

УДК 621.65.01

Павлечко В.Н.

*УО «Белорусский государственный технологический университет», г. Минск, Беларусь***ПАРАМЕТРЫ СРЕДЫ В КАНАЛАХ РАДИАЛЬНОЙ ТУРБИНЫ  
ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УГЛА НАКЛОНА ЛОПАСТЕЙ**

**Аннотация.** Уточнены зависимости для расчета скоростей и давления среды на лопасти радиальной турбины при изменении угла наклона отдельных участков лопасти. Скорости движения среды в направлении, перпендикулярном плоскости лопасти, в тангенциальном и радиальном направлениях, а также давление среды в тангенциальном направлении выражаются похожими зависимостями и различаются только углами наклона участков лопастей. Формулы для определения давления в направлении, перпендикулярном плоскости лопасти, и радиальном направлении различаются как углами наклона участков, так и расчетными зависимостями.

**Ключевые слова:** радиальная турбина, изменение угла наклона лопастей, направление потока, скорости, давление среды, отдельные участки лопастей.

Pavlechko U.N.

*Belarusian State Technological University, Minsk, Belarus***PARAMETERS OF THE MEDIUM IN THE CHANNELS OF A RADIAL  
TURBINE WHEN THE ANGLE OF INCLINATION OF THE BLADES CHANGES**

**Abstract.** The dependences for calculating the velocity and pressure of the medium on the blades of a radial-axial turbine when the angle of inclination of individual sections of the blade changes are clarified. The velocity of the medium in the direction perpendicular to the plane of the blade in tangential and radial directions and the pressure medium in the tangential direction are expressed by similar dependencies and differ only in the angles of the sections of the blades. Formulas for determining the pressure in the direction perpendicular to the plane of the blade and the radial direction differ both in the angles of inclination of the sections and in the calculated dependencies.

**Keywords:** radial turbine, change in the angle of inclination of the blades, flow direction, velocity, pressure of the medium, individual sections of the blades.

**Введение.** Основным уравнением при определении параметров радиальной турбины является уравнение Эйлера [1, 2], в котором отсутствует угол наклона лопастей, являющийся одним из важнейших показателей турбины. Кроме того, в известном уравнении не указана величина воздействия среды на лопасти в промежутке между начальным и конечным участками по ходу движения среды при изменении угла наклона лопастей.

Проведенными ранее исследованиями получены зависимости для определения скоростей движения среды и лопасти, а также давления среды на лопасть при вводе потока радиально [3] и под некоторым углом  $\alpha$  к направлению, обратному окружной скорости (рисунок 1) [4, 5]. Найденные выражения справедливы только для начального участка лопасти по ходу движения рабочей среды при постоянном радиусе. При дальнейшем движении среды в межлопастном пространстве направление и ее скорость изменяются, и при достаточно большой длине лопастей она выходит из турбины практически параллельно плоскости лопасти, не оказывая активного влияния на ее вращение.

Начальная скорость среды  $v_{s1}$  представлена в виде тангенциальной  $v_{su1}$  и радиальной  $v_{sr1}$  составляющих (рисунок 1). С этими скоростями среда воздействует на эле-

ментарный участок лопасти  $AB$  в тангенциальном и радиальном направлениях, величины которых определяются зависимостями [4-6]:

$$v_{su} = v_{st} \cos \alpha; \quad (1)$$

$$v_{sr} = -v_{st} \sin \alpha. \quad (2)$$

Обобщенные скорости движения среды в направлении, перпендикулярном плоскости лопасти  $c_t$ , а также в тангенциальном  $c_{ut}$  и радиальном  $c_{rt}$  направлениях (рисунок 2) определяются соответствующими выражениями [4, 5]:

$$c_t = v_{st} \sin(\beta - \alpha); \quad (3)$$

$$c_{ut} = v_{st} \sin \beta \cdot \sin(\beta - \alpha); \quad (4)$$

$$c_{rt} = v_{st} \cos \beta \cdot \sin(\beta - \alpha), \quad (5)$$

где  $\beta$  – угол между участком лопасти и касательной к окружности лопастей турбины, град (рад).

