

## К ВОПРОСУ ВЛИЯНИЯ УПРУГОЙ ПОДВЕСКИ ОСЕЙ ДВУХОСНОГО АВТОМОБИЛЯ НА ВЕРТИКАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЕГО ПОДРЕССОРЕННЫХ МАСС ПРИ ТОРМОЖЕНИИ

При движении транспортных систем на неустановившихся режимах движения — при торможении или разгоне — происходит перераспределение нагрузок на оси автопоезда. Этот факт является общеизвестным и подробно освещается в работах Е. А. Чудакова, Я. Х. Закина, Н. А. Бухарина и др. Однако в исследованиях, посвященных данному вопросу, транспортная система принимается жесткой, не имеющей упругой подвески осей, что не соответствует действительности.

При появлении движущих или тормозных сил, действующих на машину, происходит перераспределение нагрузок на ее оси, в результате чего возникают деформации упругих элементов подвески и колебания подрессоренных и неподрессоренных масс транспортной системы.

Указанные колебания могут в зависимости от соотношения параметров подвески системы оказать значительное влияние на общую динамическую нагруженность осей.

Исследуем влияние общих параметров и параметров подвески транспортной системы на вертикальные перемещения ее подрессоренных масс при торможении на примере двухосного автомобиля.

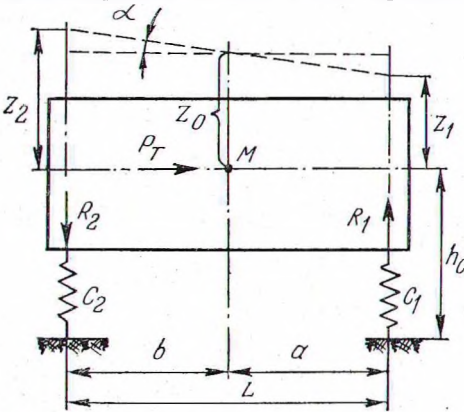


Рис. 1. Схема колебаний двухосного автомобиля в продольной вертикальной плоскости.

Учитывая симметричность системы относительно продольной вертикальной плоскости, проходящей через ее центр тяжести, в расчет принимаем только вертикальные и продольно-угловые колебания масс машины. Подвеску принимаем линейной, неподрессоренные массы и сопротивление подвески колебаниям для упрощения выкладок не учитываем [1]. Кроме того, считаем, что автомобиль движется по пути, не имеющем неровностей.

Схема колебаний автомобиля показана на рис. 1.

Полученная на основании принципа Лагранжа система дифференциальных уравнений, описывающих вертикальные и продольно-угловые колебания подрессоренных масс машины, имеет следующий вид [1]:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 + \eta_1 \ddot{z}_2 &= \frac{P'_1(t)}{M_1} = P_1(t); \\ \eta_2 \ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 + \eta_1 \ddot{z}_1 &= \frac{P'_2(t)}{M_1} = P_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{где } \omega_1^2 = \frac{C_1}{M_1}; \quad \eta_1 = \frac{M_3}{M_1}; \quad \omega_2^2 = \frac{C_2}{M_1}; \quad \eta_2 = \frac{M_2}{M_1}.$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  — вертикальные жесткости передней и задней подвесок автомобиля;

$z_1$  и  $z_2$  — вертикальные перемещения передней и задней осей автомобиля;

$M_1, M_2, M_3$  — приведенные массы [1].

Появление во втором уравнении (в отличие от [1]) двух коэффициентов связи объясняется приведением возмущающих сил к общему знаменателю.

В правой части уравнений (1) — возмущающие силы, как функции времени, действующие на переднюю —  $P_1(t)$  и заднюю —  $P_3(t)$  оси автомобиля.

Для решения системы уравнений (1) применен способ разложения по собственным формам колебаний [2].

Производим замену функций  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$ , входящих в уравнение (1), двумя новыми функциями  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  согласно равенствам:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= a_{11}f_1 + a_{12}f_2; \\ z_2 &= a_{21}f_1 + a_{22}f_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $a_{11}$  и  $a_{12}$  — произвольные числа (можно, например, принять  $a_{11}=a_{12}=1$ ), с которыми  $a_{21}$  и  $a_{22}$  связаны соотношениями собственных форм колебаний.

Подставив уравнения (2) в (1), получим систему двух уравнений относительно функций  $f_1$  и  $f_2$ . После некоторых преобразований с применением свойства ортогональности получили два следующих независимых уравнения относительно новых неизвестных  $f_1$  и  $f_2$ :

$$\ddot{f}_1 + p_1^2 f_1 = \frac{P_1(t)a_{11} + P_2(t)a_{21}}{a_{11}^2 + \eta_2 a_{21}^2 + 2a_{21}a_{11}\eta_1}; \quad (3)$$

$$\ddot{f}_2 + p_2^2 f_2 = \frac{P_1(t)a_{21} + P_2(t)a_{22}}{a_{12}^2 + \eta_2 a_{22}^2 + 2a_{22}a_{12}\eta_1}, \quad (4)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — частоты собственных колебаний системы.

