

### III. ТАКСАЦИЯ И ЛЕСОУСТРОЙСТВО

УДК 630\*0.6

В.Е.ЕРМАКОВ, канд. с.-х.наук,  
В.Т.СЛОБОДА (БТИ)

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЧИСЛА ДЕРЕВЬЕВ В ЧЕРНООЛЬХОВЫХ ДРЕВОСТОЯХ

Построение модели возрастного изменения численности в ольсах является необходимым этапом математического описания динамики их продуктивности и товарной структуры. Очевидна актуальность разработки такого описания, ориентированного на обеспечение возможности эффективного учета, прогноза и контроля использования ресурсов черноольховых древостоев БССР, имеющих в качестве сырьевой базы данного древесного вида общесоюзное значение. Существенной особенностью коренных типов черноольшанников как объекта моделирования является более сложная, чем в древостоях иных пород, форма связи показателей густоты и средних размеров деревьев. Даже при прочих равных условиях число деревьев на единице площади зависит в коренных ольсах от обводненности и выраженности микрорельефа [1]. Для большинства черноольшанников характерна неоднородность древостоя по происхождению [2] и изменение во времени типа размещения деревьев на площади, вызванное сокращением числа стволов в порослевых группах. В принятых при теоретико-вероятностном подходе обозначениях [3] это изменение качественно можно охарактеризовать как приближение от суперпозиции пятнистого и случайного типов размещения деревьев в молодняках к случайному в спелых древостоях. Многообразие факторов, определяющих долю участия в древостое экземпляров порослевого или семенного происхождения, обуславливает размытость количественных характеристик начальных условий процесса изреживания. Ясна поэтому целесообразность применения математических методов, допускающих достаточно широкие предположения о начальных условиях процесса, в том числе асимптотических функций распределений экстремальных значений для моделирования естественного изреживания [4, 5]. Включение в методику моделирования совокупности "нетрадиционных" способов математического описания вызвано необходимостью учета биологоэкологических особенностей ольсов при построении концептуальной модели динамики числа деревьев.

Программа и методика, наряду со сбором экспериментального материала, предусматривали следующие разделы: 1) выбор уровня агрегирования математического описания; 2) логическое обоснование базирующихся на теоретико-вероятностных представлениях приемов описания процесса естественного изреживания [4]; 3) выявление общего вида функций, наиболее пригодных для аппроксимации характеристик процесса; 4) анализ экспериментального материала сопровождавшийся разработкой графических методов "быстрой" оценки соответствия опытных данных теоретическому распределению вероятностей [6]; 5) вычисление почти оптимальных линейных оценок параметров

избранного распределения; 6) сопоставление результатов, полученных при эксперименте с моделью на ЭВМ, с существующей нормативно-справочной информацией (НСИ); 7) разработка приемов дезагрегирования математического описания.

Предварительные требования к точности моделирования были установлены на уровне требований к принятой в лесохозяйственном производстве НСИ, представленной в большинстве случаев таблицами хода роста (ТХР). Данные о динамике числа деревьев в условиях естественного изреживания содержатся преимущественно в ТХР нормальных древостоев. С некоторыми допущениями такие ТХР можно рассматривать как заданные в табличной форме информационные модели виртуальных процессов развития древостоев при максимальных уровнях густоты. Близость к предельным данным о численности в ТХР определила асимптотический характер концептуальной модели и возможность высокоагрегированного математического описания.

Общий вид модели динамики числа деревьев в черноольховых древостоях

$$N(t) = N_0 [1 - \eta F(t)],$$

где  $N(t)$  — число растущих деревьев на единице площади к моменту времени  $t$ ;  $N_0$  — исходная численность;  $\eta < 1$  — коэффициент, учитывающий, что процесс изреживания описывается для некоторого постоянного уровня густоты.

