Минск 1972

М. А. Левин

СТАЦИОНАРНЫЕ И АМПЛИТУДНО-ФАЗО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ РЕАКЦИЙ КОЛЕСА С ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ ШИНОЙ

Лесовозы на колесном ходу с пневмобаллонами подвержены явлению бокового увода, поэтому устойчивость движения и управляемость лесовоза исследуются с привлечением теорий увода М. В. Келдыша и И. Рокара. Нами предложена теория увода [1—5], уточняющая названные. Она приводит к разностным уравнениям, учитывает проскальзывание в области площадки контакта колеса с дорогой и переменность реакций связей, действующих со стороны дороги на колесо.

В настоящей работе с применением ЭВМ получены зависимости для боковой силы и стабилизирующего момента в функции от угла увода колеса при стационарном уводе. Основываясь на сравнении амплитудно-фазо-частотных характеристик по предложенной теории и теории М. В. Келдыша, мы устанавливаем выражения для коэффициентов в теории М. В. Келдыша, которые обычно находятся только опытным путем.

В работе приняты следующие обозначения:

r, $2a$ — соответственно радиус шины и длина площадки контакта, *м;*

c_1, c_2 — радиальная и боковая жесткость на единицу длины $2\pi r$, *кг/м²;*

N — натяжение периферии шины, *кг;*

μ_1, μ_2 — длина задней и передней области проскальзывания, *м;*

λ_1, λ_2 — отклонения линии качения соответственно на концах задней и передней области проскальзывания, *м;*

λ_1', λ_2' — тангенсы угла наклона касательной линии качения к срединной плоскости колеса в точках с отклонениями λ_1 и λ_2;

x, η — координаты, *м;*

$\varepsilon \approx \operatorname{tg} \varepsilon$ — угол увода, *рад;*

$$e = \varepsilon/\varepsilon_{\max}, \ \varepsilon_{0\,\max} = \varepsilon_{\max}/g;$$

e_m — значение e, при котором $M = M_{\max}$;

q — давление в плоскости качения дороги на единицу длины площадки контакта, *кг/м;*

P, Q — вертикальная нагрузка на колесо и боковая сила, *кг;*

$$Q_0 = Q/Q_{\max}, \ 0 \leqslant Q_0 \leqslant 1;$$

M — стабилизирующий момент, *кгм;*

$$M_0 = M/M_{\max}, \ 0 \leqslant M_0 \leqslant 1;$$

$$m_{\max} = M_{\max}/(Pfa);$$

f — коэффициент трения скольжения;

$$\tau_0 = 2a\sqrt{\frac{c_2}{N}},\quad h_0 = \frac{1}{\tau_0},\ \sigma_1 = \mu_1/2a,\ \sigma_2 = \mu_2/2a;$$

$l_1 = \lambda_1/2a,\ l_2 = \lambda_2/2a,\ g = f\dfrac{c_1 a}{c_2 r}$ — безразмерные величины;

$$h = 2ah_0\ м;$$

C — проекция центра площадки контакта на срединную плоскость;
A, H — точки на срединной плоскости колеса;
Y, Y_c, $Y_н$ — соответственно ординаты точек A, C и H, *м;*
ρ — ордината точки на линии качения, сответствующей точке A, *м;*
θ — угол поворота срединной плоскости, *рад;*
ξ — смещение линии качения от срединной плоскости в точке C, *м;*
φ — угол между касательной к линии качения и срединной плоскостью в точке, соответствующей точке C, *рад;*
p — параметр изображения по Лапласу;
ω, $\nu = 2a\omega$ — соответственно частота ($1/м$) и безразмерная частота;
$A_1(j\nu)$, $A_2(j\nu)$, $A_1'(j\nu)$, $A_2'(j\nu)$ — составляющие комплексных передаточных коэффициентов;
$c_б$, $c_у$ — соответственно боковая (*кг/м*) и угловая жесткость шины, *кгм/рад;*
k — коэффициент увода, *кг/рад;*
$\alpha(1/м^2)$, $\beta(1/м)$ — коэффициенты в теории М. В. Келдыша;
γ — коэффициент, определяющий значения α и β.

