

#### 4. РЕЗАНИЕ ДРЕВЕСИНЫ

УДК 674.05

А.В. Моисеев, канд. техн. наук,  
Л.М. Двоскин, канд. техн. наук,  
В.А. Столяр, А.С. Дименштейн

#### О ВЕЛИЧИНЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ЛЕЗВИИ РЕЗЦА ПРИ ЕГО ВНЕДРЕНИИ В ДРЕВЕСИНУ

Определение прочностных характеристик рабочей части инструмента требует точного знания величины напряжений, действующих на инструмент в процессе резания. Для расчетов и построения эпюр напряжений взяты уравнения контактной задачи теории упругости [1]. Схема, для которой ведется расчет, представлена на рис. 1, причем внедрение резца в древесину соизмеримо с радиусом затупления его. При этом поверхность, ограничивающая резец в зоне контакта, может быть представлена как парабола [1].

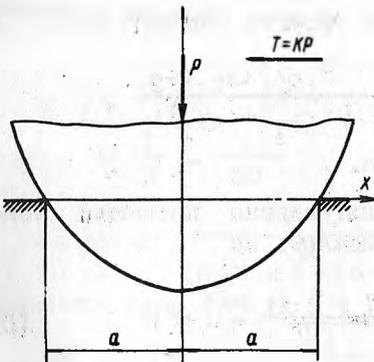


Рис. 1. Расчетная схема внедрения резца в древесину.

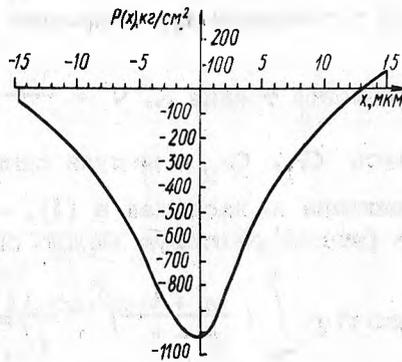


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений на лезвии резца.

Пусть между сжимаемыми телами, кроме сжимающей силы  $P$ , действует сила трения  $T = KP$ , где  $K$  — коэффициент трения. Согласно [2] уравнение, которое дает нормальные напряжения, имеет вид

$$P_x = \frac{\cos \pi \gamma}{\pi} \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} f'(x) = \frac{\cos 2\pi \gamma}{\pi^2} (a+x)^{\frac{1}{2} - \gamma} x$$

$$(a-x)^{\frac{1}{2} + \gamma} \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{\gamma} \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t-x)} \quad (1)$$

В уравнении (1)

$$f(x) = \frac{c - f_1(x) - f_2(x)}{\theta_1 + \theta_2} \quad (2)$$

где  $c$  - произвольная постоянная;  $f_1(x), f_2(x)$  - уравнения поверхностей, ограничивающих сжимаемые тела до начала сжатия;  $\theta_1, \theta_2$  - коэффициенты, которые учитывают упругие свойства сжимаемых тел и выражаются через модули упругости  $E_1, E_2$  и коэффициенты Пуассона  $\mu_1$  и  $\mu_2$  равенствами:

$$\theta_1 = \frac{2}{\pi E_1} (1 - \mu_1^2); \quad \theta_2 = \frac{2}{\pi E_2} (1 - \mu_2^2); \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi \nu} \quad (4)$$

где  $\nu$  - коэффициент, зависящий от упругих свойств тел и

коэффициента трения  $K$ ,  $\nu = \frac{(\theta_1 + \theta_2) G_1 G_2}{K (G_1 + G_2)}$ .

Здесь  $G_1, G_2$  - модули сдвига.

Величина  $a$ , входящая в (1), - полуширина площадки контакта (рис. 1), которую можно определить из

$$\cos \pi \gamma \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{\gamma} \frac{t f'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = -\pi P \quad (5)$$

Используя приведенные положения теории упругости, решим задачу о контактных напряжениях на лезвии резца, когда внедрение резца в древесину соизмеримо с его радиусом затупления.

Так как мы рассматриваем плоскую задачу, то  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  будут уравнениями плоских кривых;  $f_1(x) = 0$  - уравнение прямой линии, ограничивающей обрабатываемый материал

до внедрения;  $f_2(x) = \frac{x^2}{2R}$  - уравнение параболы, ограничивающей контур резца, где  $R$  - радиус затупления. Используя

[3], задачу будем решать при:

$$E_1 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; E_2 = 1,3 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; \mu_1 = 0,25; \mu_2 = 0,04;$$

$$K_{\text{тр}} = 0,8; R = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}; P = 0,10 \text{ кг/мм.}$$

Зная все необходимые коэффициенты, можно найти  $\gamma$

$$\gamma \approx \frac{1}{30}.$$

По известным функциям  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  найдем  $f(x)$  из выражения (2) и ее производную  $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{x}{R(\theta_1 + \theta_2)} = -2,08 \cdot 10^3 \frac{x}{R}.$$

Ранее было установлено, что полуширина контакта  $a$  определяется решением уравнения (5). Для того чтобы решить его, необходимо взять интеграл

$$I = \int_{-a}^a \left( \frac{a+t}{a-t} \right)^{\frac{1}{30}} \frac{t^2 dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \quad (6)$$

Запишем интеграл в комплексном виде. Применяя теорию вычетов, получим

$$\int_L \frac{z^2 dz}{(a+z)^\alpha (a-z)^{1-\alpha}} = 2\pi i \operatorname{res}(\infty), \quad (7)$$

где  $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{30}$ .

