

полотна, Па;  $\omega$  - осадка грунта земляного полотна, м;  $z$  - глубина промерзания грунта земляного полотна, м;  $h_{\text{пуч}}$  - высота морозного пучения, м;  $S$  - степень ровности дорожного покрытия;  $v$  - скорость движения автопоезда, км / ч;  $\Pi$  - производительность автопоезда на вывозке заготовленного леса, м<sup>3</sup>/смену;  $C$  - себестоимость вывозки заготовленного леса, руб/м<sup>3</sup>.

Для составления математической модели системы нами установлена взаимосвязь и даны математические зависимости составляющих структурной схемы.

УДК 630\*37:625.71

Н.П. Вырко, проф.

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

In this article looking questions about determine  $\sigma$  and  $W$  for multi-layer astringent-elastis systems and her construction twolayer model.

Вязкоупругие деформации являются наиболее распространенными в дорожных конструкциях, о чем свидетельствуют исследования, проведенные С.С. Вяловым, В.Д. Казарновским, И.И. Леонovicем, А.П. Лашенко, С.С. Макаревичем, А.Р. Ржаницыным, К.К. Туроровым, В.Н. Яромко и другими.

Наиболее общей теорией, описывающей вязкоупругие свойства материалов, является линейная теория наследственной ползучести Больцмана-Вольтерра, в соответствии с которой связь между напряжениями и деформациями описывается следующим образом:

$$\epsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \right], \quad (1)$$

где  $\epsilon(t)$  - относительная деформация;  $E$  - модуль упругости;  $\sigma(\tau)$  - напряжение;  $K(t-\tau)$  - ядро интегрального уравнения (ядро ползучести);  $t$  - время наблюдения;  $\tau$  - время, предшествующее моменту наблюдения.

Функция  $K(t-\tau)$  должна быть положительной и монотонно убывающей. Простейший вид ее следующий:

$$K(t-\tau) = \delta_i e^{-\beta_i(t-\tau)}, \quad (2)$$

где  $\delta_i$  и  $\beta_i$  - параметры, которые определяются по опытным кривым ползучести.

Решение интегрального уравнения (1) относительно напряжения  $\sigma(\tau)$  можно записать следующим образом:

$$\sigma(t) = E \left[ \varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right], \quad (3)$$

где  $R(t-\tau) = \delta_i e^{-(\delta_i + \beta_i)(t-\tau)}$  - ядро релаксации.

Транспортный путь будем рассматривать как многослойное вязкоупругое полупространство (см. рис.), слои которого подчиняются закону деформирования (1).

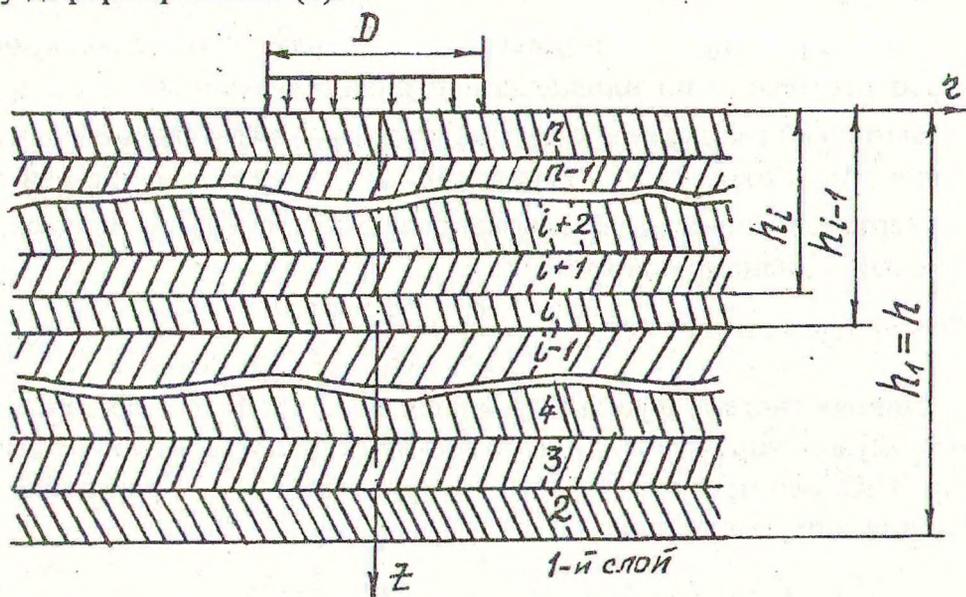


Рис. Многослойное вязкоупругое полупространство

На верхний слой указанного полупространства действует равномерно распределенная по площади круга вертикальная нагрузка, которую можно представить через интеграл Фурье-Бесселя

