

А. Е. Сержанов

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ИЗОБРАЖЕНИЙ, ВЫПОЛНЕННЫХ ЩЕЛЕВОЙ ПАНОРАМНОЙ КАМЕРОЙ

В последние годы для различных практических целей начала применяться щелевая аэрофотосъемка. В частности, для определения запасов древесины при проектировании лесозаготовительных предприятий использовался аэрофотоаппарат АШАФА-2, установленный на самолете [1]. Для тех же целей может быть использован панорамный щелевой фотоаппарат.

Однако применение щелевой фотосъемки тормозится тем, что геометрическая структура фотоизображения, полученного щелевой камерой, недостаточно изучена.

В настоящей работе исследуется геометрическая структура панорамных снимков, выполненных щелевой камерой. Будем пользоваться терминологией, принятой в книге Ф. А. Коршака [2].

Принципиальная схема работы панорамной щелевой камеры следующая (рис. 1):

1. Через объектив фотоаппарата S изображение объектов, расположенных в предметном пространстве, пучком Sab , вращающимся вокруг неподвижной оси NM , проектируется на фотопленку k , движущуюся с определенной скоростью по поверхности, описываемой прямой ab . Для практического использования фотопленка k разворачивается в плоскость и получаем плоское изображение объектов предметного пространства.

2. Наиболее простой с геометрической точки зрения, но в то же время и наиболее важный с точки зрения практики случай получим, если основание пучка ab параллельно оси вращения NM , а центр пучка S лежит на оси вращения. Тогда ab будет описывать цилиндрическую поверхность, являющуюся круглым цилиндром.

Если пленка движется в сторону, противоположную направлению вращения пучка, со скоростью, равной $-\bar{v}$ (\bar{v} — линейная скорость основания пучка ab), то геометрически получаем изображение объектов предметного пространства на круглом цилиндре, длина окружности основания которого равна $2\pi f$ (f — фокусное расстояние фотокамеры). При разворачивании поверхности цилиндра на плоскость получим плоское изображение, причем длина картинной поверхности, соответствующей одному обороту пучка, будет равна $2\pi f$.

Для получения формул, связывающих положение объекта в пространстве и его изображения на картинной плоскости, установим в пространстве декартову прямоугольную систему координат. За начало координат выберем точку S , ось аппликат направим по оси вращения NM , оси абсцисс и ординат возьмем произвольно. Точка $P(x, y, z)$, расположенная в предметном пространстве, изобразится на поверхности цилиндра

точкой P' , положение которой будет определено координатами u, v (u — величина отрезка P_1P' , v — величина угла OSP_1' (рис. 2)).

Установим зависимость между координатами точек P и P' . Из подобия треугольников SP_1P' и SP_1P следует, что

$$\frac{P_1P'}{SP_1} = \frac{P_1P}{SP_1}$$

или

$$\frac{u}{f} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

отсюда

$$u = \frac{fz}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{1}$$

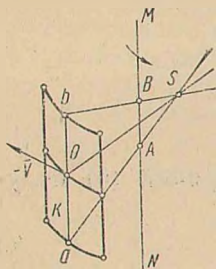


Рис. 1. Принципиальная схема проектирования.

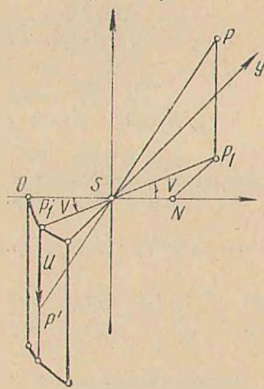


Рис. 2. Схема проектирования в основном случае.

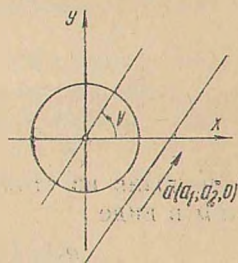


Рис. 3. Изображение бесконечно удаленных точек.