Найденные общеизвестными методами выражения для определения частот  $p_1$  и  $p_2$ , а также соотношения между коэффициентами  $a_{11}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  имеют вид

$$p_{1,2}^2 = \frac{\omega_2^2 + \omega_1^2 \eta_2}{2(\eta_2 + \eta_1^2)} \mp \sqrt{\left[ \frac{\omega_2^2 + \omega_1^2 \eta_2}{2(\eta_2 + \eta_1^2)} \right]^2 - \frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2}{\eta_2 - \eta_1^2}}; \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_{21} &= \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{\eta_1 p_1^2}{\omega_2^2 - p_1^2(\eta_2)}; \\ \chi_{22} &= \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{\eta_1 p_2^2}{\omega_2^2 - p_2^2 \eta_2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Учитывая, что  $a_{11}=a_{12}=1$  и  $a_{21}=\chi_{21}$ ,  $a_{22}=\chi_{22}$ , из выражений (3) и (4) имеем:

$$\ddot{f}_1 + p_1^2 f_1 = \frac{P_1(t) + P_2(t)\chi_{21}}{1 + \eta_2 \chi_{21}^2 + 2\chi_{21}\eta_1}; \quad (7)$$

$$\ddot{f}_2 + p_2^2 f_2 = \frac{P_1(t) + P_2(t)\chi_{22}}{1 + \eta_2 \chi_{22}^2 + 2\chi_{22}\eta_1}. \quad (8)$$

Решение независимых уравнений (7) и (8) зависит от вида возмущающих сил, которые входят в них в общем виде.

Рассмотрим процесс торможения автомобиля. На рис. 2 приведена диаграмма тормозного усилия. Как видно из рисунка, она представлена с известным допущением [3], [4] в виде кусочно-линейной функции.

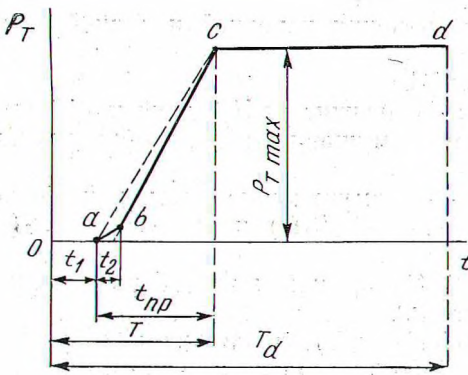


Рис. 2. Тормозная диаграмма.

Промежуток времени  $T$  (см. рис. 2) складывается из времени  $t_1$ , реакции водителя и времени  $t_{пр}$  срабатывания тормозного привода.

По данным В. Г. Розанова, время  $t_1$  может быть принято равным  $0,5 \text{ сек}$ , а  $t_{пр} = 0,3 \text{ сек}$  при быстром нажатии на тормозную педаль. На протяжении отрезка времени  $t_1$  характер нарастания тормозной силы  $P_T$  может быть без особого ущерба [3] принят линейным, т. е.  $P_T = K \cdot t$ .

Темп  $K$  нарастания тормозной силы равен

$$K = \frac{P_T}{t_{пр}}$$

Для автомобиля со всеми тормозными осями величина максимальной тормозной силы, ограниченной сцеплением колес с поверхностью дороги, равна

$$P_{T \max} = G\varphi,$$

где  $G$  — полный вес машины;

$\varphi$  — коэффициент сцепления.

Таким образом, тормозная сила может быть выражена формулой

$$P_{T \max} = \frac{G\varphi}{t_{пр}} \cdot t. \quad (9)$$

При торможении машин вертикальная нагрузка на переднюю ось возрастает на величину  $R_1$ , а на заднюю уменьшается на величину  $R_2$ .

Усилия  $R_1$  и  $R_2$  с учетом (9) могут быть записаны в виде

$$R_1 = \frac{h_c G \varphi}{L t_{пр}} \cdot t; \quad R_2 = - \frac{h_c G \varphi}{L t_{пр}} \cdot t.$$

Реакции  $R_1$  и  $R_2$  можно рассматривать как возмущающие силы, действующие на входы колебательной системы при торможении.

Тогда для возмущающих сил  $P_1(t)$  и  $P_2(t)$  можно записать

$$\left. \begin{aligned} P_1(t) &= \frac{h_c G \varphi}{L t_{пр} M_1} \cdot t = K_T t; \\ P_2(t) &= - \frac{h_c G \varphi}{L t_{пр} M_1} \cdot t = -K_T t, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $K_T = \frac{h_c G \varphi}{L t_{пр} M_1}$ .