Интерпретация  $\eta = (N_0 - N_k)/N_0$  позволяет определить  $N_k$  — предельное число деревьев — минимум, при котором еще сохраняется данный уровень густоты.  $F(t)$  — функция распределения вероятности продолжительности существования дерева в древостое, изоморфная свернутому временному ряду, который содержит накопленную сумму отпада по числу стволов. При аппроксимации характеристик изреживания в ольсах для естественных рядов развития, сформированных на типологической основе, в качестве  $F(t)$  по нашим исследованиям наиболее пригодна функция второго типа предельных распределений наибольших значений (типа Коши):

$$F(t) = \exp\left[-\left(\frac{v - \epsilon}{t - \epsilon}\right)^{\kappa}\right], \quad (1)$$

с плотностью распределения

$$f(t) = \frac{\kappa}{(v - \epsilon)} \left(\frac{v - \epsilon}{t - \epsilon}\right)^{\kappa+1} \exp\left[-\left(\frac{v - \epsilon}{t - \epsilon}\right)^{\kappa}\right], \quad (2)$$

где  $\epsilon$ ,  $v$ ,  $\kappa$  — параметры функции;  $\exp$  — обозначение экспоненты. Параметр  $\epsilon \geq 0$  интерпретируется как время начала процесса изреживания, вызванного взаимодействием деревьев в древостое.

Рассматривается  $t > \epsilon$ . Параметр  $v - \epsilon$  характеристическое наибольшее значение интерпретируется как порядковая статистика, соответствующая вероятности  $1/e \approx 0,367879$ ;  $v > \epsilon$ . Параметр  $\kappa$  определяет порядок низшего момента распределения (1), который расходится. Оценка параметров распределения при  $\kappa < 2$  несколько усложняется. Несмотря на это, существует достаточно примеров [7] непосредственного использования (1) как модели данных. Разработан ряд способов оценки [7], из которых в данном случае было использовано логарифмическое преобразование, переводящее распре-

деление типа Коши в распределение 1-го типа экстремальных значений с последующей линейной оценкой параметров [8]. Оценка получается почти оптимальной, т.е. при реализации более сложных алгоритмов вычислений может быть несколько улучшена, поскольку при статистическом описании не следует применять одну и ту же выборку, а для оценки проверки [9] в табл. 1 проведено сопоставление результатов моделирования с данными о динамике численности ТХР [2]. Требования к точности моделирования были связаны с точностью исследования высот черноольховых древостоев в ТХР (до 5%). Анализ таблицы показывает, что требования к точности приближения удовлетворяются, отклонения свыше 3% наблюдаются только в возрасте до 30 лет, после чего средний процент отклонения уменьшается в 1,5–2,5 раза. Эксперименты с математической моделью на ЭВМ показали, что наибольшие отклонения могут быть локализованы на временном интервале 15–30 лет, после чего траектории  $F(t)$  устойчиво совпадают с полученными из ТХР по накопленным суммам отпада. Причем, если считать допустимыми отклонения до 9% в молодняках, точность приближения для возраста свыше 35–40 лет может быть дополнительно улучшена, особенно значительно для спелых древостоев. В этом случае при оценке параметров  $\epsilon$  и  $v$  в качестве первого приближения может быть избрано время наибольшей скорости роста по высоте и диаметру соответственно.

Функция  $F(t)$  была получена методами частотного анализа (и последующим предельным переходом) непосредственно из обобщенной модели хода роста. На таких же условиях в модель динамики численности могут быть включены и функции, основанные на применении первого и третьего типов распределений экстремальных значений. Выбор функции  $F(t)$  в виде, зависящем от вида модели хода роста, и связь основных ее параметров с параметрами роста призваны обеспечить учет в обобщенной форме влияния на процесс изреживания древостоя ведущих факторов внешней среды. Эту же цель преследует дифференцированная по группам типов ольсов оценка параметров моделей. Поскольку ТХР как информационные модели численности отражают накопленный во времени интегральный эффект воздействия внешней среды на развивающийся древостой, а определяющими факторами для черноольшанников являются характер проточности и степень обводненности [1], отмеченная с возраста 35–40 лет, стабилизации траекторий хорошо согласуются с содержательными моделями приспособления ольхи черной к определенному режиму колебания уровня грунтовых вод [1].