$$q(r, t) = q(t) \xi \int_0^{\infty} J_1(\xi \alpha) J_0(\rho \alpha) d\alpha, \quad (4)$$

где  $q(t)$  - интенсивность сплошной нагрузки от давления колеса;  $J_1(\xi \alpha), J_0(\rho \alpha)$  - функция Бесселя первого рода первого и нулевого порядка;  $\alpha$  - параметр интегрирования;  $\xi = R/h$  - безразмерная величина, соответствующая радиусу площадки загрузки;  $\rho = r/h$  - безразмерная величина, соответствующая текущему радиусу  $r$ .

Данная задача является осесимметричной. Решение ее будем искать в цилиндрической системе координат через функцию напряжений  $\varphi = \varphi(r, z, t)$ , с которой перемещения связаны зависимостями:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right),$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( (2 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial z} \left( (1 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right),$$

$$U = -\frac{1 + \mu}{E_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} - \frac{1 + \mu}{E} \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} K(t - \tau) d\tau,$$

$$W = \frac{1 + \mu}{E_0} \left( 2(1 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + \frac{1 + \mu}{E} \int_0^t \left( 2(1 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) K(t - \tau) d\tau,$$

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\theta$  - нормальные напряжения, действующие соответственно по площадкам, перпендикулярным осям  $r$  и  $z$  и касательной к окружности радиуса  $r$ ;  $\tau_{rz}$  - касательные напряжения в плоскости  $rz$ ;  $U$  - горизонтальное перемещение по оси  $r$ ;  $W$  - вертикальное перемещение по оси  $Z$ ;  $\nabla^2$  - оператор Лапласа, который в цилиндрических

$$\text{координатах имеет вид } \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Приняв систему функций  $\varphi$ , аналогичную той, которая принята в работе [2] для упругого слоистого полупространства, нами совместно с доц. С.С. Макаревичем получены уравнения для определения напряжений и перемещений