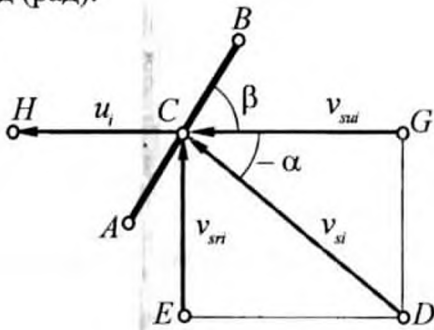


Рисунок 1. – Составляющие скорости воздействия среды на элементарную площадку

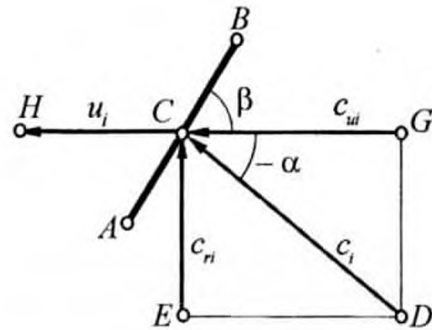


Рисунок 2. – Обобщенные скорости воздействия среды на элементарную площадку

Окружная скорость  $u_i$  элементарного участка лопасти  $AB$  определяется зависимостью от начальной скорости среды  $v_{st}$  [4, 5]:

$$u_i = v_{st} \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta}. \quad (6)$$

Обобщенные давления среды на лопасть в направлении, перпендикулярном плоскости элементарного участка лопасти  $p_t$ , в тангенциальном  $p_{ut}$  и радиальном  $p_{rt}$  направлениях выражаются соответствующими формулами [6]:

$$p_t = \rho v_{st}^2 \frac{\sin^2(\beta - \alpha)}{\sin^2 \beta}; \quad (7)$$

$$p_{ut} = \rho v_{st}^2 \sin^2(\beta - \alpha); \quad (8)$$

$$p_{rt} = \rho v_{st}^2 \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} \sin^2(\beta - \alpha), \quad (9)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $\text{кг/м}^3$ .

**Результаты исследований.** Рассмотрим зависимость расчетных формул скоростей среды и создаваемых ею давлений на лопасть при других углах ее наклона. Предположим, что на  $(i+1)$ -ый элементарный участок лопасти  $BE$ , наклоненный под углом  $\beta_{i+1} = \beta_i + d\beta$  к направлению, обратному окружной скорости, среда воздействует со

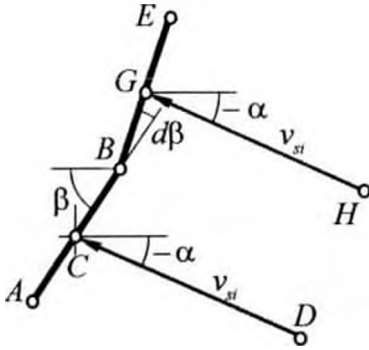


Рисунок 3. – Составляющие скорости воздействия среды на элементарные площадки

скоростью  $v_{st}$ , вектор между которой и касательной к окружности лопастей турбины имеет то же значение угла  $\alpha$  (рисунок 3).

Обобщенная скорость движения среды в направлении, перпендикулярном плоскости элементарного участка лопасти  $BE$ , по аналогии с формулой (3) определяется выражением:

$$c_{i+1} = v_{st} \sin(\beta + d\beta - \alpha) = v_{st} [\sin(\beta - \alpha) + \cos\beta \cdot \cos\alpha \cdot \sin d\beta + \sin\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin d\beta]. \quad (10)$$

При интегрировании второго и третьего членов правой части полученной зависимости с учетом того, что угол  $\alpha$  имеет постоянное значение,

$\beta_1 = \beta_i + d\beta$ , для малых углов  $\sin d\beta = d\beta$ , а согласно [7]:

$$\int \cos\beta d\beta = \sin\beta; \quad \int \sin\beta d\beta = -\cos\beta, \quad (11)$$

в результате решения получаем:

$$c_{i+1} = v_{st} \left[ \sin(\beta - \alpha) + \cos\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \cos\beta d\beta + \sin\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \sin\beta d\beta \right] = v_{st} \sin(\beta_1 - \alpha). \quad (12)$$

