ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 514.76

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

СОВЕРШЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ГОЛОНОМИИ ТРИВИАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

Во введении указан объект исследования – алгебры голономии аффинных связностей на однородных пространствах. Определены основные понятия: инвариантная аффинная связность, тензор кручения и тензор кривизны, алгебра голономии. Целью работы является описание совершенных алгебр голономии тривиальных связностей на однородных пространствах. Рассмотрены пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований. В основной части работы приведено локальное описание трехмерных однородных пространств, на которых действует неразрешимая группа преобразований, допускающих только тривиальную аффинную связность с совершенной алгеброй голономии, что эквивалентно описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны в явном виде тензоры кривизны и сами совершенные алгебры голономии указанных связностей. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, анализа, алгебры, в общей теории относительности, в ядерной физике, физике элементарных частиц и других, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением однородных пространств и структур на них.

Ключевые слова: алгебра голономии, однородное пространство, группа преобразований, аффинная связность, тензор кривизны.

Для цитирования: Можей Н. П. Совершенные алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах неразрешимых групп Ли // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 1 (254). С. 5–9.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

PERFECT HOLONOMY ALGEBRAS OF TRIVIAL CONNECTIONS ON HOMOGENEOUS SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS

In the introduction, an object of research is indicated – the holonomy algebras of affine connections on homogeneous spaces. The basic notions, such as an invariant affine connection, torsion and curvature tensors, a holonomy algebra are defined. The aim of this work is to describe perfect holonomy algebras of trivial connections on homogeneous spaces. We have concerned the case of the unsolvable Lie group of transformations. In the main part of the work a local description of three-dimensional homogeneous spaces, admitting only trivial affine connections with the perfect holonomy algebra, on which an unsolvable Lie group of transformations acts, is given. It is equivalent to describing the corresponding effective pairs of Lie algebras. The curvature tensors and the perfect holonomy algebras of the indicated connections are described explicitly. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The results obtained can be used in the study of manifolds, as well as have applications in various fields of geometry, topology, differential equations, analysis, algebra, in general relativity, in nuclear physics, elementary particle physics, etc., since many fundamental problems in these areas related to the study of homogeneous spaces and structures on them.

Key words: holonomy algebra, homogeneous space, transformation group, affine connection, curvature tensor.

For citation: Mozhey N. P. Perfect holonomy algebras of trivial connections on homogeneous spaces of unsolvable Lie groups. *Proceedings of BSTU, issue* 3*, Physics and Mathematics. Informatics*, 2022, no. 1 (254), pp. 5–9 (In Russian).

Введение. Первое упоминание о голономии (в классической механике) датируется 1895 г. и принадлежит Г. Герцу, в математических работах понятие голономии возникло в 1923 г. у Э. Картана применительно к римановым многообразиям, каждой специальной группе голономии отвечает та или иная геометрия. Говорят, что многообразие обладает совершенной группой голономии, если вся алгебра голономии порождается только операторами кривизны. Исследования структуры кривизны многообразий с совершенной группой голономии проводились, например, в работах [1–3]. Связь совершенной группы голономии лоренцевых пространств с рекуррентными тензорными полями рассматривается, например, в источнике [4]. С описанием алгебр голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с неразрешимыми группами преобразований можно ознакомиться в работе [5], целью же данной статьи является определение, при каких условиях алгебра голономии является совершенной. В работе рассматриваются пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, $G=\overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x\in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвари-антным. *Тензор кручения* $T\in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и *тензор кривизны* $R\in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}}-\Lambda(y)x_{\mathfrak{m}}-[x,y]_{\mathfrak{m}};$$
$$R(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y]).$$

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Переформулируем теорему Вана [6] об алгебре голономии: *алгебра* Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида

$$V+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]]+\ldots,$$

где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\mid x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$. Обозначим через $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ подалгебру в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, порожденную $\{\Lambda(x);x\in\bar{\mathfrak{g}}\}$.

