УДК 519.86

Н.Н. Буснюк, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ТРУДОВЫЕ РЕСУРСЫ

Классическая задача сетевого планирования (ЗСП) формулируется следующим образом. Задан взвешенный граф-сеть, требуется найти критический путь. Веса дуг интерпретируют длительность (или стоимость) выполнения работ. При решении практических задач возникают ограничения на количество и качество трудовых ресурсов.

В данной работе проведена классификация обобщенных задач сетевого планирования в зависимости от количества работ, количества и производительности работников. Доказаны некоторые утверждения, характерные для типовых задач.

В классической задаче могут задаваться минимальное и максимальное возможные продолжительности работ. В таких случаях для решения задачи используют методы динамического программирования. В случае дискретных весов дуг алгоритмическая сложность значительно возрастает.

На практике особую ценность представляет формирование сетевого плана, основанного на выборе из возможных альтернативных вариантов самого оптимального. В качестве исходных данных в таких задачах задается матрица времён выполнения каждой работы каждым рабочим. Такая задача представляет собой комбинацию задачи о назначении и задачи сетевого планирования. В общем случае можно сделать предположение о возможности выполнения двух и более работ одним рабочим. Решение этой задачи на математическом уровне позволяет выполнять минимизацию сетевого графика по критерию трудовых ресурсов [1].

Классическая ЗСП не допускает мультидуг в сети. Поскольку операцией гомеоморфизма можно разделить дугу на две с узлом посередине, то с целью упрощения изложения в исследуемых задачах допускаются мультидуги (параллельные работы с совпадающими событиями начала и конца работ).

Сформулируем задачу в общем виде. Допустим, что сетевой граф $G\ (V, E)$ содержит n работ, и в наличии у исполнителя имеется m работников.

Каждому работнику присуща своя производительность для каждой из работ. Эти производительности (длительности выполнения работ) определены матрицей назначений $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m,n}$. Целевой функцией данной задачи является критический путь сетевого графика K.

В классической ЗСП предполагается, что работы не простаивают (т.е. трудовой ресурс не является критическим). Практически количество (и качество) трудового ресурса может быть ограничено. Тогда оптимальная длительность выполнения проекта Θ может быть больше чем длина *K* (обозначим $T(K)$).

В зависимости от количества и качества трудового ресурса выделим 4 типа *модифицированной* ЗСП [2].

1А. $m=n$, a_{ij}- константы по всем i.

2А. $m<n$, a_{ij}- константы по всем i.

1Б. $m = n$, a_{ij}- переменные по i.

2Б. $m<n$, a_{ij}- переменные по i.

Случай 1А эквивалентен классической ЗСП. Нет простоев работ, длительность выполнения проекта $\Theta = T(K)$.

В случае 2А при $m < g$ возможно $\Theta > T(K)$, а при $m >= g$ всегда $\Theta = T(K)$. Здесь g – наибольшее количество попарно параллельных работ в сети (т. е. могущих выполняться одновременно).

Доказана *Теорема* 1. Для того чтобы время выполнения проекта равнялось длине критического пути соответствующей сети, необходимо и достаточно $m = g$ работников [3]. В соответствии с теоремой 1 случай $m \geq g$ равносилен задаче 1А, т. е. классической ЗСП.

Выведена формула расчета величины g в зависимости от степеней узлов для момента наступления каждого события.

Разработан алгоритм 1 расстановки работников на работы, позволяющий получить локально оптимальную длительность выполнения проекта [4].

В случае 1Б задача с переменными весами похожа на задачу об оптимистическом и пессимистическом прогнозе и решается методами динамического программирования. Задача с дискретными переменными весами гораздо сложнее.

Результат решения ЗСП зависит от назначений работников на конкретные работы. Исследована связь оптимального решения ЗСП и оптимального решения задачи о назначениях.

Доказана *Теорема* 2. Расстановка рабочих на работы в соответствии с оптимальным (минимальным) решением задачи о назначениях дает сколь угодно плохое решение задачи сетевого планирования [5].

На примерах продемонстрировано, что при переменных a_{ij} различным назначениям работников будут соответствовать различные решения (критические пути) в одной и той же сети.

Можно привести пример, когда для одних и тех же сети G и величины $m < g$ в случае 2А простой работы неизбежен, а в случае 2Б простоя можно избежать. При таких постановках задач в случае 2Б решением задачи будет длина критического пути графа *G*, а в случае 2А в сеть *G* нужно добавлять новые дуги, соответствующие времени простоя, и повторно находить критические пути.

Приведенный пример показывает, что в более сложной задаче 2Б (по количеству перебора всех вариантов назначений работников), критический путь находится за одну итерацию (проход графа) [5]. В случае 2А критический путь нужно искать каждый раз для модифицированной сети.

Для случая 2Б созданы алгоритмы 2 и 3 нахождения локального оптимума [2, 4]. Алгоритм 2 применим для варианта выбора из нескольких работников по принципу самого короткого пути. Алгоритм 3 выбирает вариант из нескольких работ для работника по принципу минимизации времени простоя оставшихся невыполненными работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буснюк Н.Н., Новиков В.А. Метод оптимального решения задачи о назначениях в сетевом планировании // Труды БГТУ. №6(188). – Минск, 2016. – с.170-172.
2. Буснюк Н.Н. Разновидности задачи сетевого планирования, некоторые методы их решения и алгоритмические оценки // Труды БГТУ. №2(224). – Минск, 2019. – с.101-104.
3. Буснюк Н.Н. Критерий количества работников в сети для выполнения проекта без простоев работ // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. – Минск: БГТУ, 2021, №1(242). – С. 61–64.
4. Буснюк Н.Н., Новиков В.А. Метод решения задачи сетевого планирования при ограниченных трудовых ресурсах // Труды БГТУ. №2(200). – Минск, 2017. – с.126-128.
5. Буснюк Н.Н. Исследование взаимозависимости стоимости и длительности проекта в сетевых задачах // Труды БГТУ. №1(230). – Минск, 2020. – с.88-91.