## III. ТАКСАЦИЯ И ЛЕСОУСТРОЙСТВО

УДК 630*566:681.31

О.А. АТРОЩЕНКО

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РОСТА ДРЕВОСТОЕВ

Повышение точности и эффективности лесотаксационных работ связано с совершенствованием теории лесной таксации и созданием новых научных направлений. Поэтому математическое моделирование роста леса на ЭВМ имеет теоретическое и практическое значение.

Общая математическая модель временно́го ряда хода роста древостоев $y(t)$ может быть представлена в виде:

$$y(t) = \varphi(t) + u_t , \qquad (1)$$

где $\varphi(t)$ – детерминированная компонента; $u_t$ – случайная составляющая.

Детерминированную компоненту, или систематическую составляющую, можно рассматривать как некоторый уровень хода роста по высоте, диаметру, запасу и т. д., к которому стремится древостой в данных лесорастительных условиях. Случайная составляющая, подчиняющаяся определенному вероятностному закону распределения, характеризует отклонения в росте от этого уровня под влиянием окружающих объектов в связи с биологической конкуренцией деревьев в древостое, а также ошибок измерений и т. д. При одинаковых условиях функция $\varphi(t)$ остается одной и той же, а случайная компонента представляет собой различные реализации случайного процесса.

Существующие таблицы хода роста насаждений, т. е. модели, характеризующие влияние временно́го фактора (возраста), описываются только детерминированной составляющей с той или иной степенью надежности и достоверности [1]. Это – классическая ситуация регрессионных моделей, где среднее значение остатков $u_t$ от регрессии равно нулю, дисперсия постоянна, автокорреляция в остатках отсутствует и распределены они нормально. Эти предпосылки регрессионного анализа часто не учитываются при составлении таблиц хода роста насаждений.

Для математического описания детерминированной составляющей временно́го ряда роста древостоев используются различные функции роста. Обобщенной $S$-образной функцией роста древостоев является функция Чэпмена–Ричардса [2; 3]:

$$y = A\,(1 - be^{-kt})^{1/1-m} , \qquad (2)$$

где $y$ – значение таксационного показателя в возрасте $t$; $A$ – максимальное значение показателя; $b$, $k$, $m$ – параметры роста; $e$ – Неперово число.

Эта функция является обобщением многих известных функций роста: 1) мономолекулярной, или функции Мичерлиха – $y = A(1 - e^{-kt})$; 2) автоаналитической, или логистической, функции – $y = A(1 - be^{-kt})$; 3) Гомперца – $y = A \cdot e^{-be^{-kt}}$; 4) Дракина–Вуевского – $y = A(1 - e^{-kt})^m$.

А. Рават и Ф. Франц [4] детально исследовали функцию Ричардса и пришли к выводу, что ее можно использовать для моделирования и построения системы кривых роста древостоев, каждая из которых определяется следующими параметрами.

1. Параметр $A$ представляет собой значение таксационного показателя при неограниченном увеличении возраста. В данном случае точка перегиба кривой определяется по уравнению $y = A \cdot m^{1/1-m}$. Эта кривая асимптотична по отношению к горизонтальной асимптоте – $y = A$.

2. Параметр $b$ определяет выбор начала отсчета. Для кривых бонитировочных шкал $b = 1{,}0$, так как в данном случае все кривые проходят через начало координат.

3. Параметр $k$ выражает скорость роста, при которой $\ln\left\{1 - (y/A)^{1-m}\right\} = \ln b - kt$. Значение $k/m$ – средняя относительная скорость роста

4. Параметр $m$ является основным параметром, характеризующим точку перегиба кривой роста.

Площадь под кривой роста будет равна $[A^2 \cdot k/(2m+2)]$, средняя высота (ордината) кривой – $[A \cdot k/(2m+2)]$, функция скорости роста (прирост) – $dy/dt = ny^m - k_1 y$, где $k_1 = k/(1-m)$.

При характеристике любого биологического процесса необходимо оценивать временные интервалы и состояние системы. Г. Бакман (1925) проанализировал известные функции (Фюрхюльста, Гомперца, Бэстиена, Хёслина и т. д.) роста организма и выявил, что их $S$-образные кривые недостаточно отражают процесс и особенность биологического роста (период снижения скорости роста обычно более продолжителен, чем период ее возрастания, т. е. половину своих размеров организм достигает после точки максимума). Функция Г. Бакмана предполагает, что логарифм скорости роста пропорционален квадрату логарифма времени:

$$\lg y = b_0 + b_1 \lg t + b_2 \lg^2 t. \tag{3}$$

Я.А. Юдицкий [5] детально проанализировал функции роста, подразделив их на эмпирические функции и функции, выведенные с помощью дифференциальных уравнений. Таким образом он показал, что общее дифференциальное уравнение $y' = \beta(n^\alpha - y^\alpha)y$ включает как частные случаи модели роста экспоненциальную и логистическую функции, а также функции Хильми, Мичерлиха, Шарфа, Ричардса. Решениями дифференциального уравнения $y' = (a/t^{\alpha+1} - 1)y$ являются ростовые функции Шмальгаузена, Корфа, Терзаки, Шимена. Юдицкий предложил обобщенную функцию роста:

$$y = b_1 \Phi[b_2(t - b_3)] + b_4, \tag{4}$$

где $\Phi(x)$ – функция Маркова; $b_1, ..., b_4$ – параметры.