Изучение схемы мелиоративных типов черноольховых лесов, разработанной Л.П.Смоляком [10], показывает, что адаптация модели применительно к этим лесам может быть осуществлена посредством линейного преобразования переменной, выбором соответствующего значения параметров и не связана с изменением вида функции (1). Подтверждает это и удовлетворительная аппроксимация моделью данных ТХР для группы кисличного и снытьевого типов ольсов: поскольку реакция древостоев на резкие отклонения некоторых факторов внешней среды на осушенных болотах такая же, как и на минеральных посевах [1]. Отметим, что влияющая на качество аппроксимации размытость характеристик процесса изреживания может возникать также и из-за объединения типов ольсов в группы. Поэтому в случае повышения требований к точности моделирования возможен переход к оценке параметров динамики

Таблица 1. Сопоставление результатов, генерируемых моделью и данных ТХР

Время	Число растущих деревьев на 1 га по группам типов ольсов											
	Крапивный				Кисличный и снытьевой				Таволговый, осоковый и болотно-папоротниковый			
	ТХР	модель	отклонение	%	ТХР	модель	отклонение	%	ТХР	модель	отклонение	%
10	8100	7879	221	2,73	8485	8471	14	0,16	—	—	—	—
15	4620	4621	-1	0,02	5235	4975	260	4,97	6515	6491	24	0,37
20	2850	2989	-139	4,88	3220	3196	24	0,75	4125	3943	182	4,41
25	2110	2120	-10	0,47	2155	2260	-105	4,87	2715	2695	20	0,74
30	1625	1614	11	0,68	1650	1714	-64	3,88	1920	2009	-89	4,64
35	1300	1296	4	0,31	1340	1367	-27	2,01	1555	1592	-37	2,38
40	1100	1085	15	1,36	1135	1132	3	0,26	1305	1319	-14	1,07
45	955	937	18	1,88	960	965	-5	0,52	1130	1129	1	0,09
50	840	831	9	1,07	835	842	-7	0,84	1000	992	8	0,80
55	746	751	-6	0,81	750	748	2	0,27	905	889	16	1,77
60	686	690	-5	0,73	685	676	10	1,46	810	809	1	0,12
65	630	642	-12	1,90	635	616	19	2,99	750	747	3	0,40
ε	0,10						3,80					
v-ε	9,85						8,29					
k	1,982						1,610					
N <sub>0</sub> - N <sub>k</sub>	11965						10360					
N <sub>0</sub>	12325						10570					

численности по типам леса без группировки. Далее могут быть применены следующие приемы дезагрегирования математического описания по отношению к функции  $F(t)$ : использование функции распределения экстремальной, но не крайней порядковой статистики; применение суперпозиции функций распределения продолжительности существования деревьев разного происхождения; использование дискретного распределения и т.д.

Исследования по приведенной выше программе позволили получить следующие основные результаты:

1. Методику построения математических моделей динамики числа деревьев черноольховых древостоев, которая допускает достаточно широкие предположения о начальных условиях процесса изреживания. Методика предусматривает учет эколого-биологических особенностей ольсов при моделировании и имеет отчетливые теоретико-вероятностные основания.

2. Для естественных рядов развития, формируемых на типологической основе, получена математическая модель, включающая новую функцию для моделирования отпада (1), которая позволяет производить аппроксимацию характеристик возрастного изменения численности в ольсах с необходимой для принятой в производстве НСИ точностью.

3. Методика позволяет включать в математическую модель не только функцию (1), но и функции, основанные на применении первого и третьего типов асимптотических распределений крайних значений, — Фишера—Типпета и Вейбулла.

4. Эксперимент с математической моделью динамики числа деревьев в черноольховых древостоях на ЭВМ и анализ полученных траекторий подтверждают выводы Л.П.Смоляка [1] о формировании у ольхи черной в возрасте до 40 лет своеобразной "привычки" к определенному характеру колебания уровня грунтовых вод.

5. Существующая схема мелиоративных типов черноольховых лесов [10] позволяет обосновать возможность применения полученной модели для мелиорированных ольсов и, следовательно, для выработки нормативов промежуточного пользования в них по числу деревьев на га.

