

А. П. С а л я в а

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ГИБКОСТИ ХЛЫСТОВ

На современном этапе развития технологии лесоразработок хлыст—одна из основных транспортируемых единиц на лесосеках, а также при доставке леса на нижние склады. При транспортировке хлыст подвергается различным деформациям, которые влияют на характеристики транспортного процесса.

Один из главных видов деформаций хлыста — поперечный статический изгиб его. С целью установления зависимости прогибов хлыста от величин сил, действующих на него, уже проводился ряд исследований. Так, известны корреляционные уравнения прогибов вершин хлыстов, полученные М. В. Ходосовским на основании эмпирических исследований. Однако общая математическая теория изгиба хлыста не разрабатывалась.

Для математического описания продольной оси хлыста, изогнутого действием сил, перпендикулярных к ней, воспользуемся дифференциальным уравнением упругой линии

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x)}{E(x) \cdot I_z(x)}, \quad (1)$$

где $M(x)$ — величина изгибающего момента от действия внешних сил в сечении хлыста с абсциссой x ;
 $E(x)$, $I_z(x)$ — модуль упругости и момент инерции сечения хлыста относительно оси z ;
 y — величина прогиба нейтральной оси хлыста в точке с абсциссой x (рис. 1).

Возникает вопрос, можно ли принять для хлыста $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \approx 0$, и если да, то какую погрешность вызывает такое допущение. Чтобы ответить на этот вопрос, получим точное решение уравнения (1).

Обозначим $\frac{dy}{dx} = k$. Тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dk}{dx}$. Кроме того, $E(x)$ и $I_z(x)$ есть величины переменные, т. е. $\frac{M(x)}{E(x) \cdot I_z(x)}$ является некоторой функцией аргумента x : $\frac{M(x)}{E(x) \cdot I_z(x)} = f(x)$.

Отсюда

$$\frac{1}{\sqrt{(1+k^2)^3}} \frac{dk}{dx} = f(x).$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dk}{\sqrt{(1+k^2)^3}} = f(x)dx.$$

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int \frac{dk}{\sqrt{(1+k^2)^3}} = \int f(x)dx + C_1. \quad (2)$$

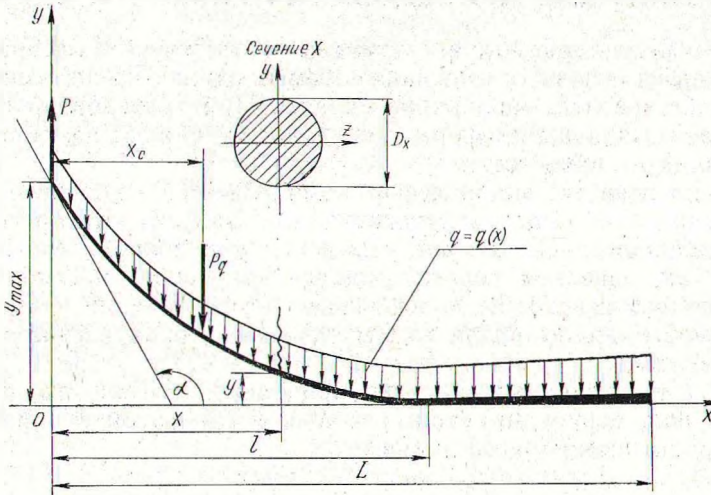


Рис. 1. Расчетная схема для определения формы продольной оси хлыста, изогнутого действием поперечных сил.

Интеграл левой части уравнения преобразуется к интегралу от дифференциального бинома вида $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, который затем легко берется по известному методу путем следующей замены переменной:

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = u; \quad dk = -\frac{du}{u^2\sqrt{1-u^2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\int \frac{dk}{\sqrt{(1+k^2)^3}} = -\int u(1-u^2)^{-\frac{1}{2}} du = \sqrt{1-u^2}.$$

В новых переменных решение уравнения (2) примет вид.

$$\sqrt{1-u^2} = \int f(x)dx + C_1. \quad (3)$$

Но $\int f(x)dx$ есть первообразная функции $f(x)$, т. е.

$$\int f(x)dx = F_1(x).$$

Пусть при некотором значении $x = a$ $\frac{dy}{dx} = k = 0$, а $u = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = 1$.

Тогда $F_1(x) + C_1 = \sqrt{1-u^2}$; $F_1(a) + C_1 = 0$; $C_1 = -F_1(a)$.