Многообразие обладает *совершенной группой голономии*, если алгебра голономии порождается лишь операторами кривизны.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ в базисе $\{e_1,\ldots,e_n\}$, $n=\dim\bar{\mathfrak{g}}$, причем $\{e_1,\ldots,e_{n-3}\}$ – базис $\mathfrak{g}$, а $\{u_1=e_{n-2},u_2=e_{n-1},u_3=e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нуме-рации подалгебр используем запись $d.n$, а для ну-мерации пар – запись $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. В дальнейшем, если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются дополнительные условия, то они записываются в таблице умножения, в противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$. Будем выписывать аффинную связность через $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, а тензор кривизны R – через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$. Все приведенные далее связности оказываются связ-ностями без кручения.

Пусть группа, действующая на однородном пространстве, не является разрешимой. Далее везде по умолчанию будет предполагаться, что алгебра голономии является ненулевой. Непосредственными вычислениями получаем, что полупростой группа преобразований на трехмерном однородном пространстве, допускающем только тривиальную аффинную связность с ненулевой алгеброй голономии, оказаться не может.

Теорема. *Трехмерные однородные пространства, допускающие только тривиальную аффинную связность с совершенной алгеброй голономии, такие, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *не является разрешимой, имеют следующий вид:*

2.9.12	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-e_2$	u_1	$-2u_2$	$2u_3$
e_2	e_2	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	e_2	0

u_2	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$
u_3	$-2u_3$	$-u_1$	0	e_1	0

2.1.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	$-u_2$	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	$-u_1$	0	0	e_1	0
u_2	u_2	0	$-e_1$	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

2.3.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-u_2$	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	u_2	0	0	e_1	0
u_2	$-u_1$	0	$-e_1$	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

2.3.3	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$-u_2$	u_1	0
e_2	0	0	0	0	u_3
u_1	u_2	0	0	$-e_1$	0
u_2	$-u_1$	0	e_1	0	0
u_3	0	$-u_3$	0	0	0

3.8.8	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	u_1	0	0
e_2	0	0	e_3	0	u_2	$-u_3$
e_3	$-e_3$	$-e_3$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_3	0
u_2	0	$-u_2$	0	$-e_3$	0	$2e_2-e_1$
u_3	0	u_3	$-u_1$	0	e_1-2e_2	0

4.11.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	0	0
e_2	0	0	$-e_3$	e_4	0	u_2	$-u_3$
e_3	$-e_3$	e_3	0	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-e_4$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	e_4	e_3
u_2	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_4$	0	e_2
u_3	0	u_3	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_2$	0

4.13.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	$-e_2$	0	e_4
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_3$	$-e_4$	0

4.13.3	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	e_2	0	$-e_4$
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_3	e_4	0

Совершенные алгебры голономии тривиальных связностей представлены в табл. 1.

Таблица 1

Совершенные алгебры голономии

Пара	Алгебра голономии
4.11.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & -p_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$
3.8.8 2.9.12	$\begin{pmatrix} p_2 & 0 & -p_1 \\ 0 & -2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_2 \end{pmatrix}$
4.13.2 4.13.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$
2.1.2	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.3.2 2.3.3	$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Примечание. Здесь $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с неразрешимыми группами преобразований описаны в работе [5]. Определим, при каких условиях алгебра голономии является совершенной.

Рассмотрим, например, случай 4.13, где

$$\mathfrak{g} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & z & u \\ 0 & \lambda y & y \\ 0 & -y & \lambda y \end{pmatrix} \right| x, y, z, u \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 \right\}.$$

Базис подалгебры выберем, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным – 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту. Если $\lambda \neq 0$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна (т. е. существует коммутативный идеал $\mathfrak{m}$ алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}$). Связность на этой паре, тензоры кривизны и кручения, алгебра голономии нулевые, поэтому пара не входит в рассматриваемый в работе класс. Если $\lambda = 0$, то $[u_1, u_2] = a_2 e_2$, $[u_1, u_3] = a_2 e_3$, $[u_2, u_3] = a_2 e_4$. При $a_2 = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре (связность на этой паре, тензоры кривизны и кручения, алгебра голономии нулевые). При $a_2 > 0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 4.13.2 устанавливается посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}, \pi(e_i)=e_i, i=\overline{1,4}, \pi(u_j)=a_2^{-1/2}u_j, j=\overline{1,3}$. Связность на этой паре и ее тензор кручения нулевые, тензор кривизны выписан в табл. 2.