Обобщенная скорость движения среды в тангенциальном направлении по аналогии с формулой (4) определяется зависимостью:

$$c_{u,i+1} = v_{st} \sin(\beta + d\beta) \cdot \sin(\beta + d\beta - \alpha) = v_{st} [\sin\beta \cdot \sin(\beta - \alpha) + 2\sin\beta \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha \cdot \sin d\beta + \sin^2\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin d\beta - \cos^2\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin d\beta]. \quad (13)$$

В результате интегрирования второго, третьего и четвертого членов правой части полученной зависимости с учетом того, что угол  $\alpha$  не изменяется,  $\beta_1 = \beta_i + d\beta$ , для малых углов  $\sin d\beta = d\beta$ , и в соответствии с [7]:

$$\int \sin\beta \cdot \cos\beta d\beta = \frac{\sin^2\beta}{2}; \quad \int \sin^2\beta d\beta = \frac{\beta}{2} - \frac{\sin\beta \cdot \cos\beta}{2}; \quad \int \cos^2\beta d\beta = \frac{\beta}{2} + \frac{\sin\beta \cdot \cos\beta}{2}, \quad (14)$$

в результате несложных преобразований получаем:

$$c_{u,i+1} = v_{st} \left[ \sin\beta \cdot \sin(\beta - \alpha) + 2\cos\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \sin\beta \cdot \cos\beta d\beta + \sin\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \sin^2\beta d\beta - \sin\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \cos^2\beta d\beta \right] = v_{st} \sin\beta_1 \cdot \sin(\beta_1 - \alpha). \quad (15)$$

Обобщенная скорость движения среды в радиальном направлении по аналогии с формулой (5) определяется выражением:

$$c_{r,i+1} = v_{st} \cos(\beta + d\beta) \cdot \sin(\beta + d\beta - \alpha) = v_{st} [\cos\beta \cdot \sin(\beta - \alpha) + 2\sin\beta \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin d\beta + \cos^2\beta \cdot \cos\alpha \cdot \sin d\beta - \sin^2\beta \cdot \cos\alpha \cdot \sin d\beta]. \quad (16)$$

При интегрировании второго, третьего и четвертого членов правой части полученной зависимости с учетом того, что угол  $\alpha$  имеет постоянное значение,  $\beta_1 = \beta_i + d\beta$ , для малых углов  $\sin d\beta = d\beta$ , с учетом (14) и [7]:

$$\int \sin \beta \cdot \cos \beta d\beta = -\frac{\cos^2 \beta}{2},$$

получаем:

$$c_{r,i+1} = v_{st} \left[ \cos \beta \cdot \sin (\beta - \alpha) + 2 \sin \alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \sin \beta \cdot \cos \beta d\beta + \right. \\ \left. + \cos \alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \cos^2 \beta d\beta - \cos \alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \sin^2 \beta d\beta \right] = v_{st} \cos \beta_1 \cdot \sin (\beta_1 - \alpha). \quad (17)$$

Сравнение формул (3)-(5), характеризующих скорости воздействия среды на элементарный участок  $AB$ , наклоненный под углом  $\beta$  к направлению, обратному окружной скорости лопасти, с соответствующими формулами (12), (15) и (17), относящимися к элементарному участку лопасти  $BE$ , наклоненному под углом  $\beta_1$ , показывает, что они аналогичны и различаются только углами наклона участков.

Обобщенное давление среды в направлении, перпендикулярном плоскости  $(i+1)$ -го элементарного участка лопасти, по аналогии с формулой (7) определяется зависимостью:

$$p_{i+1} = \rho v_{st}^2 \frac{\sin^2 (\beta + d\beta - \alpha)}{\sin^2 (\beta + d\beta)} = \rho v_{st}^2 \left[ \frac{\sin^2 (\beta - \alpha)}{\sin^2 \beta} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cos 2\alpha \cdot \sin d\beta + \sin 2\alpha \cdot \sin d\beta - \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} \sin 2\alpha \cdot \sin d\beta \right]. \quad (18)$$

При этом принято допущение, что для числителя и знаменателя  $\sin^2 d\beta = 0$ , для знаменателя  $\sin d\beta = 0$ . Проинтегрируем второй, третий и четвертый члены правой части полученного выражения с учетом того, что угол  $\alpha$  не изменяется,  $\beta_1 = \beta_i + d\beta$ , для малых углов  $\sin d\beta = d\beta$ , а согласно [7]:

$$\int \frac{\cos \beta}{\sin \beta} d\beta = \ln |\sin \beta|; \quad \int \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} d\beta = -\frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \beta, \quad (19)$$

