ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.977

В. В. Крахотко[1], В. В. Горячкин[1], В. В. Игнатенко[2], Г. П. Размыслович[1]

[1]Белорусский государственный университет
[2]Белорусский государственный технологический университет

УПРАВЛЯЕМОСТЬ АНСАМБЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДЕСКРИПТОРНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ

Задачи управляемости динамических систем важны с точки зрения приложений. Особенно это касается динамических систем с интервальными неопределенностями. Для управления таких систем важно иметь управляющие воздействия, которые легко практически реализовать. Такую реализацию можно осуществить с помощью дескрипторных динамических регуляторов. В статье сделана попытка перенести известные результаты на более сложные динамические системы управления, такие как системы с интервальными параметрами.

Рассматривается линейная динамическая система управления с интервальными коэффициентами. Ставится задача перевода пучка траекторий системы из начального состояния в минимальную окрестность многогранного множества за конечное время с помощью дескрипторного регулятора. Предлагается конструктивный метод приближенного решения задачи, который сводится к решению специальной задачи линейного программирования. Если минимальная окрестность совпадает с самим многогранным множеством, то найденное управление гарантированно решает задачу и в точной постановке.

Ключевые слова: ансамбль систем, управляемость, интервальный анализ, дескрипторная линейная система, динамический регулятор

Для цитирования: Крахотко В. В., Горячкин В. В., Игнатенко В. В., Размыслович Г. П. Управляемость ансамбля линейных систем дескрипторным динамическим регулятором // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 2 (260). С. 5–9.

V. V. Krakhotko[1], V. V. Goryachkin[1], V. V. Ignatenko[2] , G. P . Razmyslovich[1]
[1]Belarusian State University
[2]Belarusian State Technological University

CONTROLLABILITY OF AN ENSEMBLE OF LINEAR SYSTEMS BY A DESCRIPTOR DYNAMIC REGULATOR

The controllability problems of dynamic systems are important from the point of view of applications. This is especially true for dynamical systems with interval uncertainties. For the control of such systems, it is important to have control actions that are easy to implement practically. Such an implementation can be carried out with the help of descriptor dynamic regulators. The article attempts to transfer the known results to more complex dynamic control systems such as systems with interval parameters.

A linear dynamic control system with interval coefficients is considered. The problem of transferring a beam of system trajectories from the initial state to the minimal neighborhood of a polyhedral set in finite time using a descriptor controller is posed. A constructive method of approximate solution of the problem is proposed, which comes to solving a special linear programming problem. If the minimal neighborhood coincides with the polyhedral set itself, then the control found is guaranteed to solve the problem in the exact formulation.

Key words: ensemble of systems, controllability, interval analysis, descriptor linear system, dynamic regulator.

For citation: Krakhotko V. V., Goryachkin V. V., Ignatenko V. V., Razmyslovich G. P. Controllability of an ensemble of linear systems by a descriptor dynamic regulator. *Proseedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2022, no. 2 (260), pp. 5–9 (In Russian).

Введение. Ансамбль линейных непрерывных систем – это совокупность систем, коэффициенты которых принадлежат некоторым заданным множествам [1–2].

Вопросы управляемости линейных систем с динамическим регулятором исследованы, например, в работе [3]. Однако на практике часто точные значения коэффициентов и начальные условия таких систем с динамическим регулятором неизвестны. Заданы лишь множества, в которых эти параметры могут изменяться произвольным образом. В связи с этим прикладное значение имеют задачи управления всеми системами ансамбля, получаемыми при различных вариациях коэффициентов и начальных условий.

Рассматривается следующая задача: для любого начального состояния из наперед заданного множества определить такое управление (одно и то же для всех систем ансамбля), что в некоторый момент времени τ сечение [1] $\{x(\tau)\}$ решения $x(t)$ каждой из систем ансамбля попадут в минимальную окрестность нуля за конечное время τ. При этом в качестве управления $u(t)$ рассматривается выход линейной дескрипторной системы [4], которую назовем дескрипторным регулятором. Предлагается алгоритм построения указанного управления, в основу которого положена задача линейного программирования, сформулированная по параметрам исследуемого ансамбля.

Основная часть. Пусть $[A]$, $[B]$ – некоторые множества в пространствах $n\times n$ и $n\times m$ соответственно постоянных матриц. Тогда

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

есть ансамбль линейных систем, когда матрицы A и B принимают (независимо друг от друга) произвольные значения из множеств $[A]$ и $[B]$ соответственно. В системе (1) x – n-вектор состояния, u – r-вектор управления.

В качестве управления $u(t)$ рассматривается выход

$$u(t) = Cy(t). \tag{2}$$

$C - r\times m$ – постоянная матрица линейной дескрипторной системы

$$D_1 y = D_2 y, \quad y(t_0) = y_0. \tag{3}$$

Здесь (3) динамический регулятор: $y, y_0 \in R^m$; $D_1, D_2 - m\times m$ – матрицы; $\det D_1 = 0$ и пучок $(D_1 + \lambda D_2)$ регулярен. Такой регулятор будем называть дескрипторным регулятором.

Ясно, что при любом фиксированном начальном условии

$$x(0) = x_0 \tag{4}$$

из множества $[x_0] \subset R^n$ и при любых фиксированных матрицах A, B (будем говорить допустимых матрицах) и управлении $u(t)$ существует единственное решение [5] которое при $t = t_1$ имеет вид

$$x(t_1) = F(t_1, 0)x_0 + \int_0^{t_1} F(t_1, \tau)BCe^{(D_1^d D_2)\tau} y_0 d\tau; \tag{5}$$

$$y_0 = D_1^d D_1 q, \tag{6}$$

где $F(t, \tau)$ – фундаментальная матрица решений однородной задачи Коши

$$\dot{x} = Ax, \; x(0) = x_0; \tag{7}$$

D_1^d – обратная матрица Дразина матрицы D_1; $q \in R^m$.