Таблица 2

Тензоры кривизны

Пара	Тензор кривизны
4.11.2	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
4.13.2	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$
4.13.3	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$
3.8.8 2.9.12	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$
2.1.2	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.3.2 2.3.3	$\begin{pmatrix}0&\mp1&0\\\pm1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Алгебра, порожденная множеством $R(u_i,u_j)$, т. е. $V=\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\,|\,x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$, совпадает с алгеброй голономии (таким образом, группа голономии совершенна) и имеет вид, приведенный в теореме. При $a_2<0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 4.13.3. Связность на этой паре и ее тензор кручения также нулевые, тензор кривизны выписан в табл. 2. Алгебра голономии порождается лишь операторами кривизны (т. е. группа голономии совершенна) и имеет вид, указанный в теореме.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Рассмотрим теперь, например, случай 2.9.12. Тензор кривизны имеет вид, указанный в табл. 2. Алгебра, порожденная множеством $R(u_i,u_j)$, совпадает с алгеброй голономии (таким образом, группа голономии совершенна) и имеет вид, приведенный в теореме. Действительно, поскольку связность тривиальна, $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}})=\Lambda(\mathfrak{g})$, $[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]=[\Lambda(\mathfrak{g}),V]=V$, так как $\Lambda(\mathfrak{g})$ совпадает с V. В данном случае $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}=\Lambda(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$. Тензор кручения нулевой.

Других трехмерных однородных пространств с неразрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$, допускающих только тривиальную аффинную связность с совершенной алгеброй голономии, кроме указанных в теореме, нет.

Заключение. Таким образом, найдены все трехмерные однородные пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований, допускающие только тривиальную аффинную связность с совершенной алгеброй голономии, что эквивалентно описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны в явном виде тензоры кривизны и сами совершенные алгебры голономии указанных связностей.

Список литературы

1. Кайгородов В. Р. Римановы пространства. Структура кривизны пространств типа А // Изв. вузов. Математика. 1974. № 5. С. 117–127.

2. Кайгородов В. Р. Структура кривизны пространств типа В // Изв. вузов. Математика. 1975. № 1. С. 104–107.

3. Кайгородов В. Р. Римановы пространства. Рекуррентность второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1975. № 2. С. 112–115.

4. Кайгородов В. Р. Полусимметрические лоренцевы пространства с совершенной группой голономии // Гравитация и теория относительн. 1978. № 14–15. С. 113–120.

5. Можей Н. П. Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с неразрешимыми группами преобразований // Известия Гомельского государственного университета. 2018. № 6 (111). С. 81–88.

6. Wang H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle // Nagoya Math. J. 1958. № 13. P. 1–19.

References

1. Kaygorodov V. R. Riemannian spaces. Curvature structure of spaces of type A. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1974, no 5, pp. 117–127 (In Russian).

2. Kaygorodov V. R. Curvature structure of spaces of type B. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1975, no 1, pp. 104–107 (In Russian).

3. Kaygorodov V. R. Riemannian spaces. Second order recurrence. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1975, no 2, pp. 112–115 (In Russian).

4. Kaygorodov V. R. Semi-symmetric Lorentzian spaces with perfect holonomy group. *Gravitatsiya i teoriya otnositel'nosti* [Gravity and the theory of relativity], 1978, no 14–15, pp. 113–120 (In Russian).

5. Mozhey N. P. Nonzero holonomy algebras of trivial connections on homogeneous spaces with unsolvable transformation groups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta* [Proceedings of Francisk Scorina Gomel State University], 2018, no 6 (111), pp. 81–88 (In Russian).

6. Wang H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle. *Nagoya Math. J.,* 1958, no 13, pp. 1–19.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 29.10.2021