Алгоритм естественно разделяет квантовые системы на два класса – с однородным и неоднородным пространством Фурье и позволяет строить решение в обоих случаях.

Метод реализован с использованием системы компьютерной алгебры “*Mathematica*”.

УДК 517.977

С.И. Сиротко, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГУИР, г. Минск)

К ЗАДАЧЕ ДВУХУРОВНЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачи двухуровневого программирования возникают при моделировании иерархических систем. Каждый уровень иерархии принимает свое решение, преследуя свои цели и использует имеющиеся у него возможности и ресурсы. Задача заключается в том, чтобы найти общее решение, которое приводит всю систему к достижению некоторой глобальной цели.

Пусть $x \in R^n$, $y \in R^m$, функции $G(x,y)$, $f(x,y)$ и $h_i(x,y)$ при $i \in I = \{ 1,\ldots p \}$ непрерывны вместе со своими производными по y. Рассмотрим задачу двухуровневого программирования (ЗДП):

$$G(x,y) \to \min, \quad x \in X \subset R^n, \quad y \in S(x) \;\; Arg\min\{ f(x,y) \mid y \in F(x) \}$$

где $F(x) \;= \{ y \in R^m \mid h_i(x,y) \le 0 \;\; i \in I \}$.

Отметим, что, несмотря на внешнюю простоту постановки, решение ЗДП является весьма трудной задачей. Сформулируем задачу ЗДП в равносильной форме

$$G(x,y) \to \min_{x,y}, \quad x \in X, \quad y \in S(x) = \{ y \in F(x) \mid f(x,y) \le \varphi(x) \},$$

где $\varphi(x)$ – функция оптимального значения задачи нижнего уровня, то есть $\varphi(x) = \min\{ f(x,y) \mid y \in F(x)\}$.

Пусть (x^0,y^0) – локальное решение задачи ЗДП. Задача ЗДП называется частично устойчивой (partial calm) в точке (x^0,y^0) [1,2], если существует число $\mu_0 > 0$ такое, что при всех $\mu \ge \mu_0$ точка (x^0,y^0) будет также локальным решением задачи

$$G(x,y) + \mu(f(x,y)) - \varphi(x)) \to \min, \quad x \in X, \quad y \in F(x).$$

Таким образом, частично устойчивая задача ЗДП сводится к одноуровневой задаче с негладкой целевой функцией и может решаться эффективными методами. Условия, гарантирующие частичную устойчивость, представляют значительный интерес [3]. Известно [2], что двухуровневые задачи с линейной по x, y задачей нижнего уровня являются частично устойчивыми. Однако, в общем случае частичная устойчивость отсутствует в ЗДП с линейной по y задачей нижнего уровня [3,4]. Ниже предлагается достаточное условие частичной устойчивости ЗДП на основе развитого в [5-8] условия R-регулярности многозначных отображений.

В случае многозначного отображения $M\colon x \mapsto M(x) \subset R^m$ будем обозначать область определения многозначного отображения M $dom\,M = \{ x \in R^n \mid M(x) \neq \varnothing \}$ и его график $gph\,M = \{ (x,y) \mid y \in M(x),\ x \in R^n \}$.

Определение 1. Многозначное отображение M называется полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке $(x^0,y^0) \in grh\,M$ относительно $dom\,M$, если для любой окрестности $V(y^0)$ существует окрестность $V(x^0)$ такая, что $M(x) \cap V(y^0) \neq \varnothing$ для всех $x \in V(x^0) \cap dom\,M$.

Положим

$$h_0(x,y) = f(x,y) - \varphi(x), \quad I(x,y) = \{ i \in I : h_i(x,y) = 0 \}.$$

Определение 2. Многозначное отображение S удовлетворяет условию регулярности постоянного ранга (CRCQ) [5] в точке $(x^0,y^0) \in gph\,S$, если для любого множества индексов $K \subset I(x^0,y^0) \cup \{0\}$ система векторов $\{\nabla_y h_i(x,y) : i \in K\}$ имеет постоянный ранг для всех (x,y) из некоторой окрестности (x^0,y^0).

В дальнейшем будем обозначать $I(x,y) = \{ i \in I \mid h_i(x,y) = 0 \}$, $V(x)$, $V(y)$ – окрестности точек x и y, $|v|$ – евклидову норму вектора v. Также обозначим через $d(v,C)$ евклидово расстояние от точки $v \in R^m$ до множества $C \subset R^m$.

Введем множество $D = \{ (x,y) \mid h_i(x,y) \leq 0\ i \in I, x \in X \}$. Далее, принимается следующее обычное предположение [1] о задаче ЗДП: $X \subset dom\,S = dom\,F$.

Следующее утверждение представляет основной результат доклада.

Теорема 1. Пусть точка (x^0,y^0) является решением задачи ЗДП. Предположим, что многозначное отображение S п.н.сн. в (x^0,y^0) и удовлетворяет в этой точке условию регулярности CRCQ. Тогда найдется число $\mu_0 > 0$ такое что при любом $\mu \geq \mu_0$ точка (x^0,y^0) будет локальным решением задачи

$$G(x,y) + \mu(f(x,y)) - \varphi(x)) \to \min, \ (x,y) \in D.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Dempe, S. Foundations of Bilevel programming. / S. Dempe. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

2. Ye, J. J., Zhu, D. L. Optimality conditions for bilevel programming problems. // Optimization. 1995. 33. Pp. 9–27.

3. Mehlitz, P., Minchenko, L., Zemkoho, A. A note on partial calmness for bilevel optimization problems with linear structures at the lower level. // Optimization Letters. 2021. 15. Pp. 1277–1291.

4. Минченко, Л. И., Сиротко, С. И. О частичной устойчивости задач двухуровневого программирования с задачей нижнего уровня, линейной по основной переменной. // Доклады НАН Беларуси. 2019. 63(5). С. 526–532.

5. Luderer, B., Minchenko, L., Satsura, T. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. / B. Luderer, L. Minchenko, T. Satsura. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2002.

6. Minchenko, L., Stakhovski, S. Parametric nonlinear programming problems under the relaxed constant rank condition. SIAM J. Optimization. 2011. 21. Pp. 1314–332.

7. Bednarczuk, E., Minchenko, L. I., Rutkowski, K. E. On Lipschitz-like continuity of a class of set-valued mappings. // Optimization. 2020. 69(12). Pp. 2535-2549.

8. Minchenko, L. I., Sirotko, S. I. On Local Error Bound in Nonlinear Programs. // Optimization and Applications: Proceedings of 12th International Conference (OPTIMA 2021), Petrovac, Montenegro, 27.09–1.10.2021. 2021. / In Lecture Notes in Computer Science. 13078. Pp. 38–49.

9. Janin, R. Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming. // Mathematical Programming Studies. 1984. 21. Pp. 110–126.