

езжей части составляют 12,023 МПа. Напряжения, полученные при испытаниях, соответствуют значению 7,35 МПа.

Значения конструктивных коэффициентов  $K$  находятся в пределах  $K=0,4-0,95$  и для всех исследованных элементов меньше 1,0, что свидетельствует о правильности теоретических предпосылок при расчете и надлежащем качестве строительства.

Фактическая жесткость конструкции оказалась выше теоретической.

Результаты испытаний показывают в основном линейную работу конструкции при легких нагрузках. При испытании тяжелой нагрузкой наблюдается некоторая нелинейность в распределении усилий между балками. После испытания конструкций максимальный остаточный прогиб составил 6,8 мм. Показатель работы конструкции при

УДК 625.731

## РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ЩИТОВ С БУМАЖНЫМ СОТОВЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

С.В.Шетько, к.т.н, заведующий кафедрой «Технологии и дизайна изделий из древесины»

А.В.Спиглазов, к.т.н.

Е.В.Наливко, аспирант, БГТУ

### Введение

Столярно-строительные изделия и детали мебели в основном изготавливаются из натуральной древесины, древесностружечных плит, древесноволокнистых плит, MDF, фанеры, имеющих существенные недостатки: для их изготовления требуются большие объемы дорогостоящего природного сырья – древесины; высокая трудоемкость, энергоемкость при изготовлении; большая материалоемкость и др.

Проблема комплексного использования древесины и снижения материалоемкости изделий может быть решена в ряде случаев путем замены традиционных материалов более совершенными новыми материалами, на изготовление которых потребуется значительно меньшее количество древесины или менее дефицитные материалы, чем древесина.

К таким материалам можно отнести облегченные щиты с бумажным сотовым наполнителем.

Облегченный щит в самом простом виде состоит из тонких внешних обшивок, связанных между собой слоем относительно легкого наполнителя. Тонкие обшивки должны быть высокопрочными и плотными материалами, так как они почти целиком воспринимают все нагрузки, приложенные к конструкции. Средний слой – менее плотный материал – служит для разделения и стабилизации тонких обшивок и сопротивляется сдвигу. При правильном выборе материалов обшивок, их толщины и параметров наполнителя (размер ячейки сот наполнителя, высота наполнителя) можно спроектировать трехслойный щит с высокой прочностью при малом весе.

Основными факторами, сдерживающими широкое использование пустотелых щитов в изделиях мебели, являются: отсутствие опытных данных для расчета оптимальной толщины щитов, отдельных показателей свойств материалов, по которым можно было бы их определить расчетным методом; отсутствие методики выбора древесных плитных материалов и бумажного сотового наполнителя, которая позволяла бы определять напряжения и деформации в щите при действии нагрузок и на их основе определять оптимальные параметры ячеистого щита, обеспечивающие его необходимую прочность и устойчивость при минимальном весе. Это можно сделать на основе анализа и оценки эксплуатационных характеристик и геометрии облегченного щита.

### Основная часть

Одной из основных форм нагружения щитов конструкционного назначения в мебельной промышленности является изгиб. Деформированное состояние элементов,

этом  $\alpha = 0,115$ . Такой показатель характерен для мостов из сталежелезобетона (по СНиП 3.06.07-86 он не должен превышать 0,15).

Фактическая грузоподъемность сооружения с учетом результатов испытаний соответствуют проектной нагрузке  $C-4$ .

### Литература

1. Официальный веб-сайт Могилевского профессионального агросотехнического колледжа.
2. СНиП 2.05.03-84\*. Мосты и трубы / Минстрой России. – М.: ГПЦПП, 1996.
3. СНиП 3.06.07-86. Мосты и трубы. Правила обследования и испытаний / Госстрой СССР. – М.: ЦИТП Госстрой СССР, 1988.

Поступила в редакцию 18.11.2009 г.

работающих на изгиб, согласно классической теории механики деформированного твердого тела, описывается дифференциальным уравнением упругой линии изогнутой балки [1, 2]:

$$y'' = \frac{M_x}{E_z I_x} \quad (1),$$

где  $y''$  – вторая производная от ординаты нейтральной оси (упругой линии) балки;  $M_x$  – изгибающий момент в сечении;  $E_z$  – модуль Юнга в направлении оси балки (при растяжении);  $I_x$  – момент инерции сечения.