Основываясь на результатах работы [1], приводим графики, характеризующие стационарный увод шины. Учитывается проскальзывание в передней и задней областях площадки контакта, радиальная и боковая жесткость шины и натяжение ее периферии. Распределение вертикальной нагрузки по оси площадки контакта принято параболическим. Метод нахождения параметров стационарного увода шины пригоден и при другом законе распределения вертикальной нагрузки. Не учтен момент трения качения и тангенциальная составляющая реакции. Принято, что размеры площадки контакта значительно меньше радиуса колеса, а отклонения линии качения от срединной плоскости колеса существенно меньше длины площадки контакта. Срединная плоскость колеса все время остается перпендикулярной плоскости дороги XOY (рис. 1).

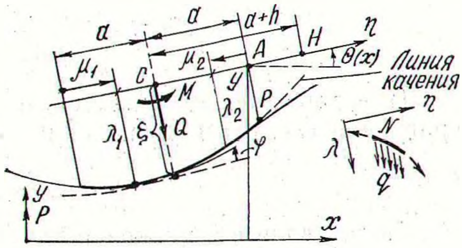

Рис. 1. Схема сил и перемещений в области площадки контакта.

При переходе к безразмерным величинам уравнения (21—25) параграфа 2. 3 в работе [1] принимают следующий вид:

$$l_2 = g(1-\sigma_2)\sigma_2, \tag{1}$$

$$\lambda_2' = l_2\tau_0 + g\tau_0\left\{\left(1+\frac{2}{\tau_0}\right)\left[\sigma_2 + \frac{1}{\tau_0}\left(e^{-\tau_0\sigma_2}-1\right)\right]-\sigma_2^2\right\}, \tag{2}$$

$$-\lambda_1' = -l_1\tau_0 + g\tau_0\left\{\left(1+\frac{2}{\tau_0}\right)\left[\sigma_1 + \frac{1}{\tau_0}\left(e^{-\tau_0\sigma_1}-1\right)\right]-\sigma_1^2\right\}, \tag{3}$$

$$\varepsilon = -\lambda_2' = -\lambda_1' = \frac{l_1 - l_2}{1-\sigma_1-\sigma_2}, \tag{4}$$

$$Q = \int_0^{2a} q d\eta = 4a^2c_2\left\{g\left[\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2) - \frac{1}{3}(\sigma_1^3+\sigma_2^3)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(l_1+l_2)(1-\sigma_1-\sigma_2)\right\}. \tag{5}$$

Для стабилизирующего момента можно записать

$$M = \int_0^{2a} q(a-\eta)d\eta = \frac{2}{3}a^3c_2\,\{3g[\sigma_1^2(\sigma_1-1)^2 - \sigma_2^2(\sigma_2-1)^2] -$$

$$-6[l_2+\varepsilon(0,5-\sigma_2)][(0,5-\sigma_2)^2-(0,5-\sigma_1)^2]+$$

$$+4\varepsilon[(0,5-\sigma_2)^3+(0,5-\sigma_1)^3]\}. \tag{6}$$

Для нахождения $\varepsilon_{\max}$ необходимо теперь найти

$$\sigma_{2\,\max} = \frac{1}{\tau_0}\ln S, \tag{7}$$

где S определяется как наименьший корень уравнения

$$S^2e^{-\tau_0} - S\frac{2}{1+0,5\tau_0} + 1 = 0. \tag{8}$$

Из уравнения (8) следует, что $S(\tau_0)$ и значит с использованием уравнений (7), (8) и (2) находим

$$\varepsilon_{\max} = g\varepsilon_{0\,\max}(\tau_0). \tag{9}$$

Подставляя в выражение (2) соотношение (1), получаем

$$\varepsilon = g\varepsilon_0(\tau_0,\ \sigma_2). \tag{10}$$

Приняв $e = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}} = \dfrac{\varepsilon_0(\tau_0,\ \sigma_2)}{\varepsilon_{0\,\max}\,\tau_0}$, где $0 \leqslant e \leqslant 1$, находим

$$e = e(\tau_0,\ \sigma_2), \tag{11}$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(\tau_0,\ e), \tag{12}$$

$$\varepsilon = g\varepsilon_{0\,\max}(\tau_0)e(\tau_0,\ \sigma_2). \tag{13}$$

Подставляя $l_1 = \varepsilon(1-\sigma_1-\sigma_2)+l_2$ из выражения (4) и l_2 из (1) в соотношение (3), получаем уравнение из которого можно найти $\sigma_1=\sigma_1(\varepsilon_0,\ \tau_0,\ \tau_2)$, в которое g не входит и которое в силу зависимостей $\sigma_2(\tau_0,\ e)$ и $\varepsilon(\tau_0,\ \sigma_2)$ принимает вид