в результате решения получаем:

$$p_{i+1} = \rho v_{st}^2 \left[ \frac{\sin^2 (\beta - \alpha)}{\sin^2 \beta} + 2 \cos 2\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \frac{\cos \beta}{\sin \beta} d\beta + \sin 2\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} d\beta - \sin 2\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} d\beta \right] = \\ = \rho v_{st}^2 \left[ \frac{\sin^2 (\beta - \alpha)}{\sin^2 \beta} + 2 \cos 2\alpha \cdot \ln \left| \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta} \right| + \sin 2\alpha \left( \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + 2\beta_1 - 2\beta \right) \right]. \quad (20)$$

Обобщенное давление среды в тангенциальном направлении для  $(i+1)$ -го элементарного участка лопасти по аналогии с формулой (8) определяется выражением:

$$p_{u,i+1} = \rho v_{st}^2 \sin^2 (\beta + d\beta - \alpha) = \rho v_{st}^2 \left[ \sin^2 (\beta - \alpha) + 2 \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin d\beta + \right. \\ \left. + \sin^2 \beta \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin d\beta - \cos^2 \beta \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin d\beta \right]. \quad (21)$$

При этом принято допущение, что  $\sin^2 d\beta = 0$ . В результате интегрирования второго, третьего и четвертого членов правой части полученной формулы с учетом того,

что угол  $\alpha$  имеет постоянное значение,  $\beta_1 = \beta_i + d\beta$ , для малых углов  $\sin d\beta = d\beta$ ,  $\sin^2 d\beta \approx 0$ , и с учетом (14) получаем:

$$p_{u,i+1} = \rho v_{st}^2 \left[ \sin^2(\beta - \alpha) + 2 \cos 2\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \sin \beta \cdot \cos \beta d\beta + \sin 2\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \sin^2 \beta d\beta - \sin 2\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \cos^2 \beta d\beta \right] =$$

$$= \rho v_{st}^2 \left[ \sin^2(\beta - \alpha) + \cos 2\alpha (\sin^2 \beta_1 - \sin^2 \beta) + \sin 2\alpha (\sin \beta \cdot \cos \beta - \sin \beta_1 \cdot \cos \beta_1) \right]. \quad (22)$$

Добавим к правой части полученного уравнения

$$\pm \cos^2 \beta_1 \cdot \sin^2 \alpha; \quad \pm \cos^2 \beta \cdot \sin^2 \alpha,$$

и после преобразований формула (22) упрощается до вида:

$$p_{u,i+1} = \rho v_{st}^2 \sin^2(\beta_1 - \alpha). \quad (23)$$

Обобщенное давление среды в радиальном направлении для  $(i+1)$ -го элементарного участка лопасти по аналогии с формулой (9) определяется зависимостью:

$$p_{r,i+1} = \rho v_{st}^2 \frac{\cos^2(\beta + d\beta)}{\sin^2(\beta + d\beta)} \sin^2(\beta + d\beta - \alpha) = \rho v_{st}^2 \left[ \frac{\cos^2 \beta \cdot \sin^2(\beta - \alpha)}{\sin^2 \beta} + \right.$$

$$+ 2 \frac{\cos^3 \beta}{\sin \beta} \cos^2 \alpha \cdot \sin d\beta + 6 \cos^2 \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin d\beta - 2 \frac{\cos^4 \beta}{\sin^2 \beta} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin d\beta -$$

$$\left. - 4 \frac{\cos^3 \beta}{\sin \beta} \sin^2 \alpha \cdot \sin d\beta - 2 \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin d\beta \right]. \quad (24)$$

При этом принято допущение, что для числителя и знаменателя  $\sin^2 d\beta = 0$ , для знаменателя  $\sin d\beta = 0$ . Добавим к правой части полученной формулы

$$\pm 2 \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \cos^2 \alpha; \quad \pm 2 \cos^2 \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