Произведение  $E_z I_x = D_x$  называется жесткостью стержня при изгибе относительно оси  $x$ . Для балки, неоднородной по высоте сечения, жесткость при изгибе рассчитывают по формуле:

$$D_x = \int_A E_z y^2 dA \quad (2).$$

В случае различия в упругих характеристиках, а также геометрии слоев, в том числе и толщине, уравнение (2) имеет вид:

$$D_x = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} E_{z_i} y^2 dA_i \quad (3).$$

В некотором приближении элементы трехслойных щитов можно рассматривать как состоящие из изотропных материалов. В случае использования элементов с анизотропной структурой, например обшивки из шпона, модуль Юнга  $E_z$  в направлении оси балки зависит от ориентации волокон древесины. Если направление ориентации волокон (ось  $x_3$ ) не совпадает с осью балки  $Z$  (рис. 1), то  $E_z$  вычисляются по формуле [4]:

$$E_z(\varphi) = \left[ \frac{\cos^4(\varphi)}{E_3} + \left( \frac{1}{G_{13}} - \frac{2\mu_{13}}{E_3} \right) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + \frac{\sin^4(\varphi)}{E_1} \right]^{-1} \quad (4)$$

где  $E_3$ ,  $E_1$  – модули Юнга в направлении волокон и перпендикулярно ему;  $\mu_{13}$ ,  $G_{13}$  – коэффициент Пуассона и

модуль сдвига в плоскости обшивки  $X_1, X_2$ ;  $\Phi$  – угол между направлением волокон и продольной осью щита.

В формулах (2) и (3) для расчета жесткости балки при изгибе ордината  $Y$  отсчитывается от центральной оси сечения  $X$  (рис. 1), которая для трехслойных щитов с одинаковыми геометрическими параметрами обшивок находится в центре прямоугольного сечения. Для несимметричных структур положение оси  $X$  неизвестно, поэтому вводят произвольную ось  $X_0$  параллельную оси  $x$  (рис. 1).

Положение нейтральной оси балки можно определить исходя из предположения, что при относительной деформации  $\epsilon = Y/\rho$ , где  $\rho$  – радиус кривизны нейтральной оси, продольная сила равна нулю:

$$N = \int \sigma_x l A = \frac{1}{\rho} \int l (\bar{y} - y_x) l A = 0$$

Откуда следует формула для расчета положения нейтрального слоя:

$$y_0 = \frac{\int_A E_z \bar{y} dA}{\int_A E_z dA} \quad (5)$$

Подставив уравнение (5) в (2), получим:

$$D_x = \int_A E_z \bar{y}^2 dA - \frac{\left( \int_A E_z \bar{y} dA \right)^2}{\int_A E_z dA} \quad (6)$$

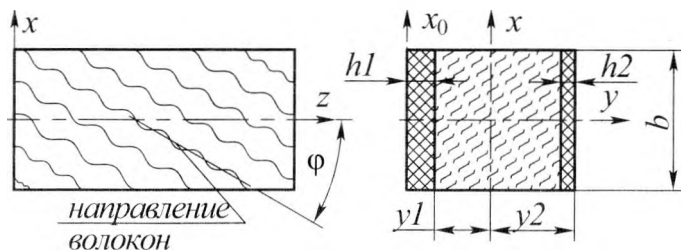


Рис. 1. Схема расположения элементов трехслойного щита.

Для слоистой структуры в частном случае с учетом однородности материала в слое после интегрирования получим:

$$D_x = \sum E_{zi} b \left( \frac{\bar{y}_i^3 - \bar{y}_{i-1}^3}{3} \right) - \frac{\left[ \sum E_{zi} b \left( \frac{\bar{y}_i^2 - \bar{y}_{i-1}^2}{2} \right) \right]^2}{E_{zi} b (\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1})} \quad (7)$$

Кроме нормальных напряжений, определяемых по жесткости конструкции  $D_x$ , между элементами трехслойного щита возникает межслойный сдвиг, влияющий на жесткость балки при изгибе.

Сдвиг между слоями обусловлен действием касательных напряжений. При поперечном изгибе касательные напряжения распределены по сечению неравномерно и в общем виде рассчитываются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{\alpha Q_y}{A}$$

где  $Q_y$  – поперечная сила;  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от формы сечения (для прямоугольника  $\alpha=1,2$ );  $A$  – площадь поперечного сечения.