В этом случае уравнения (7) и (8) примут вид

$$\ddot{z}_1 + p_1^2 z_1 = \frac{K_T \cdot t}{m_1}; \quad (11)$$

$$\ddot{z}_2 + p_2^2 z_2 = \frac{K_T \cdot t}{m_2}, \quad (12)$$

где  $m_1 = \frac{1 + \eta_2 \chi_{21} + 2\chi_{21} \eta_1}{1 - \chi_{21}}$ ;  $m_2 = \frac{1 + \eta_2 \chi_{22} + 2\chi_{22} \eta_1}{1 - \chi_{22}}$ .

Решая уравнения (11) и (12), для перемещений  $z_1$  и  $z_2$  будем [2] иметь

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{K_T t}{m_1 p_1^2} - \frac{K_T}{m_1 p_1^2 p_1} \sin p_1 t + \frac{K_T t}{m_2 p_2^2} - \frac{K_T}{m_2 p_2^2 p_2} \cdot \sin p_2 t; \\ z_2 &= \chi_{21} \left( \frac{K_T t}{m_1 p_1^2} - \frac{K_T}{m_1 p_1^2 p_1} \sin p_1 t \right) + \chi_{22} \left( \frac{K_T t}{m_2 p_2^2} - \frac{K_T}{m_2 p_2^2 p_2} \cdot \sin p_2 t \right). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Для примера определим реакции  $z_1$  и  $z_2$  для двухосного автомобиля со следующими основными параметрами:  $M = 17,5 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{см}$ ;  $\rho = 300 \text{ см}$ ;  $c_1 = 953 \text{ кг}/\text{см}$ ;  $c_2 = 1934 \text{ кг}/\text{см}$ ;  $a = 516 \text{ см}$ ;  $b = 344 \text{ см}$ ;  $L = 860 \text{ см}$ ;  $h_c = 1,5 \text{ м}$ .

Приведенные массы и коэффициенты, входящие в уравнения (1), составят:  $M_1 = 4,9 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{см}$ ;  $M_2 = 8,4 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{см}$ ;  $M_3 = 2,1 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{см}$ ;  $\omega_1^2 = 194 \frac{1}{\text{сек}^2}$ ;  $\omega_2^2 = 395 \frac{1}{\text{сек}^2}$ ;  $\eta_1 = 0,43$ ;  $\eta_2 = 1,71$ .

По формуле (5) определяем частоты  $p_1$  и  $p_2$ :  $p_1^2 = 157 \frac{1}{\text{сек}^2}$ ,  $p_2 = 319 \frac{1}{\text{сек}^2}$ . Коэффициенты  $\chi_{21}$  и  $\chi_{22}$ , а также  $m_1$  и  $m_2$  равны:  $\chi_{21} = 0,53$ ;  $\chi_{22} = -0,91$ ;  $m_1 = 4,13$ ;  $m_2 = 0,86$ .

Находим коэффициент  $K_T$  при  $\varphi = 0,5$ :

$$K_T = 1018 \text{ см}/\text{сек}^3.$$

Для реакции  $z_1$  и  $z_2$  получим:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= 5,28t - 0,13 \sin 12,5t - 0,21 \cdot \sin 17,9t; \\ z_2 &= -2,53t - 0,07 \sin 12,5t + 0,19 \cdot \sin 17,9t. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

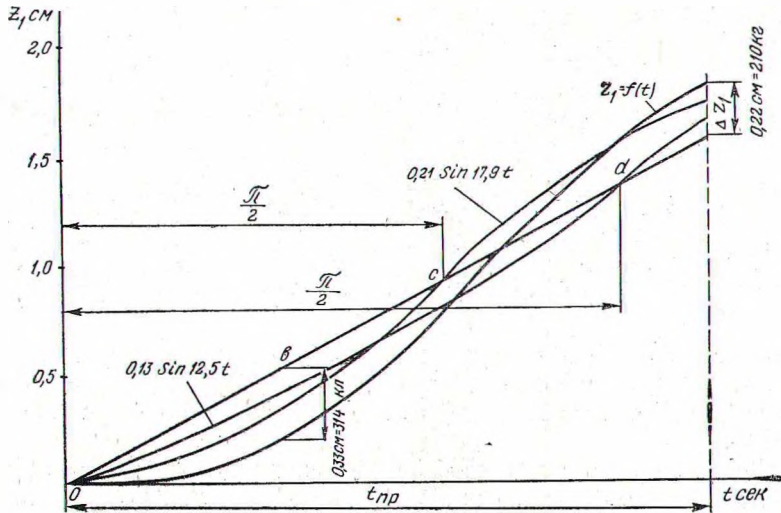
На рис. 3 приведены графики изменения реакции  $z_1$  и  $z_2$  в зависимости от времени, построенные по формулам (14).

