$$\times\cos\left(\left(2m-p+2\right)\right)\left(\tau\ln\tau-\tau\right)-\tau\ln 4x+\left(-1\right)^{n+p/2}x\tau^{p-2m-1}+\frac{\pi}{2}\chi\Bigg)+2\pi\frac{e^{-\pi\tau}}{\tau}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{m}C_j\left(\frac{x}{\tau^2}\right)^{b_j}{}_pF_{2m-1}\left[\begin{matrix}1-(a)_p+b_j\\ 1-(b)'_m+b_j,\frac{1}{2}+(b)_m+b_j\end{matrix};(-1)^{p-n-m}x\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right),$$

где

$$\rho=\sum_{j=1}^{n}a_j-\sum_{j=n+1}^{p}a_j-m-1+\frac{p}{2},$$

$$\chi=2\sum_{j=1}^{m}b_j+\sum_{j=1}^{p}a_j-m-1+\frac{p}{2},$$

$$C_j=\Gamma\left(\begin{matrix}(b)'_m-b_j,1-(a)_n+b_j\\ (a)_n-b_j,\frac{1}{2}+(b)_m+b_j\end{matrix}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А**.** Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. − М., «Наука», 1973. − 295 с.

2. Маричев О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). − Мн., «Наука и техника», 1978. − 312 с.

3. Яроцкая Л. Д. Асимптотические представления по параметрам G-функции Мейера специального вида// Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. – Минск : БГТУ, 2017. – № 2 (200). – С. 28 – 32.

4. Yarotskaya L.D. On index transforms with Meijer`s G−function kernels // Integral Transforms and Special Functions. – 2000. – Vol. 10, № 3 − 4. – P. 309 – 320.

УДК 519.71

И.К. Асмыкович, доц., канд. физ-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ В ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМАХ

Классическим объектом изучения в качественной теории управления для обыкновенных линейных систем является система вида

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),$$

$$x(0)=x_0, \tag{1}$$

$$y(t)=Cx(t) \tag{2}$$

где $x(t)$ – n-вектор состояния, $u(t)$ – r - вектор управляющих воздействий, y – m-вектор выхода или наблюдаемых координат, A, B, C – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Для таких объектов в XX веке подробно рассмотрены и проанализированы основные задачи качественной теории управления, получены критерии их разрешимости, разработаны алгоритмы синтеза необходимых регуляторов. Но в XXI веке было выяснено, что даже для таких моделей решены далеко не все задачи [1].

Важную роль в качественной теории управления играет принцип обратной связи, когда управление формируется в виде функции от текущего состояния объекта исследуемого процесса. Принцип обратной связи, по словам Р. Калмана, одного из основателей современной качественной теории управления [1], составляет «основу всей автоматики» и заключает «наиболее важную идею теории управления». Обратная связь – основа основ современной техники. Трудно назвать какую-либо ее область, где бы не нашла применения обратная связь. Регуляторы температуры поддерживают нужную температуру, регуляторы давления – заданное давление, регуляторы скорости – требуемое число оборотов вала, регуляторы напряжения – постоянство напряжения в электросети [2]. Обратная связь используется для стабилизации и управления положением движущихся в пространстве объектов. Ее применение позволило расширить исследования в области таких качественных свойств систем управления, как управление спектром или модальная управляемость, реконструируемость, расщепимость.

При дальнейшем изучении математических моделей реальных систем управления было выяснено, что представление (1), (2) далеко не всегда корректно описывают объект управления. При составлении математических моделей физических процессов и систем автоматического регулирования необходимо учитывать как дифференциальные, так и алгебраические связи, как непрерывные, так и дискретные взаимодействия, а во многих случаях и эффекты последействия, которыми нельзя пренебречь [2–4]. Адекватной математической моделью таких процессов являются гибридные дискретно-непрерывные динамические системы [3,4]. Такие системы находят широкое распространение в самых разнообразных областях современной науки и техники: в автоматике и телемеханике, радиологии, биологии и медицине, при моделировании технологических процессов в плазме и лазерах, ряде экономических моделей и т.д. [2–5].

Моделирование процессов, протекающих в объектах управления с запаздыванием, осуществляется с помощью дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Трудности в математическом решении этих уравнений перетекают в проблемы технической реализации систем управления [2].

В качественной теории управления динамическими системами в последние десятилетия большой популярностью пользуются линейные дескрипторные системы, которые также называются дифференциально-алгебраическими, либо сингулярными, либо неразрешенными относительно производной. [5]. Математически такие системы записываются в виде

$$S\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$Sx(0) = Sx_0, \quad \det S = 0, \tag{3}$$

В таких системах имеются существенные сложности в вопросах существования и единственности решения, но при условии регулярности они снимаются.

$$\det\left[\lambda S - A\right] \neq 0 \tag{4}$$

Системы в виде (3) широко используются при моделировании процессов в электрических цепях, технологических процессов переноса (материала и тепла), задачах демографии. Это происходит тогда, когда наряду с дифференциальными связями встречаются и алгебраические (функциональные) зависимости, например, условия материального или финансового баланса. При этом выделяется специальный класс таких систем – гибридные системы [3,4]. Отметим, что системы (3), (4) содержат, как частный случай, системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одной стороны, а с другой – сами являются частным случаем дескрипторных систем (3) с запаздывающим аргументом. Если коэффициенты гибридной дискретно-непрерывной системы являются постоянными матрицами, то такая система называется стационарной. Простейшая такая стационарная система имеет вид

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), t \in [kh, (k+1)h); \tag{5}$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh), \tag{6}$$

В формулах (5), (6) $x(t) \in R^n$, $y(kh) \in R^m$, $u(kh) \in R^r$, $h > 0$, $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B$ – постоянные матрицы соответствующих размеров с начальными условиями

$$x(0) = x(+0) = x_0; \; y(0) = y_0.$$

Математическая модель системы с отклоняющимся аргументом записывается в виде

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + bu(t), t > 0, \tag{7}$$

Одной из основных задач теории автоматического управления яв-ляется задача синтеза линейной обратной связи по состоянию или по выходу в линейных системах и непосредственный расчет коэффициентов регулятора [2].