Если модуль сдвига в плоскости слоя известен  $G_{xz}$ , то угол сдвига при действующих напряжениях  $\sigma$  рассчитывается по закону Гука при сдвиге:

$$\gamma = \frac{\sigma Q_y}{G_{xz} A}$$

Полный угол поворота сечения при изгибе  $\theta$  складывается из угла  $\theta_0$ , обусловленного прогибом, и дополнительного угла  $\theta_* = \gamma$  вследствие сдвиговых деформаций. Прогиб в данном случае будет определяться суммой  $y = y_0 + y_*$ . При этом выполняются следующие соотношения:

$$y_0'' = \frac{M_x}{D_x}, \quad y_*'' = -\frac{\alpha}{G_{xz} A} \frac{dQ_y}{dz}$$

Интегрируя уравнение  $y'' = y_0'' + y_*''$  находим максимальный прогиб балки длиной  $l$  прямоугольного сечения с размерами  $b$  и  $h$ :

$$y_{\max} = \frac{Fl^3}{48D_x} \left[ 1 + 1,2 \left( \frac{h}{l} \right)^2 \frac{E_z}{G_{xz}} \right] \quad (8)$$

Из формулы (8) можно получить выражение для расчета модуля упругости при изгибе с учетом межслойного сдвига:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_z} \left[ 1 + 1,2 \left( \frac{h}{l} \right)^2 \frac{E_z}{G_{xz}} \right] \quad (9)$$

Из формулы (9) видно, что для панели слоистой структуры модуль упругости при изгибе балки меньше, чем модуль Юнга  $E_z$  при растяжении-сжатии. Различия тем больше, чем меньше модуль сдвига  $G_{xz}$  и чем меньше отношение  $l/h$ .

При расчете слоистых щитов на жесткость и прочность при изгибе сначала по характеристикам структуры и свойств материала в сечении по формулам (6), (7) определяют жесткость при изгибе.

Прогибы рассчитывают, интегрируя дифференциальное уравнение упругой линии (1). В общем виде оно имеет вид:

$$y = \int \left( \int \frac{M_x(z)}{D_x(z)} dz \right) dz + C_1 + C_2$$

где  $y$  – прогиб;  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования, определяются из условия опирания балки.

Наибольшие нормальные напряжения в произвольном слое определяются по формуле:

$$\sigma_i = \frac{M_x}{D_x} y_{i \max} E_{zi} \quad (10)$$

где  $E_{zi}$  – модуль Юнга в направлении оси балки  $z$ ;  $y_{i \max}$  – наибольшая по модулю ордината точек слоя.

Касательные напряжения в слое  $i$  для балки равной ширины  $b$  равны:

$$\tau_i = \frac{Q_i}{b_i D_x} \int_0^y b E_z(y) y dy \quad (11).$$

В общем случае слой изгибаемого стержня находится в плоском напряженном состоянии и при расчетах на прочность проверяют состояние в каждом слое.

Для сотового заполнителя в качестве упругой характеристики в осевом направлении балки можно использовать осредненный по направлению модуль упругости бумаги при растяжении [3].

Вследствие низкой жесткости обшивки на изгиб и достаточно высокой податливости бумажной соты на сжатие при действии сосредоточенных нагрузок нормально поверхности щита может происходить местное смятие сотового заполнителя, а также потеря устойчивости бумажных стенок, что значительно снижает эксплуатационные свойства изделия. При воздействии нагрузки элементы обшивки взаимодействуют с сотовым заполнителем. Прогиб обшивки вызывает реакцию упругого заполнителя, пропорциональную прогибу. При изгибе трехслойных щитов из-за высокой жесткости пакета радиус кривизны нейтральной линии балки имеет большое значение и, следовательно, отклонением от плоскостности можно пренебречь ( $y/l_0 \rightarrow 0$ ). Поэтому при расчете на жесткость обшивку рассматривают как балку на упругом основании.

Для верхней обшивки (рис. 2) точка приложения силы  $F$  соответствует началу координат (центру образца  $a = 0, 5l$ ,  $l = l_0$ ), а для нижней силовое воздействие эквивалентно вертикальным реакциям в шарнирах, равным половине внешней нагрузки ( $F/2$ ,  $a = 0$ ,  $l = 0, 5l_0$ ). Общий вид уравнения упругой линии в данном случае имеет вид [1]:

$$y(z) = y_0 A_z + \frac{1}{k} \theta_0 B_z + \frac{4k^4}{\alpha} M_0 C_z + \frac{4k}{\alpha} Q_0 R_z + f(z) \quad (12).$$