$$\sigma_1 = \sigma_1(\tau_0,\ e)\,. \tag{14}$$

При этом

$$l_1 = gl_{10}(\tau_0, e). \tag{14}$$

Подставляя $\sigma_2(\tau_0, e)$, $\sigma_1(\tau_0, e)$, $\varepsilon = g\varepsilon_0(\tau_0, \sigma_2)$, $l_1 = gl_{10}(\tau_0, e)$ и $l_2 = gl_{20}(\tau_0, e)$ в выражения (5) и (6), получаем

$$Q = \frac{2}{3} a^2 c_2 g Q_0(\tau_0, e), \tag{15}$$

$$M = \frac{2}{3} a^3 c_2 g m_{\max}(\tau_0) M_0(\tau_0, e). \tag{16}$$

Здесь $0 \leqslant Q_0(\tau_0, e) \leqslant 1$ и $0 \leqslant M_0(\tau_0, e) \leqslant 1$.

В силу параболического закона распределения вертикального давления имеем $a = \sqrt[3]{\frac{3Pr}{2c_1}}$, что с учетом $\tau_0 = 1/h_0$ дает

$$\left.\begin{aligned} Q &= PfQ_0(h_0, e), \\ M &= Pfam_{\max}(h_0)M_0(h_0, e), \\ \varepsilon &= g\varepsilon_{0\,\max}(h_0)e. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Таким образом, рассматриваемый подход при определении характеристик стационарного увода колеса приводит к построению зависимостей

$$Q_0(h_0, e),\ M_0(h_0, e),\ m_{\max}(h_0),\ \varepsilon_{0\,\max}(h_0),$$

где $0 \leqslant e \leqslant 1$.

Нами составлена и отлажена программа на языке АЛГОЛ-60 для нахождения этих зависимостей в соответствии с изложенным выше. Результаты вычислений в виде зависимостей

$$Q_0(h_0, e),\ M_0(h_0, e),\ m_{\max}(h_0),\ \varepsilon_{0\,\max}(h_0),\ e_m(h_0)$$

представлены на рис. 2 и 3.

Отметим, что для построения зависимостей $Q(\varepsilon)$ и $M(\varepsilon)$ необходимо знать четыре величины h_0, Pf, a, g, которые могут быть найдены, например, из эксперимента.

В работах [1—3] получены нелинейные дифференциально- и интегрально-разностные уравнения увода колеса, учитывающие проскальзывание в задней и передней области площадки контакта. В частном случае (при весьма малом проскальзывании, а следовательно, и малых ε, и при малых отклонениях движения от прямолинейного) в работе [3] приводятся линейные уравнения увода:

$$Y(x) - \rho(x) + [\theta(x) - \rho'(x)]h = 0, \tag{18}$$

$$Q(x) = 2c_2(a+h)[Y(x) - a\theta(x)] - c_2\int_{x-2a}^{x} \rho(\psi)d\psi - c_2h[\rho(x) + \rho(x-2a)], \tag{19}$$

$$M(x) = -\left[\frac{2}{3}a^3c_2 + 2ac_2h(a+h)\right]\theta(x) - \bar{c}_2\int_{x-2a}^{x}(x - a - \psi)\rho(\psi)d\psi + $$
$$+ c_2h(a+h)[\rho(x) - \rho(x-2a)]. \tag{20}$$

Уравнения (18—20) вытекают из более общих уравнений (15—19) этой работы. При переходе к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях получаем

$$Q(p) = 2c_2(a+h)[Y(p) - a\theta(p)] + c_2\left[-2h + \left(h - \frac{1}{p}\right)(1 - e^{-2ap})\right] \times$$

$$\times \frac{Y(p) + h\theta(p)}{1 + hp}, \tag{21}$$

$$M(p) = -2ac_2\left[\frac{a^2}{3} + h(a+h)\right]\theta(p) + c_2\left\{\frac{2a}{p} + \left[h(a+h) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} + a\right)\right](1 - e^{-2ap})\right\}\frac{Y(p) + h\theta(p)}{1 + hp}. \tag{22}$$

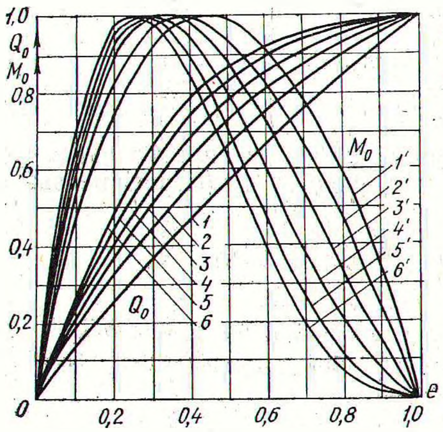

Рис. 2. Графики зависимостей $Q_0(h_0, e; 1—6—h_0=1; 1/3; 1/6; 1/15; 1/45; 1/300$ соответственно) и M_0 (h_0, e; $1'—6'—$ $—h_0=1$; 1/3; 1/6; 1/15; 1/45; 1/300 соответственно).