При этом для системы (1), (2) регулятор типа обратной связи имеет вид $u(t) = Qx(t)$ ($Q-$ постоянная $r \times n$ -матрица), для системы (3), (4) линейная обратная связь по состоянию $u(t) = Q_1 x(t) + Q_2 v(t)$ или обратной связи по состоянию и производной $u(t) = Q_1 x(t) + Q_2 \breve{x}(t) + Bv(t)$. Для системы (5), (6) регулятор имеет дискретный характер $u(kh) = Q_1 x(kh) + Q_2 y(kh), k = 0, 1, ...,$, для систем с запаздыванием (7) возможен как дискретный так и интегральный $u(t) = \int_{-h}^{0} [dQ(s)] x(t+s), \quad t > 0,$.

Непосредственный расчет коэффициентов соответствующего регулятора представляет собой конкретную вычислительную задачу, которая для обыкновенных линейных систем решается путем приведения системы к соответствующей канонической форме, для системы (3), (4) используют ее вторую эквивалентную форму и ее модификацию из [6] т.е.

$$S = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 & 0 \\ A_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ddot{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Для гибридных дифференциально-разностных систем ее сводят к дискретной системе [3, 4], для систем с отклоняющимся аргументом используют теорему Винера-Пэли, либо различные канонические структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк, Б.Т. Трудные задачи линейной теории управления / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков // Автоматика и телемеханика – 2005. – № 5. – С. 7-46.
2. Lapeto, A.V. Synthesis of Control Systems with delay by the embedding theory on the basis of approximation of delay / A.V. Lapeto, I.F. Kuzmicki, I.K. Asmykovich // Journal of Control, Automation and Electrical Systems. – Volume 28, Issue 3. – June 2017. – P. 297-302.
3. Asmykovich, I.K. On the Stabilization of Hybrid Dynamic Systems / I.K. Asmykovich, I.M. Borkovskaya // 14 TH International scientific-technical conference on actual problems of electronic instrument engineering (APEIE) – V.1(4) – 2018. – P. 13-16.
4. Марченко, В. М., Борковская И. М. О стабилизации скалярных гибридных дифференциально-разностных систем / В. М. Марчен-

ко, И. М. Борковская // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. – Минск: БГТУ, 2020. – № 1 (230). – С. 5-13

5. Дескрипторные системы управления: Библиографический указатель / сост. И.К Асмыкович. - Минск : БГТУ, 2020. – 305 с

6. Марченко, В.М. О структуре дескрипторных систем / В.М. Марченко // Труды БГТУ. Серия VI. Физ.-мат. науки и информатика. – Минск : БГТУ, 2004. – С. 3-6.

УДК 532.539

А.М. Волк, доц., канд. техн. наук;
А.И. Вилькоцкий, доц., канд. техн. наук;
О.А. Архипенко, ассист. (БГТУ, г. Минск)

АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В РОТОРНЫХ АППАРАТАХ

Вихревые аппараты широко применяются в химической, пищевой, газодобывающей, строительной и других отраслях для проведения различных физико-химических процессов, таких как разделение гетерогенных систем и тепломассоперенос [1].

Эффективность явлений переноса в таких аппаратах [2, 3] обеспечивается высокими относительными скоростям взаимодействующих фаз, развитой поверхностью контакта, высокой интенсивностью процессов межфазного взаимодействия и существенно превосходит кинетические характеристики контактных устройств с традиционными способами взаимодействия фаз в системах, что способствует заметному уменьшению габаритов оборудования (рис. 1).

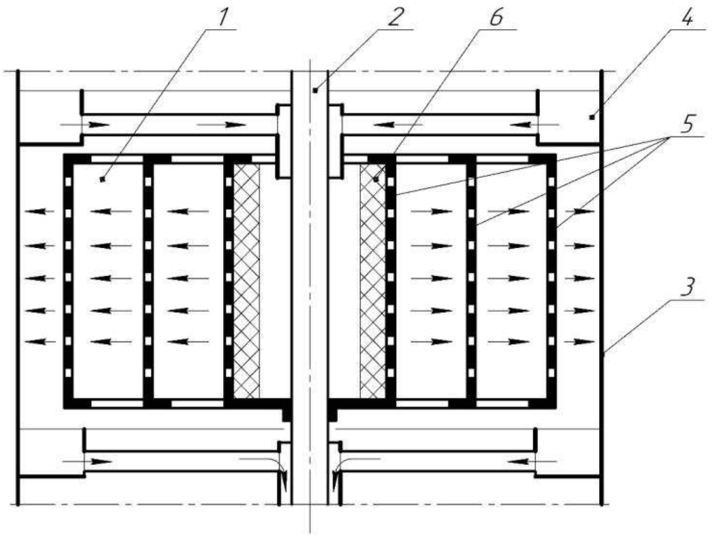

Рисунок 1 – Схема роторного массообменного аппарата: 1 – ротор; 2 – вал; 3 – корпус аппарата; 4 – переливное устройство; 5 – перфорированные цилиндры; 6 – перераспределительный элемент