Из треугольника SNP_1 вытекает, что

$$\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{2}$$

Итак, зная координаты точки P в пространстве по формулам (1) и (2), находим координаты (u, v) ее изображения на цилиндре. Развертывая цилиндр на плоскость, получим на ней систему координат u, v , которая, как легко видеть, не будет декартовой прямоугольной. Действительно, первая квадратичная форма поверхности на ней будет иметь вид

$$ds^2 = du^2 + f^2 dv^2. \tag{3}$$

Введя новые переменные

$$\tilde{u} = u, \quad \tilde{v} = fv, \tag{4}$$

получим формулу (3) в виде

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2,$$

т. е. \tilde{u}, \tilde{v} дают декартовы прямоугольные координаты точки P' . В дальнейшем исследование будем вести в координатах u, v . При необходимости перехода к координатам \tilde{u}, \tilde{v} применим формулы (4).

3. Формулы (1) и (2) позволяют находить изображение любого геометрического образа, расположенного в предметном пространстве. Пусть в пространстве дана произвольно расположенная прямая. Ее параметрические уравнения:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + a_1 t; \\y &= y_0 + a_2 t; \\z &= z_0 + a_3 t.\end{aligned}\tag{5}$$

Найдем ту кривую, в которую перейдет прямая (5) при рассматриваемом проектировании плоским пучком. Для этого в формулы (1) и (2) подставим x , y , z из уравнений прямой и получим:

$$\begin{aligned}\cos v &= \frac{x_0 + a_1 t}{\sqrt{(x_0 + a_1 t)^2 + (y_0 + a_2 t)^2}}; \\ \sin v &= \frac{y_0 + a_2 t}{\sqrt{(x_0 + a_1 t)^2 + (y_0 + a_2 t)^2}}; \\ u &= \frac{f(z_0 + a_3 t)}{\sqrt{(x_0 + a_1 t)^2 + (y_0 + a_2 t)^2}}.\end{aligned}$$

Исключив из этих формул параметр t , изображение прямой (5) получим в виде

$$u = f \left[\frac{a_1 z_0 - a_3 x_0}{a_1 y_0 - a_2 x_0} \sin v + \frac{a_3 y_0 - a_2 z_0}{a_1 y_0 - a_2 x_0} \cos v \right].\tag{6}$$

Это выражение легко преобразовать к виду

$$u = C \sin(v + \varphi),\tag{7}$$

где $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\cos \varphi = \frac{A}{C}$, $\sin \varphi = \frac{B}{C}$.

В нашем случае

$$A = \frac{a_1 z_0 - a_3 x_0}{a_1 y_0 - a_2 x_0} \cdot f; \quad B = \frac{a_3 y_0 - a_2 z_0}{a_1 y_0 - a_2 x_0} \cdot f.$$

Выясним, в каких пределах меняется v , когда текущая точка пробегает всю прямую.

Прямая $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ проектируется на плоскость xSy в прямую $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2}$, $z=0$.

Бесконечно удаленная точка прямой изобразится двумя точками на картинной плоскости. Одной соответствует значение $v = v_0 - \pi$, другой — $v = v_0$ (рис. 3). Если v пробегает все значения интервала $[v_0 - \pi, v_0]$, то соответствующая точка пробегает всю прямую. v_0 определяется из формул:

$$\sin v_0 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}; \quad \cos v_0 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.\tag{8}$$

Найдем значение u_0 , соответствующее v_0 . Для этого в уравнение (6) подставим $\sin v_0$ и $\cos v_0$ из формул (8) и после несложных преобразований получим

$$u_0 = \frac{fa_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Для второй точки:

$$\sin(v_0 - \pi) = -\sin v_0; \cos(v_0 - \pi) = -\cos v_0.$$

Следовательно, бесконечно удаленной точке прямой на картинной плоскости будут соответствовать две точки: $\left(\frac{fa_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, v_0\right)$ и

$$\left(-\frac{fa_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, v_0 - \pi\right).$$

Итак, прямая, произвольно расположенная в предметном пространстве на картинной плоскости, изобразится дугой синусоиды (7), где v пробегает интервал $[v_0 - \pi, v_0]$.

4. Естественно возникает следующая задача: найти изображение произвольной кривой, расположенной в предметном пространстве.

Будем предполагать, что кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t), \end{aligned} \tag{9}$$

что не нарушает общности рассуждений, так как любую кривую в пространстве можно задать уравнением (9). Чтобы получить изображение этой линии на картинной плоскости, следует из уравнений

$$\begin{aligned} \cos v &= \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}, \quad \sin v = \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}, \\ u &= \frac{fz(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \end{aligned} \tag{10}$$

исключить параметр t . Тогда уравнение искомой линии получится в виде

$$F(u, v) = 0.$$

В качестве примера рассмотрим винтовую линию $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$. Подставляя x , y , z в выражение (10) и исключая параметр t , получим

$$u = \frac{fb}{a} v,$$

т. е. винтовая линия изобразится прямой.