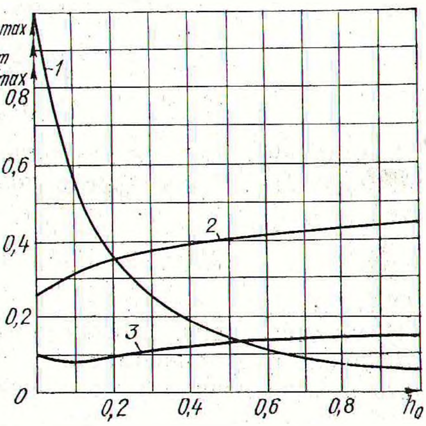

Рис. 3. Графики зависимостей $\varepsilon_{0\max}(h_0)$ (1); $e_m(h_0)$ (2); $m_{\max}(h_0)$ (3).

Отметим, что в уравнениях (18—22) Y — ордината точки A. Представляя движение плоскости колеса как поступательное вместе с точкой C и вращательное относительно этой точки, находим $Y_c(x) = Y(x) - a\theta(x)$ что дает

$$Y(p) = Y_c(p) + a\theta(p). \tag{23}$$

Подставляя выражение (23) в (21) и (22), получаем

$$Q(p) = 2c_2(a+h)\{[1 + A_1(p)]Y_c(p) + (a+h)A_1(p)\theta(p)\}, \tag{24}$$

$$M(p) = 2ac_2\left[\frac{a^2}{3} + h(a+h)\right]\left\{\frac{1}{a+h}A_2(p)\,Y_c(p) + [A_2(p) - 1]\theta(p)\right\}, \tag{25}$$

где

$$A_1(p) = \frac{1}{2(a+h)(1+hp)}\left[-2h + \left(h - \frac{1}{p}\right)(1 - e^{-2ap})\right]. \tag{26}$$

$$A_2(p) = \frac{a+h}{2a\left[\dfrac{a^2}{3} + h(a+h)\right](1+hp)} \times$$
$$\times \left\{\frac{2a}{p} + \left[h(a+h) - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} + a\right)\right](1 - e^{-2ap})\right\}. \qquad (27)$$

Представляя движение плоскости колеса как поступательное вместе с центром H и вращательное вокруг него, находим

$$Y_c(p) = Y_н(p) - (a+h)\theta(p), \qquad (28)$$

что дает

$$Q(p) = 2c_2(a+h)\{[1 + A_1(p)]Y_н(p) - (a+h)\theta(p)\}. \qquad (29)$$

$$M(p) = 2ac_2\left[\frac{a^2}{3} + h(a+h)\right]\left\{\frac{1}{a+h}A_2(p)Y_н(p) - \theta(p)\right\}. \qquad (30)$$

При составлении уравнений движения экипажа на деформируемых колесах уравнения (29) и (30) предпочтительнее из-за их простоты.

Из приведенных выражений для $Q(p)$ и $M(p)$ вытекает, что

$$c_б = 2c_2(a+h),\ k = 2c_2(a+h)^2,\ c_у = 2ac_2\left[\frac{a^2}{3} + h(a+h)\right]. \qquad (31)$$

В соответствии с теорией М. В. Келдыша [6] в случае, когда срединная плоскость колеса все время перпендикулярна к плоскости качения, имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}[Y_c(x) - \xi(x)] = \theta(x) + \varphi(x),\\ &\frac{d}{dx}[\theta(x) + \varphi(x)] = \alpha\xi(x) - \beta\varphi(x),\\ &Q(x) = c_б\xi(x),\ M(x) = c_у\varphi(x). \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Переходя к изображениям по Лапласу, из уравнений (32) получаем

$$Q'(p) = c_б\left[\left(1 - \frac{\alpha}{p^2 + p\beta + \alpha}\right)Y_c(p) - \frac{\beta}{p^2 + p\beta + \alpha}\theta(p)\right], \qquad (33)$$

$$M'(p) = c_у\left[\frac{\alpha p}{p^2 + p\beta + \alpha}Y_c(p) + \left(\frac{\beta p}{p^2 + p\beta + \alpha} - 1\right)\theta(p)\right]. \qquad (34)$$