Таким образом получили уравнение

$$\sqrt{1 - u^2} = F_1(x) - F_1(a). \tag{4}$$

Но учитывая, что $F_1(x) - F_1(a)$ есть исключительно функция аргумента X , целесообразно ввести обозначения $F_1(x) - F_1(a) = X_1$ и записать уравнение (4) сокращенно:

$$u^2 + X_1^2 = 1. \tag{5}$$

Итак, решением уравнения (2) в новых переменных $X_1 = X_1(x)$ и $u = u\left(\frac{dy}{dx}\right)$ является единичная окружность. Геометрическая интерпретация решения представлена на рис. 2.

Решим уравнение (5) относительно искомой функции y . Подставив в уравнение (5) вместо u его значение как функции от $\frac{dy}{dx}$, приходим к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X_1}{\sqrt{1 - X_1^2}}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что

$$y = \int \frac{X_1 dx}{\sqrt{1 - X_1^2}} + C_2.$$

Как и в случае первого интегрирования имеем $y = F_2(x) + C_2$. Определим постоянную второго интегрирования уравнения (1). Если при некотором значении $x = b$ $y = 0$, то $F_2(b) + C_2 = 0$; $C_2 = -F_2(b)$. Следовательно, окончательным решением уравнения (1) является уравнение

$$y = F_2(x) - F_2(b). \tag{7}$$

Элементарное исследование уравнения (6) показывает, что решение действительно лишь в том случае, если

$$|X_1| < 1, \text{ т. е. } \left| \int \frac{M(x)}{E(x)I_z(x)} dx - F_1(a) \right| < 1. \tag{8}$$

Это для балок переменной жесткости. А для балок постоянной жесткости

$$|\int M(x)dx - EI_z \cdot F_1(a)| < EI_z. \tag{9}$$

Очевидно, что неравенства (8) и (9) возможно использовать в качестве численного критерия гибкости (жесткости) балок при поперечном изгибе. Неравенство (8) применимо при оценке гибкости (жесткости) хлыстов.

Рассмотрим один из наиболее распространенных случаев деформации хлыста: свободно лежащий на горизонтальной плоскости хлыст поднимается за вершину вертикальной силой P (см. рис. 1).

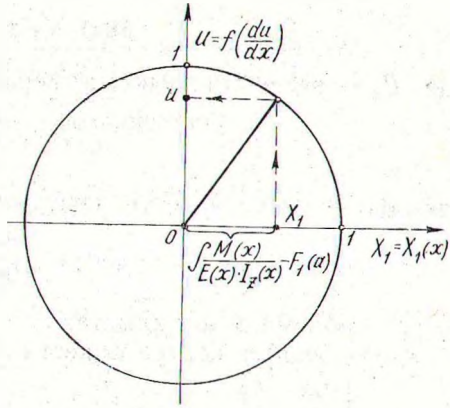


Рис. 2. Геометрическая интерпретация точного решения уравнения упругой линии в переменных $X_1 = X_1(x)$ и $u = u\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Учитывая конкретность задачи данных исследований, можно принять, что

$$D_x = d + mx,$$

где D_x — диаметр хлыста в сечении с абсциссой x ;
 m — коэффициент сбега хлыста;
 d — диаметр хлыста в верхнем отрубе.

Определим для данного случая значение функции $f(x)$.

1. Изгибающий момент в сечении хлыста с абсциссой x

$$M(x) = Px - P_q(x - x_c),$$

где P_q — вес части хлыста от вершины до сечения x ,

$$P_q = \int_0^x q(x) dx,$$

где $q(x)$ — интенсивность нагрузки хлыста от собственного веса,

$$q(x) = \frac{\gamma\pi}{4} (d + mx)^2,$$

де γ — объемный вес хлыста;

x_c — абсцисса центра тяжести P_q ,

$$x_c = \frac{\int_0^x x \cdot q(x) dx}{\int_0^x q(x) dx}.$$

Тогда

$$M(x) = P \cdot x - x \int_0^x q(x) dx + \int_0^x x \cdot q(x) dx. \quad (11)$$

Подставим в формулу (11) значение $q(x)$ и, вычислив интегралы, получим, что

$$M(x) = P \cdot x - 6\varphi x^2 - 4\alpha x^3 - \beta x^4. \quad (12)$$

В уравнение (12) для удобства дальнейших вычислений введены следующие обозначения:

$$\varphi = \frac{\gamma\pi d^2}{48}; \quad \alpha = \varphi \frac{m}{d}; \quad \beta = \varphi \frac{m^2}{d^2}.$$

2. Момент инерции сечения хлыста относительно оси z равен

$$I_z(x) = \frac{\pi(d + mx)^4}{64}.$$

3. Модуль упругости Юнга для хлыста определенной породы можно считать неизменяющимся по длине: $E(x) = \text{const}$.

