отношения радиусов, при которых безразмерное давление на поверхность магнита и немагнитного тела максимально, не совпадают. Кроме того, функционал ϕ_m в отличие от $b\phi_m$ имеет максимум ϕ_* только при внутреннем расположении тел. С увеличением напряженности магнитного поля оптимальное отношение радиусов

уменьшается. Для ϕ_* параметр b_* изменяется от 0,5 до 0, для $b\phi_*$ – от 0,732 до 0,586 при внутреннем расположении тел и от 2,732 до 1,414 – при внешнем.

Достоверность каждого из трех аналитических решений задач подтверждена численным расчетом уравнений (5), (11), (17) с помощью компьютерного математического пакета MathCad 11.

Литература

1. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. – М.: ИВТАН СССР, 1985. – 188 с.
2. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. – М.: Химия, 1989.
3. Bashtovoi V.G., Berkovski B.M., Vislovich A.N. Introduction to thermomechanics of magnetics fluids. // Hemisphere Publ. Corp. – 1988. – 216 p.
4. Вислович А.Н. Феноменологическое уравнение статического намагничивания // Магнитная гидродинамика. – 1990. – № 2. – С. 54–60.
5. Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. – Рига: Зинатне, 1989. – 386 с.
6. Вислович А.Н., Гаранин В.Н., Бирич В.В. Внешнее и внутреннее взаимодействие сферических тел в магнитной жидкости // 10-я Международная Плесская конференция по магнитным жидкостям. – Плес, 2002. – С. 215–220.
7. V. Dudarev, V. Garanin, A. Vislovich Interaction of magnets and nonmagnetic bodies in magnetic fluid // Book of Abstracts. Ninth international conference on magnetic fluid. – Brasilia, 2004. – P. 158–160.