6. Хорошая аппроксимация данных о численности в ТХР, осуществленная с помощью математической модели без применения суперпозиции функций распределения продолжительности существования деревьев разного происхождения, подтверждает теоретическое положение И.Д.Юркевича, В.С.Гельтмана, Н.Ф.Ловчего [2] о возможности достаточно точной совместной характеристики развития деревьев как семенного, так и порослевого происхождения в НСИ, имеющей типологическую основу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Смоляк Л.П. Болотные леса и их мелиорация. — Минск: Наука и техника, 1969. — 212 с.
2. Юркевич И.Д., Гельтман В.С., Ловчий Н.Ф. Типы и ассоциации черноольховых лесов. — Минск: Наука и техника, 1968. — 376 с.
3. Никитин К.Е., Швиденко А.З. Методы и техника обработки лесоводственной информации. — М.: Урожай, 1978. — 272 с.
4. Ермаков В.Е., Слобода В.Т. Обоснование некоторых приемов математического описания процессов естественного изреживания черноольховых древостоев. — В кн.: Лесоведение и лесн. хоз-во, Минск: Выш. шк., 1982, вып. 17, с. 69—73.
5. Слобода В.Т. Некоторые вопросы построения имитационных моделей роста древостоев. — В кн.: Комплексное ведение хозяйства в сосновых лесах: Тез. докл. науч.

производственного совещания. Гомель, 1982, с. 109—112. 6. С л о б о д а В.Т. Вероятностная шкала для нанесения численности. — В кн.: Сб. науч. тр. ЛитСХА. Каунас — Академия, 1983, с. 27—29. 7. Г у м б е л ь Э. Статистика экстремальных значений. — Мир: 1965. — 450 с. 8. Б л у м Г. Почти оптимальные линейные оценки параметров расположения и рассеяния. — В кн.: Введение в теорию порядковых статистик. М.: Статистика, 1970, с. 43—53. 9. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, 1978. — 832 с. 10. С м о л я к Л.П. Мелиоративные типы черноольховых лесов БССР. — Бюл. НТИ Ин-та лесн. хоз-ва, Минск, 1960, вып. 5—6, с. 29—33.

УДК 630\*566:681.31

А.Ф.КИСЕЛЕВ, О.А.АТРОЩЕНКО,  
канд-ты техн. наук (БТИ)

### МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА И ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ЕЛОВЫХ КУЛЬТУР БЕЛОРУССИИ

Таблицы хода роста и производительности насаждений издавна применяются в лесном хозяйстве. Таблицы хода роста и математические модели роста насаждений являются синонимами, хотя существуют различия в их построении.

Модели роста и производительности насаждений требуются для различных аспектов контроля и управления лесными ресурсами: таксации древостоев и прогнозирования их продуктивности; контроля уровня растущего запаса; оценки вариантов ухода за лесом и производительности условий местопроизрастания [1]. Главная цель математических моделей роста насаждений — обеспечить данными для анализа и проверки многочисленных вариантов (гипотез)

Таблица 1. Рост и продуктивность еловых культур Белоруссии

Древостой в целом									
Возраст, лет	Средняя высота, м	Средний диаметр, см	Число стволов, шт.	Сумма площадей сечений, м <sup>2</sup>	Видовое число	Запас, м <sup>3</sup>	Прирост		
							Средний, м <sup>3</sup>	Текущий, м <sup>3</sup>	%
							Ельник снытьевый		
10	4,3	3,4	5779	5,2	0,698	16	1,9	5,8	49,1
15	8,2	6,4	3506	11,2	0,575	53	4,6	10,0	29,1
20	12,1	9,4	2438	16,8	0,542	110	7,0	14,2	17,3
25	15,7	12,2	1895	22,1	0,522	182	8,9	16,8	11,5
30	18,9	14,8	1577	27,0	0,509	260	10,5	18,2	8,3
35	21,7	17,1	1371	31,4	0,499	340	11,7	18,6	6,2
40	24,1	19,2	1228	35,4	0,491	418	12,5	18,3	4,8
45	26,1	21,0	1124	38,9	0,485	493	13,0	17,5	3,8
50	27,8	22,6	1046	42,1	0,481	562	13,4	16,3	3,1