5. Формулы (1) и (2) не дают возможности находить координаты точки P , зная координаты ей соответствующей точки на картинной плоскости. Поэтому для решения метрических задач необходимо иметь стереоскопическое изображение точки P , для получения которого съемку предметного пространства производят двумя панорамными камерами.

Взяв оси вращения параллельными на расстоянии l друг от друга и выбрав соответствующим образом систему координат (рис. 4), получим:

для первой панорамы

$$\cos v_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin v_1 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$u_1 = \frac{fz}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

второй панорамы

$$\cos v_2 = \frac{x-l}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}; \quad \sin v_2 = \frac{y}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}};$$

$$u_2 = \frac{fz}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}.$$

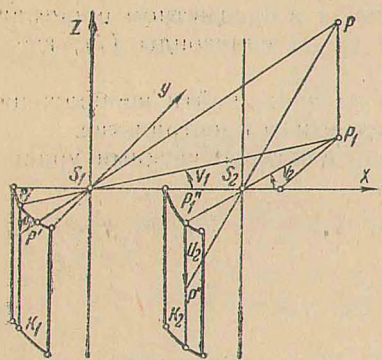


Рис. 4. Стереоскопическая проекция.

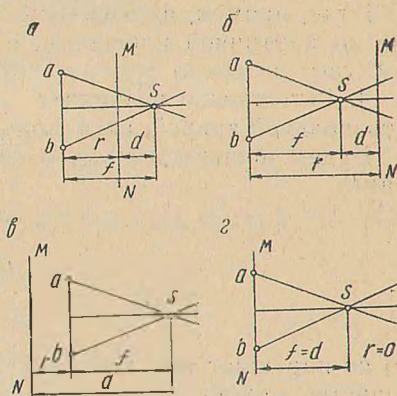


Рис. 5. Различные случаи проектирования.

Из полученных формул, зная координаты точек P' (u_1, v_1), P'' (u_2, v_2), легко находятся координаты точки $P(x, y, z)$:

$$x = \frac{l \operatorname{tg} v_2}{\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1}; \quad y = \frac{l \operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2}{\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1};$$

$$z = \frac{u_1 l}{f} \frac{\operatorname{tg} v_2}{(\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1) \cos v_1}. \quad (11)$$

Если мы умеем восстанавливать координаты точки P по координатам изображений этой точки, то мы умеем решать различные метрические задачи.

6. При различных положениях центра и основания пучка относительно оси NM (рис. 5) можно получить формулы, аналогичные (1) и (2).

Приведем соответствующие результаты без доказательства. Обозначим расстояние от оси NM до основания пучка буквой r , расстояние от NM до центра пучка d , а картинное расстояние буквой f . Тогда в первом случае:

$$\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$u = \frac{fz}{\sqrt{x^2 + y^2 - d^2}}.$$

Длина панорамы, соответствующей одному обороту пучка, равна $2\pi(f-d)$.

Во втором случае:

$$\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$u = \frac{fz}{\sqrt{x^2 + y^2 + d}}.$$

Длина панорамы — $2\pi(f+d)$.

В третьем случае:

$$\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$u = \frac{fz}{\sqrt{x^2 + y^2 - (r+f)}}.$$

Длина панорамы — $2\pi r$.

В четвертом случае:

$$\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$u = \frac{fz}{\sqrt{x^2 + y^2 - d}}.$$

Длина панорамы — $2\pi f$.

Пользуясь полученными формулами, можно найти изображение любого геометрического образа, лежащего в предметном пространстве. Эти уравнения естественно будут иметь более сложный вид, чем в основном случае.

Для решения метрических задач в четырех перечисленных случаях можно получить формулы, аналогичные формулам (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. П. В. Гордеев. Изучение лесосырьевых баз при помощи аксонометрической аэрофотосъемки. «Лесная промышленность», 1954, № 6.
2. Ф. А. Коршак. Центральное проектирование движущимся пучком лучей в фотограмметрии. Махачкала, 1962.