$$\begin{aligned} U_i = & -\frac{1 + \mu_i}{E_i h^2} \int_0^\infty \left\{ A(t) - B(t) [1 - 2\mu_i - \alpha(\eta - 1)] \right\} e^{-\alpha \eta} \alpha^2 J_1(\alpha \rho) d\alpha - \\ & - \frac{1 + \mu_i}{E_i h^2} \sum_{k=2}^i \int_0^\infty \left\{ C_k(t) [2(1 - \mu_i) \xi_k + \lambda_k] + D_k(t) [(2\mu_i - 1) \psi_k - \right. \\ & \left. - \lambda_k \xi_k] \right\} e^{-\alpha \eta} \alpha^2 J_1(\rho \alpha) d\alpha - \frac{1 + \mu_i}{E_i h^2} \int_0^t \int_0^\infty \left\{ A(t) - B(t) (1 - 2\mu_i) - \right. \\ & \left. - \alpha(\eta - 1) \right\} e^{-\alpha \eta} \alpha^2 J_1(\alpha \rho) K_i(t - \tau) d\alpha d\tau - \frac{1 + \mu_i}{E_i h^2} \sum_{k=2}^i \int_0^t \int_0^\infty \left\{ C_k(t) \times \right. \\ & \left. \times [2(1 - \mu_i) \xi_k + \lambda_k \psi_k] + D_k(t) [(2\mu_i - 1) \psi_k - \lambda_k \xi_k] \right\} e^{-\alpha \eta} \alpha^2 \times \\ & \times J_1(\alpha \rho) K_i(t - \tau) d\alpha d\tau; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_i = & -\frac{1+\mu_i}{E_i h^2} \int_0^\infty \left\{ A(t) - B(t) \left[ 2(1-\mu_i) + \alpha(\eta-1) \right] \right\} e^{-\alpha\eta} \alpha^2 J_0(\alpha\rho) d\alpha + \\
& + \frac{1+\mu_i}{E_i h^2} \sum_{k=2}^i \int_0^\infty \left\{ C_k(t) \left[ (1-2\mu_i)\psi_k - \lambda_k \xi_k \right] - D_k(t) \left[ 2(1-\mu_i)\xi_k - \right. \right. \\
& \left. \left. - \lambda_k \psi_k \right] \right\} e^{-\alpha\eta} \alpha^2 J_0(\rho\alpha) d\alpha - \frac{1+\mu_i}{E_i h^2} \int_0^t \int_0^\infty \left\{ A(t) + B(t)(1-2\mu_i) + \right. \\
& \left. + \alpha(\eta-1) \right\} e^{-\alpha\eta} \alpha^2 J_0(\alpha\rho) K_1(t-\tau) d\alpha d\tau + \frac{1+\mu_i}{E_i h^2} \sum_{k=2}^i \int_0^t \int_0^\infty \left\{ C_k(t) \times \right. \\
& \left. \times \left[ (1-2\mu_i)\psi_k - \lambda_k \xi_k \right] - D_k(t) \left[ 2(1-\mu_i)\xi_k - \lambda_k \psi_k \right] \right\} e^{-\alpha\eta} \alpha^2 \times \\
& \times J_0(\alpha\rho) K_1(t-\tau) d\alpha d\tau;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{z,i} = & \frac{1}{h^3} \int_0^\infty \left\{ A(t) + B(t) [1 + \alpha(\eta-1)] \right\} e^{-\alpha\eta} \alpha^3 J_0(\rho\alpha) d\alpha + \\
& + \frac{1}{h^3} \sum_{k=2}^i \int_0^\infty \left[ C_k(t) \lambda_k \psi_k + D_k(t) (\psi_k - \lambda_k \xi_k) \right] e^{-\alpha\eta} \alpha^3 J_0(\alpha\rho) d\alpha;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta,i} = & \frac{2\mu_i}{h^3} \int_0^\infty B(t) \alpha^3 e^{-\alpha\eta} J_0(\rho\alpha) d\alpha - \frac{1}{h^3} \int_0^\infty \left\{ A(t) - B(t) \left[ (1-2\mu_i) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \lambda(\eta-1) \right] \right\} e^{-\alpha\eta} \frac{\alpha^2}{\rho} J_1(\rho\alpha) d\alpha - \frac{2\mu_i}{h^3} \sum_{k=2}^i \int_0^\infty \left[ C_k(t) \xi_k - D_k(t) \psi_k \right] \times \\
& \times \alpha^3 e^{-\alpha\eta} J_0(\rho\alpha) d\alpha - \frac{1}{h^3} \sum_{k=2}^i \int_0^\infty \left\{ C_k(t) \left[ 2(1-\mu_i)\xi_k + \lambda_k \psi_k \right] - \right. \\
& \left. - D_k(t) \left[ (1-2\mu_i)\psi_k + \lambda_k \xi_k \right] \right\} e^{-\alpha\eta} \frac{\alpha^2}{\rho} J_1(\rho\alpha) d\alpha;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r,i} = & -\frac{1}{h^3} \int_0^\infty \left\{ A(t) - B(t) [1 - \alpha(\eta-1)] \right\} e^{-\alpha\eta} \alpha^3 J_0(\rho\alpha) d\alpha - \\
& - \frac{1}{h^3} \sum_{k=2}^i \left[ C_k(t) (2\xi_k + \lambda_k \psi_k) - D_k(t) (\psi_k + \lambda_k \xi_k) \right] e^{-\alpha\eta} \alpha^3 J_0(\alpha\rho) d\alpha + \\
& + \frac{1}{h^3} \sum_{k=2}^i \int_0^\infty \left\{ C_k(t) \left[ 2(1-\mu_i)\xi_k + \lambda_k \psi_k \right] - D_k(t) \left[ (1-2\mu_i)\psi_k + \lambda_k \xi_k \right] \right\} \times \\
& \times e^{-\alpha\eta} \frac{\alpha^2}{\rho} J_1(\alpha\rho) d\alpha;
\end{aligned}$$

