УДК 517.588

Л.Д. Яроцкая, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА G −ФУНКЦИИ МЕЙЕРА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ПО МНИМЫМ ПАРАМЕТРАМ

G – функция определена Мейером в 1941 г. контурным интегралом Меллина – Барнса [1]

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\right.\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \Psi(s)z^{-s}ds \qquad (1)$$

для целых неотрицательных m, n, p, q, $0\le m\le q, 0\le n\le p$, комплексных a_i и b_j при $z\neq 0$, где

$$\Psi(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+s\right)\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(1-a_i-s\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-s\right)\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma\left(a_i+s\right)}, \qquad (2)$$

при этом пустые произведения в (2) (если таковые имеются) считаются равными единице. Здесь L – специально выбранный замкнутый контур [2], проходящий через бесконечно удаленную точку и разделяющий все левые полюсы $s=-b_j-k$, j=1, …, m, Γ – функций Эйлера в числителе от правых $s=1-a_i+k$, i =1, …, n, k = 0,1,2,….

В работе [3] рассматривались асимптотические свойства G – функции − ядра интегрального преобразования по индексу [4]

$$G(x)=G_{2n,2m+2}^{m+2,n}\left(x^2\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}+(a)_n,(a)_n\\ i\tau,-i\tau,(b)_m,\frac{1}{2}-(b)_m\end{matrix}\right.\right).$$

Отметим, что G – функция является наиболее общей функцией гипергеометрического типа, которая при соответствующих значениях параметров включает в себя элементарные функции, функции Бесселя и многие другие специальные функции [1].

Важным рядом в приложениях и теории специальных функций является обобщенный гипергеометрический ряд

$${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix};z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_k\cdots\left(a_p\right)_k}{\left(b_1\right)_k\cdots\left(b_q\right)_k}\frac{z^k}{k!}, \qquad (3)$$

содержащий в числителе p, а в знаменателе q параметров, коэффициенты которого определяются символом Похгаммера

$$(a)_k=a(a+1)\ldots(a+k-1),\ (a)_0=1.$$

В настоящей работе рассматриваются асимптотические свойства

G – функции действительного аргумента с мнимыми параметрами при $\tau \to +\infty$

$$\mathrm{G}(x) = \mathrm{G}_{p,2m+2}^{m+2,n}\left(x \middle| \begin{matrix} (a)_p \\ i\tau, -i\tau, (b)_m, \frac{1}{2} - (b)_m \end{matrix} \right). \tag{4}$$

при следующих предположениях

$$2m + 2 \geq p, a_j, b_k \in \mathbf{R}, j = 1, \ldots, p, k = 1, \ldots, m,$$

и никакие из параметров $b_1, \ldots, b_m$ не совпадают и не отличаются на целое число.

Метод исследования основан на представлении G – функции Мейера в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов (3) и применении формулы Стирлинга для гамма-функции Эйлера.

Выражение G – функции (1) через линейные комбинации обобщенных гипергеометрических рядов со степенными множителями следует из теоремы Слейтер [2]. В частности, при выполнении условий $\min\limits_{k=1,\ldots,m}\{0, b_k\} < \operatorname{Re} s < \min\limits_{j=1,\ldots,n}\{a_j\}$ для (2) функцию (4) можно представить следующим выражением

$$G(x) = 2\operatorname{Re}_{i\tau}\left[x^{i\tau}\Gamma\left(\begin{matrix} -2i\tau, (b)_m - i\tau, 1 - (a)_n + i\tau \\ (a)_{n+1,p} - i\tau, \frac{1}{2} + (b)_m + i\tau \end{matrix} \right) \times \right.$$

$$\left. \times {}_pF_{2m+1}\left(\begin{matrix} 1 - (a)_p + i\tau \\ 1 + 2i\tau, 1 - (b)_m + i\tau, \frac{1}{2} + (b)_m + i\tau \end{matrix}; (-1)^{p-n-m} x \right) \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} x^{b_j} \Gamma\left(i\tau - b_j, -i\tau - b_j\right) \Gamma\left(\begin{matrix} (b)'_m - b_j, 1 - (a)_n + b_j \\ (a)_{n+1,p} - b_j, \frac{1}{2} + (b)_m + b_j \end{matrix} \right) \times$$

$$\times {}_pF_{2m+1}\left(\begin{matrix} 1 - (a)_p + b_j \\ 1 - i\tau + b_j, 1 + i\tau + b_j, 1 - (b)'_m + b_j, \frac{1}{2} + (b)_m + b_j \end{matrix}; (-1)^{p-n-m} x \right), \tag{5}$$

где $(b)'_m - b_j$ означает

$$b_1 - b_j, \ldots, b_{j-1} - b_j, b_{j+1} - b_j, \ldots, b_m - b_j.$$

Метод нахождения асимптотических выражений функции (5) при фиксированных x и больших τ основан на применении формулы Стирлинга для гамма-функции Эйлера [1], которую запишем в виде:

$$\Gamma(\alpha \pm i\tau) = \sqrt{2\pi}\tau^{\alpha - 1/2} e^{-\pi\tau/2} \exp\left[\pm \left\{ \frac{\pi}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2} \right) + \tau \ln \tau - \tau \right\} - O\left(\frac{1}{\tau} \right) \right].$$

Справедливо асимптотическое представление для (5) при $\tau \to +\infty$

$$G(x) = \frac{(2\pi)^{n+1-p/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-(n+1-p/2)\pi\tau} \tau^{\rho - 1/2} \times$$

$$\times\cos\Big(\big(2m-p+2\big)\big)(\tau\ln\tau-\tau)-\tau\ln 4x+\big(-1\big)^{n+p/2}x\tau^{p-2m-1}+\frac{\pi}{2}\chi\Big)+2\pi\frac{e^{-\pi\tau}}{\tau}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{m}C_j\left(\frac{x}{\tau^2}\right)^{b_j}{}_pF_{2m-1}\left[\begin{matrix}1-(a)_p+b_j\\1-(b)'_m+b_j,\frac{1}{2}+(b)_m+b_j\end{matrix};(-1)^{p-n-m}x\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right),$$

где

$$\rho=\sum_{j=1}^{n}a_j-\sum_{j=n+1}^{p}a_j-m-1+\frac{p}{2},$$

$$\chi=2\sum_{j=1}^{m}b_j+\sum_{j=1}^{p}a_j-m-1+\frac{p}{2},$$

$$C_j=\Gamma\left(\begin{matrix}(b)'_m-b_j,1-(a)_n+b_j\\(a)_n-b_j,\frac{1}{2}+(b)_m+b_j\end{matrix}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А**.** Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. − М., «Наука», 1973. − 295 с.

2. Маричев О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). − Мн., «Наука и техника», 1978. − 312 с.

3. Яроцкая Л. Д. Асимптотические представления по параметрам G-функции Мейера специального вида// Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. – Минск : БГТУ, 2017. – № 2 (200). – С. 28 – 32.

4. Yarotskaya L.D. On index transforms with Meijer`s G−function kernels // Integral Transforms and Special Functions. – 2000. – Vol. 10, № 3 − 4. – P. 309 – 320.

УДК 519.71

И.К. Асмыкович, доц., канд. физ-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ В ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМАХ

Классическим объектом изучения в качественной теории управления для обыкновенных линейных систем является система вида

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),$$

$$x(0)=x_0, \tag{1}$$

$$y(t)=Cx(t) \tag{2}$$