где  $y_0$ ,  $\theta_0$ ,  $M_0$ ,  $Q_0$  – соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале отсчета;

$$A_z = \text{ch}(kz) \cos(kz);$$

$$B_z = \frac{1}{2} (\text{ch}(kz) \sin(kz) + \text{sh}(kz) \cos(kz));$$

$$C_z = \frac{1}{2} \text{sh}(kz) \sin(kz);$$

$$R_z = \frac{1}{4} (\text{ch}(kz) \sin(kz) - \text{sh}(kz) \cos(kz));$$

$$\alpha = \alpha_0 b.$$

$f(z)$  – влияние нагрузок, расположенных в пролете балки; для случая действия сосредоточенной силы (рис. 2) расчетное уравнение имеет вид:

$$f'(z) = \frac{4k^2}{\dot{a}} F C_{z-a}; \quad f''(z) = \frac{4k^3}{\dot{a}} F B_{z-a};$$

$$f'''(z) = \frac{4k^4}{\dot{a}} F A_{z-a}.$$

Величины  $y_0$ ,  $\theta_0$ ,  $M_0$ ,  $Q_0$  зависят от закрепления и вида нагружения и для большинства типичных схем известны. Для балки, показанной на рис. 2, формулы имеют

вид:

$$y_0 = \frac{Fk}{\dot{a}} \frac{C_l B_{l-a} - R_l A_{l-a}}{C_l^2 - R_l B_l};$$

$$\theta_0 = -\frac{Fk^2}{\dot{a}} \frac{B_l B_{l-a} - C_l A_{l-a}}{R_l B_l - C_l^2}; \quad M_0 = 0; \quad Q_0 = 0.$$

«Коэффициент постели»  $k$  для податливых балок рассчитывается по формуле:

$$k = \sqrt[4]{\frac{\dot{a}_0 b}{4D_0}} \quad (13),$$

где  $\alpha_0$  – коэффициент податливости основания, определяется экспериментально, для основных типов подложек значения определены [1];  $b$  – ширина балки;  $D_0$  – жесткость обшивки при изгибе ( $D_0 = E_z I_{x_0} = E_z \frac{bh^3}{12}$ );  $h$  – толщина обшивки.

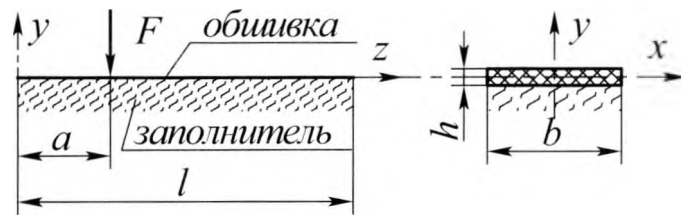


Рис. 2. Схема балки на упругом основании.

Прогиб  $y(z)$ , определяемый по формуле (12) эквивалентен абсолютной по величине деформации сжатия сотового заполнителя, что позволяет оценить величину давления сжатия, передаваемого обшивкой. Критерием работоспособности щита в данном случае является величина критического давления, при котором происходит потеря устойчивости боковых стенок соты, а следовательно – местное смятие. Распределение давления сжатия  $p(z)$  по длине образца определяется по формуле:

$$p(z) = \frac{y(z)}{h_3} E_3^{\text{сж}} \quad (14),$$

где  $h_3$  – толщина сотового заполнителя;  $E_3^{\text{сж}}$  – модуль упругости наполнителя при сжатии ( $E_3^{\text{сж}} \approx E_0$  – модуль упругости бумаги при сжатии).

Таким образом, уравнение (10) позволяет оценить напряженное состояние в материале обшивки с учетом растяжения-сжатия наиболее удаленных от нейтральной линии слоев пакета. Качество склеивания и оптимизация выбора типа клея осуществляется по величине касательных напряжений между слоями обшивки и заполнителя, рассчитываемых по формуле (11). Критерием выбора структуры сотового заполнителя (размер ячейки), является величина удельного критического давления (14).

Изложенная математическая модель оценки работоспособности трехслойных щитов при изгибе дает удовлетворительные результаты на образцах относительно больших размеров, в частности при ширине балки  $b > 2,5b_3^{\text{max}}$  ( $b_3^{\text{max}}$  – наибольшая ширина ячейки сотового заполнителя) и длине  $l_a > 15h_3$ . В большинстве случаев, расчетные значения для максимальных нагрузок на 10–15 % ниже экспериментальных (таб. 1), что объясняется идеализацией и упрощением расчетных схем по отношению к реальному объекту, а также наличием клеевой

Таблица 1. Предельная нагрузка при изгибе трехслойного щита (материал обшивок – MDF плотностью 958 кг/м<sup>3</sup>).

