УДК 517.977

И.М. Борковская, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ГИБРИДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

В докладе рассматривается проблема стабилизации гибридных дифференциально-разностных систем при использовании регуляторов по типу обратной связи. Доказаны необходимые условия стабилизации указанных систем с помощью простейшего регулятора и регулятора с интегральными составляющими типа свертки.

Гибридная дифференциально-разностная система в симметрической относительно операторов дифференцирования и сдвига форме имеет вид:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \tag{1}$$

$$x_2(t+h) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t),\ t \ge 0 \tag{2}$$

начальные условия:

$$x_1(0) = x_{10},\ x_2(\tau) = \psi(\tau),\ \tau \in [0, h), \tag{3}$$

где $x_1(t) \in R^{n_1},\ x_2(t) \in R^{n_2},\ u(t) \in R^r,\ h > 0,\ A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – действительные постоянные матрицы соответствующих размеров; $u = u(\cdot)$ – внешнее (кусочно-непрерывное) воздействие – управление; $\psi(\cdot)$ – начальная кусочно-непрерывная n_2-вектор-функция.

Под решением системы (1), (2) будем понимать абсолютно непрерывную n_1-вектор-функцию $x_1(\cdot)$ и кусочно-непрерывную n_2-вектор-функцию $x_2(\cdot)$, которые для всех $t \ge 0$ удовлетворяют уравнению (2) и для почти всех $t \ge 0$ удовлетворяют уравнению (1). Это решение начальной задачи (1)–(3) для каждого начального значения $x_{10} \in R^{n_1}$ и кусочно-непрерывной n_2-вектор-функции $\psi(\cdot)$ существует и единственно.

Рассмотрим невозмущенную ГДР-систему (1), (2), т. е. систему с выключенным управлением $u(t) = 0$ при $t \ge 0$. Следуя методу Эйлера отыскания решений системы в экспоненциальной форме в теории обыкновенных дифференциальных уравнений $x_1(t) = e^{\lambda t}c_1,\ x_2(t) = e^{\lambda t}c_2$, приходим к системе

$$e^{\lambda t}\begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & e^{\lambda h}I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0,\ \lambda \in C,\ t > 0,$$

что приводит к поиску комплексных корней λ уравнения

$$\det\begin{bmatrix}\lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & e^{\lambda h} I_{n_2} - A_{22}\end{bmatrix} = \Delta_1(\lambda) = 0,\ \lambda \in C,$$

которое назовем основным характеристическим уравнением системы (1), (2); здесь и далее C – поле комплексных чисел, символ I_k означает единичную $k \times k$-матрицу. Корни уравнения $\Delta_1(\lambda) = 0$ назовем основными характеристическими значениями этой системы.

Наряду с экспоненциальными решениями невозмущенной системы (1), (2) представляют интерес решения вида

$$x_1(t) \equiv 0,\ x_2(t) = \begin{cases} 0,\ t \neq kh, \\ c\lambda^{\frac{k}{h}},\ t = kh, \end{cases},\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ t \geq 0,$$

где $c \neq 0, 0^0 = 1$ (назовем их импульсными решениями), подставляя которые в систему (1), (2), приходим к уравнению

$$\det(\lambda I_{n_2} - A_{22}) = \Delta_2(\lambda) = 0,\ \lambda \in C,$$

которое назовем присоединенным характеристическим уравнением системы (1), (2), а его корни – присоединенными характеристическими значениями этой системы.

Спектром системы (1), (2) назовем множество всех характеристических значений (основных и присоединенных) с учетом их кратностей, а соответствующие решения назовем спектральными решениями системы (1), (2). Невозмущенную систему (с выключенным управлением) назовем спектрально устойчивой, если все ее спектральные решения являются асимптотически устойчивыми.

Утверждение 1. Для спектральной устойчивости невозмущенной системы (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы

1) все основные собственные значения имели отрицательные действительные части;

2) все присоединенные собственные значения λ лежали в комплексной плоскости внутри единичного диска: $|\lambda| < 1$.

Введем линейную обратную связь следующих типов: в виде простейшего регулятора:

$$u(t) = Q_1 x_1(t) + Q_2 x_2(t), \tag{4}$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы, и в виде регулятора с интегральными составляющими типа свертки:

$$u(t) = Q_1 x_1(t) + Q_2 x_2(t) + \int_0^t Q_1(s) x_1(t-s)\,ds + \int_0^t Q_2(s) x_2(t+h-s)\,ds, \tag{5}$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы, $Q_1(\cdot)$ и $Q_2(\cdot)$ – матрицы-функции соответствующих размеров, причем элементы функциональных матриц $Q_1(\cdot)$ и $Q_2(\cdot)$ являются кусочно-непрерывными функциями с конечным носителем $H > 0$, $Q_1(\cdot) \equiv 0, Q_2(\cdot) \equiv 0$ для $t > H$.

При исследовании ГДР-систем приходится применять к таким системам преобразование Лапласа, в связи с чем возникает необходимость в экспоненциальной оценке роста решений этих систем. Положим

$$x_2(t) = x_3(t-h), t \ge 0. \quad (6)$$

Тогда система запишется в виде ГДР-системы запаздывающего типа, более удобной для применения преобразования Лапласа:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_3(t-h) + B_1u(t), \quad (7)$$

$$x_3(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_3(t-h) + B_2u(t), t \ge 0 \quad (8)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10}, x_3(\tau) = \psi(\tau + h), \tau \in [-h, 0). \quad (9)$$

Доказана теорема, дающая экспоненциальную оценку решений системы (7), (8) (а следовательно, и системы (1), (2)), что позволяет применять к этим системам преобразование Лапласа.

Присоединенные характеристические уравнения систем (7), (8) и (1), (2) идентичны, а основные характеристические уравнения связаны соотношением

$$\det\begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12}e^{-\lambda h} \\ -A_{21} & I_{n_2} - A_{22}e^{-\lambda h} \end{bmatrix} = e^{-\lambda n_2 h}\Delta_1(\lambda) = 0, \lambda \in C,$$

и, значит, спектры систем (7), (8) и (1), (2) совпадают.

Доказаны следующие необходимые условия стабилизации гибридных дифференциально-разностных систем:

Теорема 1. Если система является стабилизируемой регуляторами (4) или (5), то

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & e^{\lambda h}I_{n_2} - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n_1 + n_2, \quad \forall\lambda \in C, \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Теорема 2. Если система является стабилизируемой регуляторами (4) или (5), то выполняется условие

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I_{n_2} - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n_2, \forall\lambda \in C, |\lambda| < 1.$$