Ход роста древостоев относится к нестационарным случайным процессам, характеризующим изменения функций распределения таксационных признаков деревьев с возрастом древостоя, их математического ожидания и дисперсии. А.З. Швиденко и Я.А. Юдицкий [6] предложили описывать случайный процесс роста древостоев в виде канонического разложения:

$$x(i) = m(i) + \Sigma\, v_j \varphi_j(i), \tag{5}$$

где $x(i)$ – некоторый случайный процесс; $m(i)$ – математическое ожидание случайного процесса в момент $i$ ; $v_j(i)$ – некоррелированные случайные величины, математическое ожидание которых равно нулю; $\varphi_j(i)$ – координатные функции.

При использовании данной формулы для каждого момента $i$ вычисляют $m(i)$, а затем нормированную случайную величину – $\overset{\circ}{x}(i) = x(i) - m(i)$. Координатные функции выбирают таким образом, чтобы математическое ожидание $M[(\overset{\circ}{x}(i) - v_j\varphi_j(i))] \to \min$ . На основании модели (5) можно прогнозировать математическое ожидание и дисперсию, получать вероятность превышения реализации случайного процесса над фиксированным уровнем и т. д.

Математико-статистический анализ временных рядов хода роста древостоев [1, 7] преследует цель проверить случайную последовательность остатков от регрессионной модели роста, оценить характеристики случайного процесса роста древостоев (автокорреляционная функция и спектральная плотность для стационарного процесса и матрицы переходных вероятностей для марковского процесса).

Существенную роль при разработке статистической теории роста древостоев сыграли модели в виде системы дифференциальных уравнений [8–10].

Для разработки таких моделей сложная система динамики древостоя представляется рядом компонентов: $y_{i,1}$ (число деревьев в древостое в $i$-й ступени толщины в начальный момент – $t_0$); $y_{i,2}$ и $y_{i,3}$ (сумма площадей сечений и запас деревьев $y_{i,1}$); $y_{i,4}$ (число деревьев, перешедших в $i$-ю ступень толщины из предыдущих ступеней за период времени $t_0$ , $t_n$); $y_{i,5}$ и $y_{i,6}$ (сумма площадей сечений и объем деревьев); $y_{i,4}$;$y_{i,7}$;$y_{i,8}$;$y_{i,9}$ (соответственно число деревьев, сумма площадей сечений и запас деревьев отпада в $i$-й ступени толщины за период $t_0$ , $t_n$); $y_{i,10}$ и $y_{i,11}$ (общая сумма площадей сечений и общий запас с учетом отпада).

В любой момент времени ($t_n$) число деревьев в $i$-й ступени толщины определяется алгебраической суммой первоначального числа деревьев в период $t_0$ , перехода деревьев из предыдущих ступеней толщины, отпада и перерастания в последующую ($i$ + 1) ступень толщины:

$$y_{i,1} = y_{i,1}(t_0) + y_{i,4} - y_{i,7} - y_{i+1,4}\,. \tag{6}$$

Аналогичные уравнения можно применять для любого компонента системы. Взяв производные в уравнениях, получим систему для описания динамики роста древостоя при $i = 1, ..., 5$:

$$\begin{cases} dy_{i,1}/dt = dy_{i,4}/dt - dy_{i,7}/dt - dt_{i+1,4}/dt \\ dy_{i,2}/dt = dy_{i,5}/dt - dy_{i,8}/dt - dy_{i+1,5}/dt \\ dy_{i,3}/dt = dy_{i,6}/dt - dy_{i,9}/dt - dy_{i+1,6}/dt \end{cases} \tag{7}$$

Для наибольшей ступени толщины ($i = 6$) число деревьев равно $y_{6,1} = y_{6,1}(t_0) + y_{6,4} - y_{6,7}$. Аналогичным образом составляется и система из трех дифференциальных уравнений вида (7).

В целом система хода роста древостоя описывается 66 компонентами. Чтобы использовать ее для предсказания распределения деревьев по диаметру, а также таксационных показателей древостоя, необходимо разработать математические выражения для производных (7) при $i = 1,..,6$, а $j = 1,..., 11$. Эти выражения должны характеризовать качественные свойства хода роста древостоя, не нарушающие биологические принципы [3, 10].