Толщина обшивки, мм	Размер сотовой ячейки, мм	Высота сотового пакета, мм	Экспериментальное значение усилия, Н	Расчетное значение усилия, Н
3,2 (MDF)	15	15	250	217
		25	235	208
		35	210	185
	25	15	210	192
		25	185	175
		35	152	140
	35	15	195	183
		25	170	174
		35	145	158

прослойки между элементами щита, что влияет на значение критического давления. Кроме того, модель не учитывает влияния сдвиговых напряжений в пределах толщины заполнителя на устойчивость бумажных стенок. Несмотря на данные недостатки, модель может использоваться для сравнительной оценки щитов с сотовым наполнителем различной структуры по комплексу показателей. Результаты расчета и эксперимента по определению прочности облегченного щита бескаркасной конструкции приведены в таблице 1. Исследования проводили для образцов размерами в плане 300x50 мм с различной толщиной, обусловленной высотой сотового пакета и толщиной обшивки. В качестве исходных свойств компонентов использовали опытные данные по физико-механическим характеристикам материалов, определенные по стандартным методикам.

### Заключение

В результате экспериментальных исследований установлено, что разрушение образцов при изгибе по трехточечной схеме нагружения происходит преимущественно вследствие потери устойчивости сотовым наполнителем в краевых зонах образца. При проведении расчета получено распределение давлений сжатия, действующих на сотовый наполнитель, и выявлено, что в местах установки опор давление достигает критического значения раньше других

величин, определяющих прочность пакета. Касательные напряжения межслойного сдвига и нормальные напряжения в обшивках при этом имеют существенный запас по предельным значениям (коэффициенты запаса по прочности  $n$  для обшивки  $\approx 4$ , для клеевого соединения – 2,5). Разрушение за счет расслоения между сотовым наполнителем и обшивкой ввиду малых значений, возникающих на границе контакта касательных напряжений, может происходить только из-за некачественной проклейки элементов или малого количества клея.

### Литература

1. Ставров В.П. Механика композиционных материалов: учебное пособие для студентов машиностроительных специальностей / В.П.Ставров. – Мн.: Издательство БГТУ, 1996. – 164 с.
2. Рудицын М.Н. Справочное пособие по сопротивлению материалов: изд. третье, перераб. и дополн. / М.Н.Рудицын, П.Я.Артемов, М.И.Любошиц. – Мн.: Издательство «Вышэйшая школа», 1970. – 630 с.
3. Галицкий, Д.В. Теоретическое обоснование методов устранения диагональных морщин при фальцовке / Автореферат дисс. на соискание уч. степени к.т.н. – М.: Московский государственный университет печати (МГУП), 2008. – 24 с.

Поступила в редакцию 18.11.2009 г.

УДК 684.4

## ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ МАТРИЦЫ И ПУАНСОНА ДЛЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ КЛЕЕННЫХ ИЗ ШПОНА ДЕКОРАТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЗАДАННОГО РИСУНКА

Л.В.Игнатович, к.т.н.; доцент, А.В.Шишов, аспирант; С.А.Осоко, ассистент, БГТУ

### Введение

Для изготовления мебели предпочитают древесину твердолиственных пород. Древесину мягколиственных пород с ее низкими физико-механическими показателями и декоративными свойствами в производстве мебели избегают.

Имея широкую номенклатуру красителей и отбеливателей, древесине можно придать практически любой цвет, однако при этом ее текстура не меняется, и если она не выразительна, то таковой останется и после крашения.

Достичь сложной текстуры древесины можно сочетанием крашения отдельных листов шпона в разные цвета и прессованием пакетов, набранных из таких листов, в фигурной матрице с пуансоном. При строгании спрессованного из разных листов шпона блока с искусственными годичными слоями и получается сложная текстура древесины.

Технология получения такого материала не нова. Сложнее реализовать на практике текстуру древесины, предварительно нарисованную дизайнером. Для этого необходимо изготовить такие матрицу и пуансон, которые обеспечат заданный рисунок.

### Основная часть

Построить искомый контур трехмерных поверхностей матрицы и пуансона можно, используя метод математического моделирования. Алгоритм построения поверхности состоит из нескольких этапов.

На первом этапе выделяются границы отдельных слоев шпона, которые образуют поверхность предложенного дизайнером рисунка декоративного шпона (рис. 1)

Цель этого этапа – контрастно выделить различные цветные участки рисунка и их границы. Для этого произво-