$$\tau_{r,z,i} = \frac{1}{h^3} \int_0^\infty [A(t) + B(t)\alpha(\eta-1)] e^{-\alpha\eta} \alpha^3 J_1(\rho\alpha) d\alpha + \frac{1}{h^3} \sum_{k=2}^i \int_0^\infty \left\{ C_k(t) \times \right. \\ \left. \times (\psi_k + \lambda_k \xi_k) - D_k(t) \lambda_k \psi_k \right\} e^{-\alpha\eta} \alpha^3 J_1(\rho\alpha) d\alpha,$$

где  $\mu_i$  - коэффициент Пуассона;

$$\xi_k = 1 + e^{-2\lambda_k}; \quad \psi_k = 1 - e^{-2\lambda_k}$$

Учитывая, что определение напряжений и перемещений для многослойных систем представляет значительные трудности, нами рассмотрена возможность приведения многослойной вязкоупругой дорожной конструкции к двухслойной расчетной модели. Для этого использована расчетная схема, предложенная Б.И. Коганом [1].

Приведение многослойной дорожной конструкции к двухслойной производится последовательно снизу вверх, а эквивалентный модуль деформации или упругости нижнего приведенного слоя определяется по формуле

$$E_{\text{эkv}(i)} = E_{i-1} + B \frac{h_i}{D} E_i, \quad (7)$$

где  $E_{i-1}$  - модуль упругости (деформации) основания;  $E_i$  - модуль упругости (деформации) вышележащего  $i$ -го слоя;  $B$  - коэффициент, равный 0,25 - 0,30;  $h_i$  - толщина  $i$ -го слоя;  $D$  - диаметр круга, равновеликого по площади отпечатку следа колеса расчетного автомобиля.

Тогда вертикальные перемещения (прогиб) для двухслойной конструкции по центру давления колеса автомобиля  $W$  определяется по формуле (6), положив  $i = 2$ ;  $Z = 0$ ;  $r = 0$ .

$$\begin{aligned}
W = W_2 = & -\frac{1+\mu_2}{E_2 h^2} \int_0^\infty \left\{ A(t) + B(t) \left[ 2(1-\mu_2) - \alpha \right] \right\} \alpha^2 d\alpha + \frac{1+\mu_2}{E_2 h^2} \int_0^t \left\{ C_2(t) \times \right. \\
& \times \left[ (1+2\mu_2) \lambda_1^* - \alpha \lambda_2^* \right] - D_2(t) \left[ 2(1-\mu_2) \lambda_2^* - \alpha \lambda_1^* \right] \left. \right\} \alpha^2 d\alpha - \frac{1+\mu_2}{E_2 h^2} \int_0^t \int_0^\infty \left\{ A(t) + \right. \\
& + B(t) \left[ 2(1-\mu_2) - \alpha \right] \left. \right\} \alpha^2 \delta_2 e^{-\beta_2 t} d\alpha dt + \frac{1+\mu_2}{E_2 h^2} \int_0^t \int_0^\infty \left\{ C_2(t) \left[ (1-2\mu_2) \lambda_1^* - \alpha \lambda_2^* \right] - \right. \\
& \left. - D_2(t) \left[ 2(1-\mu_2) \lambda_2^* - \alpha \lambda_1^* \right] \right\} \alpha^2 \delta_2 e^{-\beta_2 t} d\alpha dt,
\end{aligned}$$

где  $t_1 = \frac{D}{v}$  - время, в течение которого нагрузка  $q$  находится над данной точкой;  $v$  - скорость движения автомобиля.

Если автомобиль стоит, то время  $t_1$  определяется временем стоянки.

По формуле (8) определяется прогиб поверхности дороги под колесом автомобиля, т.е. во время нагружения.