Отсюда следует, что для данного случая

$$f(x) = \frac{64}{E\pi} \cdot \frac{Px - 6\varphi x^2 - 4\alpha x^3 - \beta x^4}{(d + mx)^4}.$$

$\int f(x)dx$ берется методом замены переменной $d+mx=t$. Осуществив замену переменной и проведя элементарные преобразования, приходим к следующему результату:

$$X_1 = \frac{64}{E\pi} \cdot \int (At^{-3} - Bt^{-1} - N)dt + C_1;$$

$$X_1 = \frac{64}{E\pi} \left(\frac{B}{3} t^{-3} - \frac{A}{2} t^{-2} - Nt \right) + C_1;$$

$$X_1 = \frac{64}{E\pi} \left[\frac{B}{3(d+mx)^3} - \frac{A}{2(d+mx)^2} - N(d+mx) \right] + C_1.$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения:

$$A = \frac{1}{m^2} \left(P + \frac{\gamma\pi}{12m} d^3 \right); \quad B = \frac{1}{m^2} \left(P + \frac{\gamma\pi}{16m} d^3 \right) d; \quad N = \frac{\gamma\pi}{48m^3}.$$

Величина постоянной интегрирования определится из условия, что при $x=l$, где l — длина изогнутой части хлыста, $\frac{dy}{dx} = 0$.

$$C_1 = -\frac{64}{E\pi} \left[\frac{B}{3(d+ml)^3} - \frac{A}{2(d+ml)^2} - N(d+ml) \right].$$

$$X_1 = \frac{64}{E\pi} \left\{ \frac{B}{3} \left[\frac{1}{(d+mx)^3} - \frac{1}{(d+ml)^3} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{A}{2} \left[\frac{1}{(d+mx)^2} - \frac{1}{(d+ml)^2} \right] + Nm(l-x) \right\}. \quad (13)$$

Важно отметить, что если возможно принять $k^2 \approx 0$, то $X_1 \approx k$ и тогда $y \approx \int X_1 dx + C_2$.

Из эмпирических исследований известно, что увеличение прогиба вершины хлыста вызывается увеличением подъемной силы P , но лишь до определенного предела, когда длина изогнутого участка хлыста l станет равной длине хлыста L . С этого момента величина P остается практически неизменной. Обозначим максимальное значение подъемной силы через $P_{кр}$ (критическое). Приняв в формуле (12) $x=L$ и учитывая, что изгибающий момент в сечении $x=L$ будет равен нулю, получаем формулу для расчета критической подъемной силы

$$P_{кр} = \varphi L \left[6 + 4 \frac{mL}{d} + \left(\frac{mL}{d} \right)^2 \right]. \quad (14)$$

Если на вершину хлыста действует критическая подъемная сила, то при $x=0$ X_1 принимает максимальное критическое значение $X_1 = X_{1кр}^{max}$:

$$X_{1кр}^{max} = \frac{64}{E\pi} \left\{ \frac{B}{3} \left[\frac{1}{d^3} - \frac{1}{(d+mL)^3} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{A}{2} \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(d+mL)^2} \right] + NmL \right\}.$$

Но $d + ml = D$, а $D - d = ml$, где D — диаметр хлыста в комле. Тогда окончательно

$$X_{\text{кр}}^{\text{max}} = \frac{64}{E\pi} \left[\frac{B}{3} \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{D^3} \right) - \frac{A}{2} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{D^2} \right) + N(D-d) \right]. \quad (15)$$

Чтобы сделать вывод о возможности применения приближенного решения дифференциального уравнения упругой линии при определении прогибов хлыста, достаточно сравнить

$$k_{\text{кр}}^{\text{max}} \simeq X_{\text{кр}}^{\text{max}} \text{ и } k_{\text{кр}}^{\text{max}} = \frac{X_{\text{кр}}^{\text{max}}}{\sqrt{1 - (X_{\text{кр}}^{\text{max}})^2}},$$

где $k_{\text{кр}}^{\text{max}}$ — максимальное значение тангенса угла наклона касательной к нейтральной оси хлыста в точке $x=0$ при подъеме его за вершину критической силой $P = P_{\text{кр}}$.