Воспользовавшись выражением (28), находим

$$Q'(p) = c_б\left[\left(1 - \frac{\alpha}{p^2 + p\beta + \alpha}\right)Y_н(p) - (a+h)\times\right.$$
$$\left.\times\left(1 + \frac{-\alpha + \dfrac{\beta}{a+h}}{p^2 + p\beta + \alpha}\right)\theta(p)\right], \qquad (35)$$

$$M'(p) = c_y \left[\frac{\alpha p}{p^2 + p\beta + \alpha} Y_н(p) - \left(1 + \frac{-\beta p + (a+h)\alpha p}{p^2 + p\beta + \alpha} \right) \theta(p) \right]. \quad (36)$$

Определим коэффициенты α и β так, чтобы выражения (35), (36) и (29), (30) наилучшим образом совпадали по характеру. Тогда необходимо принять, что

$$\beta/\alpha = a + h. \quad (37)$$

Отметим, что $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2c_2(a+h)^2}{2c_2(a+h)} = \frac{k}{c_б}$. Последнее совпадает с результатом работы Я. М. Певзнера [7].

Теперь выражения (35) и (36) можно представить в форме выражений (29) и (30):

$$Q'(p) = c_б \{[1 + A_1'(p)] Y_н(p) - (a+h)\theta(p)\}, \quad (38)$$

$$M'(p) = c_y \left\{ \frac{1}{a+h} A_2'(p) Y_н(p) - \theta(p) \right\}, \quad (39)$$

где

$$A_1'(p) = -\frac{\alpha}{p^2 + p\beta + \alpha}, \quad (40)$$

$$A_2'(p) = \frac{\beta p}{p^2 + p\beta + \alpha}. \quad (41)$$

Так как размерность p длина$^{-1}$ то из знаменателя последних выражений (40) и (41) находим, что α и β должны иметь вид

$$\alpha = \frac{\gamma}{(a+h)^2}, \quad \beta = \frac{\gamma}{a+h}, \quad (42)$$

где γ устанавливается из сравнения выражений $A_1(p)$ и $A_1'(p)$ либо $A_2(p)$ и $A_2'(p)$ по какому-либо критерию, так как эти выражения не могут совпадать точно при любом p.

Таким образом, видно, что γ определяется неоднозначно и в зависимости от того, как учитывается близость и какие выражения $A_1(p)$ или $A_2(p)$, γ получает разные значения. Такое же положение должно возникнуть и при использовании данных эксперимента.

В дальнейшем нам понадобятся комплексные передаточные коэффициенты. Для их нахождения найдем $A_1(j\nu)$, $A_2(j\nu)$, $A_1'(j\nu)$, $A_2'(j\nu)$, заменив в выражениях (26) и (27), (40) и (41) p на $j\omega = j\frac{\nu}{2a}$. Получаем

$$A_1(j\nu) = \frac{1}{(1+2h_0)(1+h_0^2\nu^2)} \left\{ -2h_0 \cos\nu - \left(\frac{1}{\nu} - h_0^2 \nu \right) \sin\nu + \right.$$
$$\left. + j \left[(1 - \cos\nu) \left(\frac{1}{\nu} - h_0^2 \nu \right) + 2h_0 \sin\nu + 2h_0^2 \nu \right] \right\}, \quad (43)$$

$$A_2(j\nu) = \frac{0{,}5 + h_0}{\left[\frac{1}{12} + h_0(0{,}5 + h_0)\right](1 + h_0^2\nu^2)} \left\{ -h_0 + \left(h_0^2 + h_0 + \frac{1}{\nu^2}\right) \times \right.$$

$$\times (1 - \cos\nu) - \left[\frac{1}{2\nu} - h_0^2(0{,}5 + h_0)\nu - \frac{h_0}{\nu}\right] \sin\nu + j\left[-\frac{1}{\nu} + \right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{1}{2\nu} - h_0^2(0{,}5 + h_0)\nu - \frac{h_0}{\nu}\right)(1 - \cos\nu) + \left(h_0^2 + h_0 + \frac{1}{\nu^2}\right)\sin\nu\right]\right\}, \qquad (44)$$