После того, как колесо автомобиля уходит с данной точки, происходит разгрузка поверхности дороги, которая восстанавливается на величину

$$\begin{aligned}
W^* = & -\frac{1-\mu_2}{E_2^* h^2} \int_0^\infty \left\{ A(t) + B(t) \left[ 2(1-\mu_2) - \alpha \right] \right\} \alpha^2 d\alpha + \frac{1+\mu_2}{E_2^* h^2} \int_0^\infty \left\{ C_2(t) \left[ (1-2\mu_2) \lambda_1^* - \right. \right. \\
& \left. \left. - \alpha \lambda_2^* \right] - D_2(t) \left[ 2(1-\mu_2) \lambda_2^* - \alpha \lambda_1^* \right] \right\} \alpha^2 d\alpha - \frac{1+\mu_2}{E_2^* h^2} \int_0^{t_2} \int_0^\infty \left\{ A(t) + B(t) \left[ 2(1-\mu_2) - \alpha \right] \right\} \times \\
& \times \alpha^2 \delta_2^* e^{-\beta_2^* t} d\alpha dt + \frac{1+\mu_2}{E_2^* h^2} \int_0^{t_2} \int_0^\infty \left\{ C_2(t) \left[ (1-2\mu_2) \lambda_1^* - \alpha \lambda_2^* \right] - D_2(t) \left[ 2(1-\mu_2) \lambda_2^* - \right. \right. \\
& \left. \left. - \alpha \lambda_1^* \right] \right\} \alpha^2 \delta_2^* e^{-\beta_2^* t} d\alpha dt,
\end{aligned}$$

где  $t_2$  - время, в течение которого данная точка дороги не нагружена, но не более времени  $t_1$ .

Разница между  $W$  и  $W^*$  дает величину остаточной деформации  $W_{\epsilon} = W - W^*$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Коган Б.И. Напряжение и деформация многослойных покрытий: Тр. / ХАДИ. - 1953. - Вып. 14. - С. 33-45.
2. Туроверов К.К. К вопросу исследования напряженного и деформированного состояния упругого слоистого полупространства // Науч. тр./ ЛЛТА им. С.М. Кирова. - 1962. - Вып. 94. - С. 87-101.

### СОДЕРЖАНИЕ

<b>А.Д. Янушко.</b> ЛЕСНОЕ ХОЗЯЙСТВО МОЖЕТ И ДОЛЖНО БЫТЬ РЕНТАБЕЛЬНЫМ....	3
<b>Л.Н. Рожков, Н.Т. Юшкевич.</b> ОСОБЕННОСТИ ЛЕСОХОЗЯЙСТВОВАНИЯ ПО СИСТЕМЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕСПЛОШНЫХ РУБОК ЛЕСА.....	10
<b>О.А. Атрощенко, В.Е. Ермаков, Н.П. Демид.</b> ТЕХНОЛОГИЯ УЧАСТКОВОГО МЕТОДА ЛЕСОУСТРОЙСТВА В БЕЛАРУСИ.....	15
<b>А.С. Федоренчик, Г.И. Завойских.</b> АСПЕКТЫ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ ЛЕСНОЙ СЕРТИФИКАЦИИ.....	19
<b>А.В. Неверов.</b> НОРМАТИВНО-ПРАВОВЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО МЕХАНИЗМА УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ ЛЕСНОГО ХОЗЯЙСТВА...	25
<b>Л.Н. Рожков.</b> МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ВЕДЕНИЮ РЕКРЕАЦИОННОГО МОНИТОРИНГА ЛЕСОВ .....	29
<b>В.Е. Ермаков.</b> ТОВАРНОСТЬ, СПЕЛОСТЬ И ВОЗРАСТ РУБКИ ЕЛОВЫХ ДРЕВОСТОЕВ БЕЛАРУСИ .....	33
<b>Н.И. Федоров.</b> ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ФАУТНОСТЬ СУХОСТОЙНОЙ ДРЕВЕСИНЫ ЕЛИ.....	37
<b>О.А. Атрощенко, К.Ф. Морено, С.В. Ковалевский.</b> СТРОЕНИЕ И ХОД РОСТА СОСНЫ ЯЙЦЕПЛОДНОЙ В НИКАРАГУА	42