Пример.

Вычислить приближенное и точное значение $k_{\text{кр}}^{\text{max}}$ для хлыста, имеющего следующие параметры: $L = 20$ м, $m = 10^{-2}$, $d = 0,1$ м, $D = 0,3$ м, $\gamma = 8 \cdot 10^2$ кг/м³, $E = 10^9$ кг/м³. Определить погрешность приближенного значения $k_{\text{кр}}^{\text{max}}$.

Решение.

1. Определим критическое значение подъемной силы $P_{\text{кр}}$:

$$\varphi = \frac{\gamma \pi d^2}{48} = \frac{8 \cdot 10^2 \cdot 3,14 \cdot (0,1)^2}{48} = 0,50 \text{ (кг/м)};$$

$$P_{\text{кр}} = \varphi L \left[6 + 4 \frac{mL}{d} + \left(\frac{mL}{d} \right)^2 \right] = 0,50 \cdot 20 \left[6 + 4 \frac{10^{-2} \cdot 20}{10^{-1}} + \left(\frac{10^{-2} \cdot 20}{10^{-1}} \right)^2 \right] = 180 \text{ (кг)}.$$

Следует отметить, что $P_{\text{кр}} \simeq \frac{1}{3}$ веса хлыста. Это подтверждается и эмпирическими исследованиями.

2. Вычислим значение $X_{\text{кр}}^{\text{max}}$.

$$X_{\text{кр}}^{\text{max}} = \frac{64}{E\pi} \left[\frac{B}{3} \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{D^3} \right) - \frac{A}{2} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{D^2} \right) + N(D-d) \right];$$

$$A = \frac{1}{m^2} \left(P_{\text{кр}} + \frac{\gamma \pi}{12m} d^3 \right) = \frac{1}{10^{-2}} \left[180 + \frac{8 \cdot 10^2 \cdot 3,14}{12 \cdot 10^{-2}} (0,1)^3 \right] = 0,201 \cdot 10^7;$$

$$B = \frac{1}{m^2} \left(P_{\text{кр}} + \frac{\gamma \pi}{16m} d^3 \right) d = \frac{1}{10^{-2}} \left[180 + \frac{8 \cdot 10^2 \cdot 3,14}{16 \cdot 10^{-2}} (0,1)^3 \right] \times \\ \times 0,1 = 0,0196 \cdot 10^7;$$

$$N = \frac{\gamma \pi}{48m^3} = \frac{8 \cdot 10^2 \cdot 3,14}{48 \cdot (10^{-2})^3} = 5,23 \cdot 10^7;$$

$$X_{\text{кр}}^{\text{max}} = \frac{64}{10^9 \cdot 3,14} \left[\frac{0,0196}{3} \cdot 10^7 \left(\frac{1}{0,1^3} - \frac{1}{0,3^3} \right) - \frac{0,201}{2} \times \right. \\ \left. \times 10^7 \left(\frac{1}{0,1^2} - \frac{1}{0,3^2} \right) + 5,23 \cdot 10^7 (0,3 - 0,1) \right] = 21,3 \cdot 10^{-9} \times \\ \times (6,26 - 8,9 + 1,05) \cdot 10^7 = -0,390.$$

3. Вычислим погрешность приближенного значения $k_{\text{кр}}^{\text{max}}$.

$$k_{\text{кр}}^{\text{max}} \simeq X_{\text{кр}}^{\text{max}} \simeq -0,390,$$

$$k_{\text{кр}}^{\text{max}} = \frac{X_{\text{кр}}^{\text{max}}}{\sqrt{1 - (X_{\text{кр}}^{\text{max}})^2}} = - \frac{0,390}{\sqrt{1 - 0,39^2}} = -0,444;$$

$$\Delta = \frac{-0,444 + 0,39}{-0,444} \cdot 100\% = 12,2\%.$$

Решение примера подтверждает, что действительно $|X_1| < 1$. Отрицательное значение $k_{\text{кр}}^{\text{max}}$ определилось выбранным направлением осей координат, так как $k_{\text{кр}}^{\text{max}} = \text{tg } \alpha$ (см. рис. 1).

Вышеизложенные теоретические исследования позволяют сделать вывод, что для определения прогибов хлыста при поперечном изгибе необходимо использовать полученное в обобщенном виде точное решение дифференциального уравнения упругой линии, так как приближенное дает недопустимо большую погрешность порядка 10—15%.