и после преобразований формула (24) приобретает вид:

$$p_{r,i+1} = \rho v_{st}^2 \left[ \frac{\cos^2 \beta \cdot \sin^2(\beta - \alpha)}{\sin^2 \beta} + 4 \frac{\cos^3 \beta}{\sin \beta} \cos 2\alpha \cdot \sin d\beta + 4 \cos^2 \beta \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin d\beta - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} \sin 2\alpha \cdot \sin d\beta - 2 \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cos^2 \alpha \cdot \sin d\beta \right]. \quad (25)$$

В результате интегрирования второго-четвертого членов правой части полученной зависимости с учетом того, что угол  $\alpha$  имеет постоянное значение,  $\beta_1 = \beta_i + d\beta$ , для малых углов  $\sin d\beta = d\beta$ , и с учетом (14), после несложных преобразований получаем:

$$p_{r,i+1} = \rho v_{st}^2 \left[ \frac{\cos^2 \beta \cdot \sin^2(\beta - \alpha)}{\sin^2 \beta} + 4 \cos 2\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \frac{\cos^3 \beta}{\sin \beta} d\beta + 4 \sin 2\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \cos^2 \beta \cdot d\beta - \sin 2\alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} d\beta - \right.$$

$$\left. - 2 \cos^2 \alpha \int_{\beta}^{\beta_1} \frac{\cos \beta}{\sin \beta} d\beta \right] = \rho v_{st}^2 \left[ \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} \sin^2(\beta - \alpha) + 2(\cos^2 \beta_1 - \cos^2 \beta) \cos 2\alpha - \right.$$

$$\left. - 2 \ln \left| \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta} \right| (\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha) + \left( 2 \sin \beta_1 \cdot \cos \beta_1 - 2 \sin \beta \cdot \cos \beta + \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + 3\beta_1 - 3\beta \right) \sin 2\alpha \right]. \quad (26)$$

Сравнение выражений давлений среды (7) и (9) с соответствующими им формулами (20) и (26) показывает, что они различаются не только углами наклона участков лопастей, но и расчетными зависимостями. Формулы (8) и (23) аналогичны и различаются только разными углами наклона лопастей.

**Выводы.** Скорости движения среды в направлении, перпендикулярном плоскости лопасти, в тангенциальном и радиальном направлениях, а также давление в тангенциальном направлении выражаются аналогичными зависимостями и различаются только углами наклона участков лопастей. Формулы для определения давления в направлении, перпендикулярном плоскости лопасти, и в радиальном направлении различаются как углами наклона участков, так и расчетными зависимостями.

#### Список использованных источников

1. Кривченко, Г.И. Гидравлические машины. Турбины и насосы / Г.И. Кривченко. – М.: Энергия, 1977. – 320 с.
2. Смирнов, И.Н. Гидравлические турбины и насосы / И.Н. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1969. – 400 с.
3. Павлечко, В.Н. Зависимость параметров центростремительной турбины от угла наклона лопастей / В.Н. Павлечко // Химическая промышленность. – 2017. – Т. 94, № 5. – С. 247-254.
4. Павлечко, В.Н. О работе радиальной турбины при вводе закрученного потока / В.Н. Павлечко // Горная механика и машиностроение. – 2017. – № 3. – С. 52-64.
5. Павлечко, В.Н. О влиянии центробежной силы на работу радиальной турбины при вводе закрученного потока / В.Н. Павлечко // Горная механика и машиностроение. – 2017. – № 4. – С. 51-63.
6. Павлечко, В.Н. Изменение тангенциального давления среды на лопасти в каналах радиальной турбины / В.Н. Павлечко // Горная механика и машиностроение. – 2019. – № 3. – С. 29-35.
7. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М.: Наука, 1978. – С. 84-98.

#### Информация об авторе

*Павлечко Владимир Никифорович* – кандидат технических наук, доцент кафедры машин и аппаратов химических и силикатных производств, УО «Белорусский государственный технологический университет» (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Беларусь), e-mail: [paulechka@tut.by](mailto:paulechka@tut.by).

#### Information about the author

*Paulechka Uladzimir Nikiforovich* – Ph. D. (Engineering), Associate Professor of Machines and Apparatus of Chemical and Silicate Industries, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova Str., 220006, Minsk, Belarus), e-mail: [paulechka@tut.by](mailto:paulechka@tut.by).

Поступила в редакцию 23.04.2021 г.