С учетом формулы

$$\frac{1}{1+[r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}]} = \left[\frac{1}{1+s_k^{(\alpha)}}, \frac{1}{1+r_k^{(\alpha)}}\right]$$

будем иметь

$$V_n^{(\alpha)} = -A_0(+)A_1\left[\frac{1}{1+s_1^{(\alpha)}}, \frac{1}{1+r_1^{(\alpha)}}\right](+)$$

$$(+)A_2\left[\frac{1}{(1+s_1^{(\alpha)})(1+s_2^{(\alpha)})}, \frac{1}{(1+r_1^{(\alpha)})(1+r_2^{(\alpha)})}\right](+)...(+)$$

$$(+)A_n\left[\frac{1}{(1+s_1^{(\alpha)})(1+s_2^{(\alpha)})\cdots(1+s_n^{(\alpha)})}, \frac{1}{(1+r_1^{(\alpha)})(1+r_2^{(\alpha)})\cdots(1+r_n^{(\alpha)})}\right].$$

Это выражение для каждого уровня позволяет найти диапазон возможностей, между которыми находится реальный результат. Кроме того, варьируя уровнем принадлежности и заданным порогом (детерминированным или нечетким), удается определить, при каком уровне α можно будет обеспечить выбор A_j $(j = 0,1,2,...,n)$ и предположения относительно интервалов $[r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}]$.

УДК 519.624

И.Ф. Соловьева (БГТУ, г. Минск)

О СВОЙСТВАХ ЖЕСТКОСТИ В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

118 лет прошло с момента основания теории пограничного слоя, однако, актуальность этой темы не утрачена и в наши дни. Основные проблемы решения задач такого рода заключаются в наличии у них весьма малого параметра $\varepsilon > 0$, стоящего возле производных самого высокого порядка уравнения.

Функция зависит от малого параметра ε таким образом, что в граничной задаче возникают пограничные или внутренние переходные слои. Ее численное решение и градиент решения в этом случае начинают расти. Особенно рост решения наблюдается вблизи граничных точек. В этом случае возникает пограничный слой [1].

Явление жесткости, как правило, присуще дифференциальным уравнениям с малым параметром при старшей производной, и относится к числу наиболее сложных в вычислительной математике задач. Эти задачи представляют собой математические модели, для которых соответствующие дискретные модели по-прежнему являются далекой от завершения проблемой.

Проанализируем смысл малого параметра на примере дифференциального уравнения:

$$\varepsilon y'' = p(x)\,y + f(x),,\ \ 0 \le x \le l\,, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0,\ \ p(x) > 0$. Данное уравнение может возникать в случае смешанной граничной задачи для уравнения теплопроводности. Коэффициент $\varepsilon > 0$ как раз и рассматривается как малый параметр при старшей производной. Он будет пропорционален шагу сетки по времени. Малость этого параметра характеризуется безразмерной величиной $\mu(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^l p(x)\,dx \right)^{-1/2}$. Численное решение такого уравнения является неблагоприятным в вычислительном отношении. Это легко объясняется тем, что решение соответствующего однородного уравнения $\varepsilon z'' = p(x)\,z$ будет резко возрастать при приближении к правому концу отрезка. Его поведение при этом будет сравнимо с поведением функции $exp \int\limits_0^x \sqrt{\frac{p(t)}{\varepsilon}}\,dt$. В качестве примеров таких задач можно привести, например, задачи магнитной гидродинамики с большими числами Хартмана, задачи о течениях Навье-Стокса с большими числами Рейнольдса и другие задачи.

Свойства граничных задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными слоями очень схожи со свойствами жестких граничных задач [1].

Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, имеющую постоянную матрицу.

$$\begin{cases} y'(t) = A\,y(t) + f(t), \quad t > 0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

где $A = \left(a_{ij}\right)_1^n, \quad f(t) = (f_1(t),\ f_2(t), \ldots, f_n(t))^T, \quad y_0 \in R^n$.

Собственные значения матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_1^n$ обозначим через λ_i, $i = \overline{1,n}$.

