МЕХАНИЗАЦИЯ ЛЕСОРАЗРАБОТОК И ТРАНСПОРТ ЛЕСА

МИНСК 1970

С. С. Макаревич

ВЛИЯНИЕ СДВИГОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОВЯЗКИХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Конструкционные пластики, которые являются упруговязкими материалами, обладают малой сдвиговой жесткостью. У большинства стеклопластиков [1] отношение модуля упругости при растяжении, сжатии к модулю сдвига достигает 7—20, а у однонаправленных стеклопластиков — 20—50. Как паказано в работе [1], поведение стеклопластиков хорошо описывается законом деформирования так называемого «типичного тела»:

$$nB\dot{\varepsilon} + E\varepsilon = \sigma + n\dot{\sigma}, \tag{1}$$

где B — мгновенный модуль упругости;
E — длительный модуль упругости;
n — время релаксации.
Точкой обозначено дифференцирование по времени.

В работах [2—4] довольно подробно рассмотрены вопросы устойчивости центрально сжатых стержней, материал которых подчиняется закону деформирования (1), без учета деформаций сдвига.

Рассмотрим влияние сдвигов на величину мгновенного и длительного пределов устойчивости.

Применяя закон деформирования (1), получим уравнение изгиба упруговязкой балки.

$$\dot{\varkappa}_1 nBI + \varkappa_1 EI = M + n\dot{M}, \tag{2}$$

где $\varkappa_1$ — кривизна оси балки в данном сечении.

Изгибающий момент M и кривизна $\varkappa_1$ здесь могут изменяться не только вдоль длины балки x, но и во времени.

Из уравнения (2) кривизна будет равна

$$\varkappa_1 = e^{-\frac{Et}{nB}}\left[\varkappa_{1(0)} + \int_0^t \frac{M + n\dot{M}}{nBI} e^{\frac{Et}{nB}} dt\right]. \tag{3}$$

Учтем влияние сдвигов на кривизну балки.

Зависимость (1) для касательных напряжений, очевидно, должна иметь вид

$$Hn\dot{\gamma} + G\gamma = \tau + n\dot{\tau}, \tag{4}$$

где G — длительный модуль сдвига,
H — мгновенный модуль сдвига,
n — время релаксации (примем одинаковым, как при растяжении, сжатии, так и при сдвиге).

Учитывая, что от поперечной силы угол сдвига $\gamma = -\frac{dy}{dx}$, касательное напряжение $\tau = \frac{Q}{\alpha F}$, а $Q = \frac{dM}{dx}$, уравнение (4) можно переписать так

$$Hn\dot{y}' + Gy' = -\frac{1}{\alpha F}(M' + n\dot{M}'), \tag{5}$$

где α — безразмерный числовой коэффициент, зависящий от формы сечения.

Дифференцируя по x обе части последнего равенства и считая прогибы балки малыми по сравнению с ее длиной, получим

$$\alpha nHF\dot{\varkappa}_2 + \alpha GF\varkappa_2 = -(M'' + n\dot{M}''). \tag{6}$$

Штрихами здесь, как и везде, обозначаем дифференцирование по длине стержня x.

Решая уравнение (6), получим кривизну балки от сдвигов

$$\varkappa_2 = -e^{-\frac{Gt}{nH}}\left[\varkappa_{2(0)} + \int_0^t \frac{M'' + n\dot{M}''}{\alpha nHF} e^{\frac{Gt}{nH}} dt\right]. \tag{7}$$

Кривизна балки с учетом изгиба и сдвигов согласно выражениям (3) и (7) будет

$$\varkappa = e^{-\frac{Et}{nB}}\left[\varkappa_{1(0)} + \int_0^t \frac{M + n\dot{M}}{nBI} e^{\frac{Et}{nB}} dt\right] -$$

$$-e^{-\frac{Gt}{nH}}\left[\varkappa_{2(0)} + \int_0^t \frac{M'' + n\dot{M}''}{\alpha nHF} e^{\frac{Gt}{nH}} dt\right]. \tag{8}$$

Подынтегральное выражение можно упростить, произведя интегрирование вторых членов уравнений, стоящих в скобках, по частям. Учтем при этом, что $\frac{M_0}{BI} = \varkappa_{1(0)}$, $\frac{M_0''}{\alpha HF} = \varkappa_{2(0)}$, тогда получим

$$\varkappa = \frac{M}{BI} + \frac{B - E}{nB^2 I} e^{-\frac{Et}{nB}} \int_0^t M e^{\frac{Et}{nB}} dt -$$

$$-\frac{M''}{\alpha HF} - \frac{H - G}{\alpha nH^2 F} e^{-\frac{Gt}{nH}} \int_0^t M'' e^{\frac{Gt}{nH}} dt. \tag{9}$$

Считая прогибы балки малыми по сравнению с ее длиной, можем заменить кривизну $\varkappa$ через вторую производную от прогиба по длине y''.

Если стержень загружен только продольной силой P, то момент при наличии случайного прогиба y будет равен

$$M = -Py,$$

и уравнение (9) получит вид

$$y'' = -\frac{Py}{BI} - \frac{B-E}{nB^2I} e^{-\frac{Et}{nB}} \int_0^t Pye^{\frac{Et}{nB}} dt +$$

$$+ \frac{Py''}{\alpha HF} + \frac{H-G}{\alpha nH^2F} e^{-\frac{Gt}{nH}} \int_0^t Py'' e^{\frac{Gt}{nH}} dt. \qquad (10)$$

Исследуем случай шарнирного закрепления стержня по концам. В этом случае можно задаться кривой прогиба стержня в виде синусоиды

$$y = f \sin\frac{\pi x}{l}, \qquad (11)$$

которая отвечает граничным условиям. Здесь f означает стрелу прогиба стержня, которую будем считать переменной во времени.