Т. Сузуки и Т. Умемура [9] использовали модель случайного процесса для прогнозирования динамики распределения деревьев по диаметру в древостое. Допустим, $P(t, x;\ \tau, y)$ – вероятность перехода диаметра дерева $x$ в возрасте $t$ к диаметру $y$ в момент времени $\tau$. Назовем это переходной вероятностью. Если $\Phi(t, x)$ и $\Phi(\tau, y)$ представляют функции распределения диаметров деревьев в возрасте соответственно $t$ и $\tau$, то их переходная вероятность будет

$$\Phi(\tau, y) = \int_0^\infty \Phi(t, x)\, p(t, x;\ \tau, y)\ . \tag{8}$$

Следовательно, распределение числа деревьев по диаметру в процессе роста древостоя можно описывать дифференциальным уравнением А.Н.Колмогорова [9]:

$$\frac{d\Phi(\tau, y)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}\left[\alpha(\tau, y)\Phi(\tau, y)\right] - \frac{d}{dy}\left[\beta(\tau, y)\Phi(\tau, y) - \right.$$

$$\left. - \gamma(\tau, y)\Phi(\tau, y)\right], \tag{9}$$

где $\alpha(\tau, y)$, $\beta(\tau, y)$, $\gamma(\tau, y)$ – вероятностные оценки соответственно дисперсии, среднего диаметра и отпада деревьев древостоя.

Для разработки конкретных моделей динамики роста древостоя следует ход роста деревьев по диаметру выразить функцией роста, распределение числа деревьев по диаметру описать теоретической функцией распределения, ход роста древостоя представить в виде модели стохастического случайного процесса.

Случайный процесс роста древостоя описывается $n$-мерной функцией распределения вероятностей. Разработать столь сложную модель трудно. Поэтому вместо нее применяют модель Маркова, где прогноз состояния системы зависит от ее состояния в настоящий момент. Ход роста древостоев, выраженный моделью Маркова, описывается матрицами переходных вероятностей [8].

Допустим, $w, x, y; z$ – число соответственно растущих, вырубленных и усохших деревьев в $i$-й степени толщины в возрасте $t$ равно:

$$w_{t,i} = w_{t-1,i-1} + \tilde{w}_{t-1,i}\ , \tag{10}$$

где $\tilde{w}_{t-1,i}$ – число растущих деревьев в период $t - 1$, не перешедших в следующую ($i + 1$) ступень толщины.

Процесс роста растущих, вырубленных, усохших и отпавших деревьев можно представить 4 соответствующими уравнениями типа (10). Для этого необходимо определить вероятности событий $p_i$, $\tilde{p}_i$, $q_i$, $\tilde{q}_i$, ..., $h_i$, $\tilde{h}_i$ для соответствующих 10 состояний деревьев – $w_{t,i}$, $\tilde{w}_{t,i}$, $x_{t,i}$, $\tilde{x}_{t,i}$, ..., $z_{t,i}$, $\tilde{z}_{t,i}$. Используя полиномиальное распределение одношаговых переменных вероятностей перехода дерева из одного состояния в другое, уравнение (10) можно представить в виде:

$$E(w_{t,i}) = p_{i-1} E(w_{t-1,i-1}) + \tilde{p}_i E(w_{t-1,i}) \,, \tag{11}$$

где $E$ – ожидаемые значения переменных.

Л. Педен [8] решил это уравнение следующим образом:

$$E(w_{t,i}) = \sum_{k=0}^{t} N_{0,i-1+k} \, [\prod_{j=1}^{t-k} p_{i-j}] < k_i p_i \dots p_{i-1+k} > t \geqslant 0, \quad i \geqslant 1 \,, \tag{12}$$

где $N_{0,i}$ – начальное число деревьев; П – произведения вероятностей; индексы $t$, $i$, $j$ – переход от $i$-й ступени в $j$-ю ступень толщины в период 0, $t$ ; $< k_i x_i \dots x_{i-1} >$ – симметрическая функция.

Динамика роста древостоя описывается системой дифференциальных уравнений, полученной для 4 состояний деревьев на основе моделей (10–12). Ошибки в оценке первоначальных перечетов деревьев по их состояниям (растущих, вырубленных и т. д.) и условных вероятностей перехода их из одного состояния в другое можно определить методом Монте-Карло.