Определение. Задача вида (2) называется жесткой, если выполняются следующие условия:

1) существуют собственные значения λ_i, для которых $\mathrm{Re}(\lambda_i) \ll 0$, $i = p_1, p_2, \ldots, p_m$, $m < n$, $1 \le p_1, p_2, \ldots, p_m \le n$;

2) существуют собственные значения λ_s умеренной величины, то есть $|\lambda_s| \le |\lambda_i|$, $s = q_1, q_2, \ldots, q_r$, $r \le n - m$, $1 \le q_1, q_2, \ldots, q_r \le n$, $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\} \bigcap \{q_1, q_2, \ldots, q_r\} = \varnothing$;

3) не существует собственных значений λ_j таких, что $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ и $\mathrm{Re}(\lambda_i) \approx |\lambda_i|$, $i = p_1, p_2, ..., p_m$;

4) не существует собственных значений λ_k с $\mathrm{Im}(\lambda_i) \approx |\lambda_i|$, $i = p_1, p_2, ..., p_m$, для которого не выполнялось бы условие $\mathrm{Re}(\lambda_k) \ll 0$.

В исходной задаче (1) предполагается, что ее правая часть является плавно меняющейся функцией. Поэтому она не вносит никаких резких изменений в основную фундаментальную часть решения.

Граничные задачи с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными либо внутренними переходными слоями и жесткие задачи имеют одинаковую внутреннюю природу. Структура этой природы проявляется в свойствах решений таких задач и в описании процессов и явлений этих задач.

Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f(t, y), \quad t > 0.$$

Чтобы охарактеризовать свойство жесткости задачи применяется большая константа Липшица:

$$L(t) = \sup_{u \in M(t)} \left\| \frac{\partial f(t, u)}{\partial y} \right\| \gg 0.$$

Если константа Липшица будет иметь достаточно большие значения, то задачи такого вида принято относить к числу жестких задач. Эта характеристика жесткости является наиболее важной и распространенной в современной литературе. Кроме этого, ее считают вполне достаточной для определения жесткости той или иной задачи.

К таким задачам можно отнести задачи, описывающие всевозможные диффузионно-конвективные процессы, задачи о вычислении сопротивления, возникающего при обтекании тела, о вычислении сопротивления трения корабля и множество других подобных задач. Это достаточно трудные в численном решении задачи.

Как правило, они имеют один или несколько пограничных слоев, и до сих пор вызывают к себе повышенный интерес. Это происходит из-за их многочисленных приложений.

В связи с непрерывно возникающими этими приложениями необходимо распространять существующие методы на более общие дифференциальные задачи, и, конечно, необходимо построение новых более конструктивных вычислительных алгоритмов, способных охватывать широкие классы задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными либо внутренними переходными слоями. Такие методы должны обладать гибкими вычислительными свойствами, имеющими возможность обойти трудности решения систем линейных алгебраических уравнений достаточно высокого порядка, регулировать вопросы, связанные с организацией итерационных процессов, и обеспечивать их устойчивость и сходимость.

Для решения такого рода задач предлагается модификация метода множественной двусторонней пристрелки. При использовании метода множественной двусторонней пристрелки к решению задачи вида (1) улучшаются свойства пристрелочных траекторий; ослабляются условия на локализацию начальных приближений; уменьшается число неизвестных, что ведет к некоторому упрощению решения.

Рассмотрим систему нелинейных о. д. у. первого порядка с малым параметром при производной, приведенную к нормализованному виду:

$$y' = f(t, y, \varepsilon), \ a \le t \le b \tag{3}$$

с присоединенным к ней двухточечным граничным условием

$$g(y(a),\ y(b)) = 0, \tag{4}$$

где $y:[a,b] \to R^n$, $y:[a,b] \to R^n \times R \to R^n$, $\varepsilon > 0$, $g: R^n \times R^n \to R$.

Предполагаем, что отображения f и g такие, что задача (3)-(4) имеет единственное решение и обладает необходимой гладкостью.