Разложив  $\frac{z^2}{(a+z)^\alpha (a-z)^{1-\alpha}}$  в ряд Лорана и учитывая, что  $\operatorname{res}(\infty) = -C_{-1}$ , получим

$$\int_L \frac{z^2 dz}{(a+z)^\alpha (a-z)^{1-\alpha}} = -\frac{2\pi i}{(-1)^\alpha} a^2 (2\alpha^2 - 2\alpha + 1).$$

Распишем интеграл в левой части как интеграл по границам

$$\int_{-a}^a \frac{z^2 dz}{(a+z)^\alpha (a-z)^{1-\alpha}} = e^{2\pi i(1-\alpha)} x$$

$$\int_{-a}^a \frac{z^2 dz}{(a+z)^\alpha (a-z)^{1-\alpha}} = -\frac{2\pi i}{(-1)^\alpha} a^2 (2\alpha^2 - 2\alpha + 1).$$

Отсюда окончательно получим

$$\int_{-a}^a \frac{t^2 dt}{(a+t)^\alpha (a-t)^{1-\alpha}} = \frac{\pi a^2 (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\sin \pi \alpha}.$$

Уравнение (5) будет иметь вид

$$\frac{\pi a^2}{\sin \pi \alpha} (2\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 1,57 \cdot 10^{-3} \text{ RP}.$$

Решая его, получаем  $a = 0,89 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$

Подставляя все полученные данные в уравнение (1), можно подсчитать нормальные напряжения на участке контакта. Интеграл, находящийся в правой части уравнения, имеет следующие особенности: во-первых, у него есть особые точки по краям интервала интегрирования, а, во-вторых, он является сингулярным интегралом. Для того чтобы взять этот интеграл, перейдем к комплексному виду

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t}{(a+t)^\alpha (a-t)^{1-\alpha}} \frac{dt}{t-z},$$

где  $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{30}$ , как и в (7).

Используя основную теорему о вычетах, после ряда преобразований запишем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{t}{(a+t)^\alpha (a-t)^{1-\alpha}} \frac{dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \times \\ & \times \int_{-a}^a \frac{t}{(a+t)^\alpha (a-t)^{1-\alpha} e^{2\pi i(1-\alpha)}} \frac{dt}{t-z} = \\ & = \int_{\alpha}^{\alpha} \frac{z}{(a+z)^\alpha (a-z)^{1-\alpha}} - e^{\pi i(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Используя формулу Сохоцкого-Племеля, окончательно получим

$$\begin{aligned} & \frac{t}{-a(a+t)^\alpha (a-t)^{1-\alpha}} \frac{dt}{t-x} = \pi \operatorname{ctg} \pi \alpha \times \\ & \times \frac{x}{(a+x)^\alpha (a-x)^{1-\alpha}} + \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}. \end{aligned}$$

Дальнейшие расчеты проводились с помощью электронно-вычислительной машины МИР-2, в результате чего было получено распределение нормальных напряжений на лезвии резца (рис. 2). Эти напряжения не вызывают разрушений лезвия. Опыт показывает, что материалы способны выдерживать весьма значительные контактные напряжения. Это объясняется тем, что эти напряжения быстро убывают по мере удаления от зоны контакта, а также тем, что материал вблизи площадки контакта испытывает не одноосное, а двухосное сжатие. При двухосном сжатии материал способен выдерживать значительные напряжения. Так, согласно [4], допускаемые контактные напряжения для стали 20 равны  $8500 - 10500 \text{ кг/см}^2$ , для стали 20Х -  $12000 - 14000 \text{ кг/см}^2$ . Практика показала, что при условиях, для которых решалась задача, разрушения не происходит. Это и подтверждается расчетом.

Кривая распределения напряжений получилась несимметричной, так как в крайних точках, где отсутствуют сжимающие напряжения, вызванные силой Р, есть напряжения растяжения и сжатия, вызванные изгибом лезвия от действия силы трения.

Резюме. При помощи уравнений теории упругости получены контактные напряжения на лезвии резца при его внедрении в древесину.

### Л и т е р а т у р а

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М., 1953.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М., 1949.
3. Моисеев А.В., Астафиев А.Н. Исследование процессов резания древесины с подачами от 2 до 150 микрон. - В сб.: Мат-лы совещания УКРНИИМОД. Киев, 1971.
4. Степин П.А. Соппротивление материалов. М., 1964.

УДК 674.05

А.В. Моисеев, канд.техн.наук

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО РЕЗАНИЯ ДРЕВЕСИНЫ

Главным способом обработки чистовых поверхностей древесины является фрезерование (фрезерный станок, фуганок, рейсмус и т.п.). Особенностью этого вида резания является образование стружки переменного сечения, толщина которой в процессе резания изменяется от нуля до максимума. Стружка в