Сложность аналитического представления вероятностного процесса роста древостоев вызвала необходимость применять для этих целей имитационные модели строения и хода роста насаждений [10], в частности модели H.Valiaho, Y. Vuokila (1974), B.Allison, J.Clutter (1974), О.А. Атрощенко (1986), где для предсказания среднего диаметра деревьев используются регрессии связи таксационных показателей с параметрами распределения числа деревьев по диаметру в древостое. Имитационные модели позволяют разработать на ЭВМ систему моделирования динамики строения древостоев, а также программы рубок ухода [7, 11]. В имитационных моделях роста и призводительности древостоев П.В. Воропанов (1966), J. Clutter (1963), Н.Н. Свалов (1974), О.А. Атрощенко (1986) используют регрессии связи текущего прироста с таксационными показателями. Эти модели применяются при имитации и построении таблиц хода роста насаждений.

Таким образом, имитационные модели роста древостоев можно разработать на основе данных перечислительной таксации насаждений на временных пробных площадях, а марковскую непрерывно-временную вероятностную модель роста древостоя создают по материалам ежегодной перечислительной таксации насаждений на стационарах.

ЛИТЕРАТУРА

1. А т р о щ е н к о О.А. Математико-статистический анализ временных рядов роста древостоев // Лесоведение и лесн. хоз-во. – 1980. – Вып. 15. 2. R i c h a r d s F. A flesible growth function for imperical use // Journal of experimental botany. – 1959. – Vol. 10. – N 29. 3. P i e n a a r L., T u r n b u l l K. The Chapman-Richards generalization of Von Bertalanffy's

growth model for basal area growth and yield in even – aged stands // Forest science. – 1973. – Vol. 19. – N 1. 4. R a w a t A., F r a n z F. Detailed nonlinear asymptotic regression studies on trees and stand growth with particular reference to forest yield research in Bavaria and India // Growth models for tree and stand simulation. – Stockholm, 1974. 5. Ю д и ц к и й Я.А. Моделирование закономерностей роста древостоев как основа обновления лесотаксационной информации // Автореф. дис. канд. с.-х. наук. – Киев, 1982. 6. Ш в и д е н к о А.З., Ю д и ц к и й Я.А. Об одном методе моделирования динамики таксационных показателей и прогноза // Текущий прирост древостоев: Тез. докл. – Минск, 1975. 7. А т р о щ е н к о О.А. Система моделирования и прогноза роста древостоев (на примере БССР) // Автореф. дис. докт. с.-х. наук, т. I. – Минск, 1986. 8. P e d e n L., W i l l i a m s T., F r a y e r W. A Marcov model for stand projection // Forest science. – 1973. – Vol. 19. – N 4. 9. S u z u k i T., U m e m u r a T. Forest transition as a stochastic process // Growth models for tree and stand simulation. – Stockholm, 1974. 10. M o s e r T. A system of equations for the components of forest growth // Growth models for tree and stand simulation. – Stockholm, 1974. 11. А т р о щ е н к о О.А., К о с т е н к о А.Г. Направления применения моделей роста леса (на примере БССР) //БелНИИНТИ. – Минск, 1980.

*УДК 630*52*

В.Е. ЕРМАКОВ, П.Ф. АСЮТИН

## БИОЛОГИЧЕСКАЯ ПРОДУКТИВНОСТЬ ЕЛЬНИКА КИСЛИЧНОГО

В настоящее время во всем мире растет потребность в древесине. Удовлетворить ее увеличением объема лесозаготовок, не вызывая истощения лесных ресурсов, трудно. Поэтому в последнее время наметилась тенденция заготавливать и вовлекать в производство всю биологическую массу дерева. Однако объем данных работ пока не достиг должного уровня по ряду причин, одной из которых является отсутствие достоверных сведений о запасах биомассы в древостоях с различной таксационной характеристикой и, как следствие, невозможность объективного планирования заготовки сырья в порядке главного и промежуточного лесопользования. В связи с этим назрела необходимость изучить динамику биологической продуктивности насаждений разных древесных пород по возрастам и типам леса.

В настоящей работе приводятся данные, касающиеся биологической продуктивности ельника кисличного I класса бонитета. Объектами исследований служили постоянные пробные площади, заложенные в Горецком лесхозе Могилевской области в высокополнотных (0,75–0,90) еловых насаждениях (от 15 до 90 лет), относящихся к кисличному типу леса. При подборе пробных площадей учитывались методические разработки Н.П. Анучина [1] и В.К. Захарова [2]. Для описания типов леса использовалась лесотипологическая классификация лесов БССР [3]. Обработка результатов таксационных замеров (табл. 1) велась принятыми в лесотаксационной науке методами. Для учета надземной биомассы (древесной зелени, хвои, ветвей, ствола, пней) подбиралось 5–8 средних модельных деревьев, в основном по принципу пропорционального представительства по производственным классам толщины. Таксация стволов модельных деревьев осуществлялась по формуле срединного сечения (по секциям), а учет биомассы – весовым способом.

При исследовании кроны деревья разделялись (сверху вниз) на 3 части.