$$A_1'(j\nu) = \frac{1}{\left[\frac{\nu^2(0{,}5 + h_0)^2}{\gamma} - 1\right]^2 + (0{,}5 + h_0)^2\nu^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\nu^2(0{,}5 + h_0)^2}{\gamma} - 1 + j(0{,}5 + h_0)\nu\right]. \qquad (45)$$

$$A_2'(j\nu) = \frac{(0{,}5 + h_0)\nu}{\left[\frac{\nu^2(0{,}5 + h_0)^2}{\gamma} - 1\right]^2 + (0{,}5 + h_0)^2\nu^2} \times$$

$$\times \left[(0{,}5 + h_0)\nu + j\left(1 - \frac{\nu^2(0{,}5 + h_0)^2}{\gamma}\right)\right]. \qquad (46)$$

Определим γ, например, из совпадения выражений $1 + A_1(j\nu)$ и $1 + A_1'(j\nu)$ при малых значениях ν. Приравнивая выражения (43) и (45), в которых оставлены члены порядка не выше ν^2, находим

$$\gamma = \frac{3}{1 - \left(\frac{h_0}{0{,}5 + h_0}\right)^3}. \qquad (47)$$

Этой формуле для γ соответствует таблица

h_0	0	1/3	1/2	1	3/2
γ	3	3,20	3,43	4,27	5,17

Значения γ по этой формуле, справедливой при малых ν, качественно хорошо согласуются с результатом работы Я. М. Певзнера [7]. У шины типа «Р» брекер испытывает относительно большее натяжение, что приводит к большим значениям h_0, а следовательно, и γ по приведенной выше формуле.

Можно искать γ исходя из критерия, заключающегося в наименьшем квадратичном отклонении комплексных передаточных коэффициентов по обеим теориям в определенной области изменения ν. В результате вычислений на ЭВМ «ОДРА 1204» оказалось, что для значений $h_0 = 1/3$, $1/6$, $1/15$, $1/45$ при изменении ν в области от 0 до $1/10$, $1/2$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 значение γ изменялось от 3,20 до 1,86. Амплитудно-частотные характеристики по обеим теориям представлены на рис. 4.

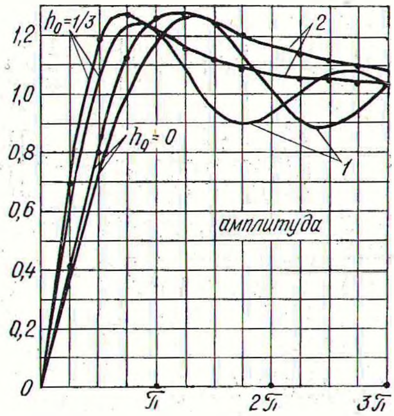

Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики по выражениям $1+A_1(j\nu)$ и $1+A_1'(j\nu)$ *1* — зависимость $1+A_1(j\nu)$ (разностные уравнения); *2* — зависимость $1+A_1'(j\nu)$ при $\gamma=2$ (М. В. Келдыш).

В заключение отметим, что другой способ нахождения γ непосредственно из выражений (32) приводит к значению

$$\gamma = \frac{2}{1-\left(\dfrac{h_0}{0{,}5+h_0}\right)^2}.$$

Литература

[1] *М. А. Левин.* Новая теория бокового увода колеса, приводящая к интегрально-разностным или дифференциально-разностным уравнениям. В сб.: Мат-лы секции теоретической и прикладной механики. 25 конф. Белорусск. политехн. ин-та. Минск, 1969. [2] *М. А. Левин.* Определение боковой силы увода и момента, действующих на колесо автомобиля со стороны дороги. Тезисы научн.-техн. конф. молодых ученых Белоруссии. Техн. науки. Минск, 1969. [3] *М. А. Левин.* Нестационарный увод колеса с учетом проскальзывания в области контакта. В сб.: Мат-лы секции теоретической и прикладной механики. 26 конф. Белорусск. политехн. ин-та. Минск, 1970. [4] *М. А. Левин.* Примеры определения условий самовозбуждения автоколебаний в системах с деформируемым колесом. Там же. [5] *М. А. Левин.* Теория движения деформируемого колеса при отсутствии увода, приводящая к разностным уравнениям. Там же. [6] *Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев.* Динамика неголономных систем. М., 1967. [7] *Я. М. Певзнер.* О качении автомобильных шин при быстро меняющихся режимах увода. «Автомобильная промышленность», 1968, № 6.