Подставляя выражение (11) в (10) и сокращая на $\sin\frac{\pi x}{l}$, будем иметь

$$f\left(\frac{P}{BI} + \frac{\pi^2}{l^2}\frac{P}{\alpha HF} - \frac{\pi^2}{l^2}\right) = -\frac{B-E}{nB^2I} e^{-\frac{Et}{nB}} \int_0^t Pfe^{\frac{Et}{nB}} dt -$$

$$-\frac{H-G}{\alpha nH^2F}\frac{\pi^2}{l^2} e^{-\frac{Gt}{nH}} \int_0^t Pfe^{\frac{Gt}{nH}} dt. \qquad (12)$$

Мы получили однородное интегральное уравнение, решение которого можно искать в виде

$$f = Ae^{-\beta t}. \qquad (13)$$

Подставим это решение в уравнение (12)

$$Ae^{-\beta t}\left(\frac{P}{BI} + \frac{\pi^2}{l^2}\frac{P}{\alpha HF} - \frac{\pi^2}{l^2}\right) = -\frac{B-E}{nB^2I} e^{-\frac{Et}{nB}} A \int_0^t Pe^{\left(\frac{E}{nB} - \beta\right)t} dt -$$

$$-\frac{H-G}{\alpha nH^2F}\frac{\pi^2}{l^2} e^{-\frac{Gt}{nH}} A \int_0^t Pe^{\left(\frac{G}{nH} - \beta\right)t} dt. \qquad (14)$$

Предположим теперь, что сила P сохраняет постоянное значение. Если отдалить при этом начальный момент времени в минус бесконечность, то можно будет пренебречь влиянием начальных условий и уравнение (14) примет вид

$$e^{-\beta t}\left(\frac{P}{BI} + \frac{\pi^2}{l^2}\frac{1}{\alpha HF} - \frac{\pi^2}{l^2}\right) = -\frac{B-E}{nB^2I} e^{-\frac{Et}{nB}} P \int_{-\infty}^t e^{\left(\frac{E}{nB} - \beta\right)t} dt -$$

$$-\frac{H-G}{\alpha nH^2F}\frac{\pi^2}{l^2} e^{-\frac{Gt}{nH}} P \int_{-\infty}^t e^{\left(\frac{G}{nH} - \beta\right)t} dt. \qquad (15)$$

Произведя интегрирование в уравнении (15) и сокращая на $e^{-\beta t}$, получим

$$\frac{P}{BI}+\frac{\pi^2}{l^2}\frac{P}{\alpha HF}-\frac{\pi^2}{l^2}=-\frac{B-E}{nB^2I}\frac{P}{\frac{E}{nB}-\beta}-\frac{\pi^2}{l^2}\frac{H-G}{\alpha nH^2F}\frac{P}{\frac{G}{nH}-\beta}. \tag{16}$$

Исследуем поведение стержня с шарнирно закрепленными концами, нагруженного продольной силой P.

Если в решении (13) положить $\beta=-\infty$, то прогиб мгновенно возрастает до бесконечности. При этом происходит мгновенное выпучивание стержня.

Значение силы P, определенное из уравнения (16) при $\beta=-\infty$, называют мгновенным пределом устойчивости:

$$P_{\text{м (сд)}}=\frac{\pi^2 BI}{l^2\left(1+\frac{\pi^2 BI}{l^2}\frac{1}{\alpha HF}\right)}=\frac{P_{\text{м}}}{1+\frac{P_{\text{м}}}{\alpha HF}}, \tag{17}$$

где $P_{\text{м(сд)}}$, $P_{\text{м}}$ — мгновенный предел устойчивости соответственно с учетом и без учета сдвигов.

Если в решении (13) положить $\beta=0$, то прогиб не будет меняться во времени, но может иметь любую величину. Значение силы P, определенное из формулы (16) при $\beta=0$, называют длительным пределом устойчивости:

$$P_{\text{д(сд)}}=\frac{\pi^2 EI}{l^2\left(1+\frac{\pi^2 EI}{l^2}\frac{1}{\alpha GF}\right)}=\frac{P_{\text{д}}}{1+\frac{P_{\text{д}}}{\alpha GF}}, \tag{18}$$

где $P_{\text{д(сд)}}$, $P_{\text{д}}$ — длительный предел устойчивости соответственно с учетом и без учета сдвигов.

Из формул (17, 18) видно, что влияние сдвигов на устойчивость сжатых стержней из армированных пластиков довольно существенно, особенно при небольших гибкостях.

Так, при гибкости 40 и $E/G=30$ для прямоугольного сечения получим $P_{\text{д(сд)}}=0{,}78\,P_{\text{д}}$, что говорит о необходимости учета влияния сдвигов на устойчивость сжатых стержней из стеклопластиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Тарнопольский, А. М. Скудра. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. Рига, 1966.

2. А. Р. Ржаницын. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.— Л., 1949.

3. А. Р. Ржаницын. Устойчивость при ползучести. В сб.: Проблемы устойчивости в строительной механике. М., 1965.

4. А. Р. Ржаницын. Устойчивость систем, обладающих свойством ползучести. В сб.: Ползучесть строительных материалов и конструкций. М., 1964.