Искомое решение $y(t)$ представлено в виде:

$$\underset{a\le t\le b}{y(t)} = \begin{cases} v(t,\ y^*_{2j-1}),\ t \in J^{(-)}_{2j-1}, \\ u(t,\ y^*_{2j-1}),\ t \in J^{(+)}_{2j-1},\ j = \overline{1,m} \end{cases}. \tag{5}$$

Функция $u(t,\ y^*_{2j-1})$ – решение задачи Коши в прямом направлении, а функция $v(t,\ y^*_{2j-1})$ – в обратном направлении.

Для решения замыкающей системы

$$\begin{gathered} u(t_{2j},\ y_{2j-1}) - v(t_{2j},\ y_{2j+1}) = 0,\ j = \overline{1,m-1} \\ g(v(t_0, y_1),\ u(t_{2m}, y_{2m-1})) = 0 \end{gathered}, \tag{6}$$

использовался метод Ньютона.

В методе множественной двусторонней пристрелки можно произвольно выбирать точки пристрелки, точки сшива решений, а также параметры пристрелки и длины положительных $J^{(+)}_{2j-1}$ и отрицательных $J^{(-)}_{2j-1}$ пристрелочных подинтервалов. При решении системы (3)-(4) представляем исходную граничную задачу в виде совокупности трех задач Коши, благоприятных в вычислительном отношении. Для решения задач Коши в наше время существует целый арсенал известных, хорошо работающих методов. К ним можно отнести методы Рунге-Кутта, а также методы, обладающие B или D-устойчивостью. Параметры пристрелки определяются как решения замыкающей системы

(6). А, в свою очередь, конструктивную сторону замыкающей системы (6) удобно характеризовать матрицей Якоби. Свойства матрицы Якоби создают необходимые условия для качественного численного моделирования траектории искомого решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М: Наука, 1974. – 712 с.

УДК 51-7+517. 925

В.А. Савва, проф., д-р физ.-мат.наук; С. Банжак, асп.
(БГТУ, г. Минск)

ДИНАМИКА ЛАЗЕРНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ МОЛЕКУЛ: ДИСКРЕТНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ С НЕОДНОРОДНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ ФУРЬЕ

Этот когерентный процесс описывается системой уравнений

$$-i\frac{da_n(t)}{dt} = f_{n+1}e^{-i\varepsilon_{n+1}t}a_{n+1}(t) + f_n e^{+i\varepsilon_n t}a_{n-1}(t); \quad a_n(t=0)=\delta_{n,0}; \quad n=\overline{0,N}; \tag{1}$$

в безразмерных величинах. Пусть излучение взаимодействует с двумя соседними переходами $E_0 \leftrightarrow E_1 \leftrightarrow E_2$ между энергетическими уровнями. Искомые функции $a_n(t)$ – амплитуды вероятности возбуждаемых квантовых систем обладают дискретным пространством Фурье. Для некоторых систем оно может быть неоднородным. Этот случай рассмотрен ниже. Для решения уравнений предлагается метод, использующий средства дискретной математики.

Для рассматриваемых здесь трехуровневых квантовых систем неоднородное спектральное пространство описываем величиной $x=\{0,1,c\}$; $c\neq 2$ и задаваемой на этой сетке дискретной функцией $\sigma\ (x)$, используемой в качестве весовой для построения ортогональных полиномов дискретного аргумента x. При этом можно ввести дополнительные свободные параметры, например,

$$\sigma\ (x;a,k,c)=\{1-a-kc,\ a,\ kc\}; \quad \sum_x \sigma\ (x)=1; \quad 0<a<1-kc. \tag{2}$$

Ради упрощения расчетов зафиксируем два параметра, положив $c=3$ (расходящаяся сетка) и $k=1/8$. Получаем

$$\sigma\ (x;a)=\left\{\frac{5}{8}-a,\ a,\ \frac{3}{8}\right\}; \quad x=\{0,1,3\}; \quad 0<a<\frac{5}{8}. \tag{3}$$