Из графиков видно, что по мере возрастания тормозного усилия в интервале времени от  $t = t_1$  до  $t = t_{\text{пр}}$  перемещение, а следовательно, и динамические нагрузки на оси также увеличиваются.

Характерно, что на линию  $oa$ , обусловленную первым членом выражений (14), накладываются колебания с двумя частотами  $p_1$  и  $p_2$ . Линии  $z_1 = b(t)$  и  $z_2 = b(t)$  получены суммированием трех функций. Если обратиться к формулам (13), то видно, что возрастание функции до точки  $a$  обусловлено зависимостями

$$\left. \begin{aligned} z_1' &= \left( \frac{1}{m_1 p_1^2} + \frac{1}{m_2 p_2^2} \right) \cdot \frac{h_c \cdot G \varphi}{L t_{\text{пр}} M_1} t; \\ z_2' &= \left( \frac{\chi_{21}}{m_1 p_1^2} + \frac{\chi_{22}}{m_2 p_2^2} \right) \cdot \frac{h_c G \varphi}{L t_{\text{пр}} M_1} t. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Данные выражения полностью согласуются с физическим смыслом явления и показывают, что интенсивность возрастания функций прямо пропорциональна параметрам  $h_c$ ,  $G$  и  $\phi$  и обратно пропорциональна базе машины  $L$  и величине приведенной массы  $M_1$ . Взаимосвязь между перемещениями  $z_1'$  и  $z_2'$  определяется коэффициентами  $\chi_{21}$  и  $\chi_{22}$ , которые зависят от соотношения приведенных масс машины и частот колебаний.



б

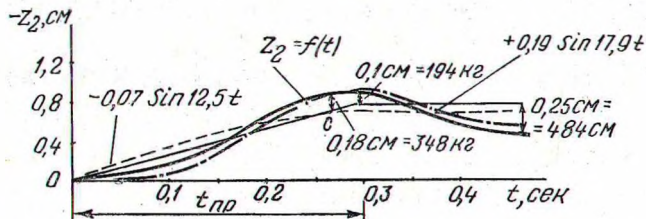


Рис. 3. График перемещений массы двухосного автомобиля при торможении:

а — над передней осью; б — над задней осью.

Колебательный характер кривых  $z_1$  и  $z_2$  определяется наложением синусоидальных функций, имеющих частоты  $p_1$  и  $p_2$ , и зависит, как видно из уравнений (13), от параметров системы.

Амплитуды  $A_i$  указанных движений равны:

$$\text{— для передней оси } A_1 = \frac{K_T}{m_1 p_1^2};$$

$$\text{— для задней оси } A_2 = \frac{K_T}{m_2 p_2^2}.$$

Отсюда важный вывод: амплитуда синусоидальных составляющих реакций  $z_1$  и  $z_2$  зависит от коэффициента  $K_T$ , а значит, от интенсивности возрастания тормозных или движущих сил.

Это значит, что чем интенсивнее разгон машины или ее торможение, тем больше будут амплитуды синусоидального наложения, что может дополнительно увеличить перемещения поддресоренных масс машины и динамическое перераспределение нагрузок на осях.

В случае систем с двумя или более степенями свободы дополнительное изменение реакции в каждый момент времени определяется суммой двух или более синусоидальных движений и в сильной степени зависит от соотношения их частот и знака функции.

При одинаковом знаке функции и близких частотах в области максимума амплитуд может произойти значительное возрастание реакции  $z_1$ . Это может получиться и в том случае, если частоты значительно отличаются друг от друга, однако время максимального проявления функции совпадает.

Проведенные исследования показывают, что перераспределение нагрузок на оси принятой упрощенной динамической системы при учете ее колебательных свойств может быть значительным. Изменение реакции может доходить до 10—15 и даже 30% по отношению к реакции, изменяющейся линейно.

Так, например, из рис. 3, б видно, что в точке С усилие, изменяемое линейно, соответствует  $0,66 \cdot 1934 = 1280$  кг. Амплитуда же, полученная суммированием перемещений синусоидальных составляющих, равна  $0,18 \cdot 1934 = 384$  кг, что составляет 27,2%.

Таким образом, учет колебаний транспортных систем при определении вертикальных перемещений их подрессоренных масс при движении на режимах торможения является важным и вносит существенные поправки в существующие методы расчета.

Предлагаемая методика без существенного изменения может быть использована при расчетах вертикальных перемещений систем на режимах не только торможения, но и разгона.

#### Литература

- [1] Р. В. Ротенберг. Подвеска автомобиля и его колебания. М., 1960. [2] Я. Г. Пановко. Основы прикладной теории упругих колебаний. М., 1967. [3] В. Г. Розанов. Торможение автомобиля и автопоезда. М., 1964. [4] М. М. Шукин. Сцепные устройства автомобилей и тягачей. М.—Л., 1961.