Определение. Ансамбль систем (1) называется управляемым дескрипторным регулятором (3), если существует момент времени t_1, $t_1 < +\infty$, что для всех начальных состояний $x(0)$ из множества $[x_0]$ найдется вектор q, такой, что дескрипторным регулятором (3) с начальным условием $y(0) = y_0 = D_1{}^d D_1 q$, $q \in R^m$ приводит сечения $\{x(t_l)\}$ всех решений ансамбля в нуль.

Очевидно, что в такой постановке задача управления имеет решение лишь в исключительных случаях. Поэтому модернизируем ее следующим образом: построим такое управление (найти такое q), что каждое решение $x(t)$ ансамбля подчиняется неравенству

$$|x(t_1)| \le \varepsilon, \tag{8}$$

где $|x(t_1)|$ – вектор, составленный из модулей компонент вектора $x(t_1)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon \ge 0$, причем величина $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)$ является минимальной, неравенство (8) понимается покомпонентно.

Таким образом, динамический регулятор (3) должен привести все траектории (5) в минимальную окрестность нуля в момент времени t_1.

Рассмотрим однородную систему (7) для произвольных фиксированной матрицы $A \in [A]$ и вектора $x(0) = c \in [x_0]$. Пусть множества $[A]$,

$[B]$ и $[x_0]$ – интервальные матрицы и интервальный вектор-столбец [6, 7]. Для оценок воспользуемся подходом работ [8, 9].

Произведение Ax на интервалах $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ и $[x]=[\underline{x},\overline{x}]$ имеет точные векторные оценки

$$\underline{f}(\underline{x},\overline{x}) \le Ax \le \overline{f}(\underline{x},\overline{x}), \tag{9}$$

связанные с функциями, записанными в координатном виде

$$\underline{f}_i(\underline{x},\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} \min\left\{\underline{a}_{ij}\underline{x}_j, \underline{a}_{ij}\overline{x}_j, \overline{a}_{ij}\underline{x}_j, \overline{a}_{ij}\overline{x}_j\right\};$$

$$\overline{f}_i(\underline{x},\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} \max\left\{\underline{a}_{ij}\underline{x}_j, \underline{a}_{ij}\overline{x}_j, \overline{a}_{ij}\underline{x}_j, \overline{a}_{ij}\overline{x}_j\right\}; \tag{10}$$

$$i=\overline{1,n}.$$

Исходя из системы (7) и соотношений (10) составим задачу Коши, которая представляет собой систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}\left(\underline{x},\overline{x}\right), \underline{x}\left(0\right) = c, \\ \dot{\overline{x}} = \overline{f}\left(\underline{x},\overline{x}\right), \overline{x}\left(0\right) = c. \end{cases} \tag{11}$$

Следуя источнику [6], система (11) имеет единственное решение $\underline{x}(t,c)$, $\overline{x}(t,c)$, $0 \le t \le t_1$, и для решения $x(t, c)$ системы (7) с начальным условием $x(0) = c$, отвечающим всем матрицам $A \in [A]$, справедливы оценки

$$\underline{x}(t,c) \le x(t,c) \le \overline{x}(t,c),\ 0 \le t \le t_1.$$

Для оценки фундаментальной матрицы $F(\cdot)$ решений уравнения (7) воспользуемся следующими рассуждениями. Обозначим e^i – единичный вектор, $i = 1, 2, \dots, n$. Соответствующие начальным условиям $x(0) = e^i$, $\underline{x}(0) = e^i$, $\overline{x}(0) = e^i$ решения систем (7) и (11) являются столбцы_ фундаментальных матриц $F(t,0)$, $\underline{F}(t,0)$, $\overline{F}(t,0)$. Тогда справедлива оценка фундаментальной матрицы решений системы (7)

$$\underline{F}(t,0) \le F(t,0) \le \overline{F}(t,0)\ , 0 \le t \le t_1 . \tag{12}$$

Вернемся к исходной системе (1). Учитывая формулы (5), (6), можем утверждать, что ансамбль управляем дескрипторным регулятором, когда при некотором t_1, $t_1 < +\infty$ для любого вектора $x(0) \in [x_0]$ найдется такой m-вектор q (один и тот же для всех систем ансамбля), что выполняется неравенство

$$\left|x(t_1,q)\right| = \left|Mq - P\right| \le \varepsilon. \tag{13}$$

Здесь

$$P = -F\left(t_1,0\right)x\left(0\right);$$
$$M = \int F\left(t_1,\tau\right)BCe^{\left(D_1^d D_1\right)\tau}D_1^d D_1\, d\tau. \tag{14}$$

Попадание ансамбля решений $x(t)$ в момент $t = t_1$ в ε-окрестность нуля, как следует из (12), эквивалентно неравенству

$$-\varepsilon \le Mq - P \le \varepsilon.$$

Тогда минимальная ε-окрестность нуля может быть найдена как решение задачи

$$e'\varepsilon \to \min,\ e = (1,\ \dots,1),$$
$$-\varepsilon \le Mq - P \le \varepsilon, \tag{15}$$
$$\varepsilon \ge 0,\ \ q \in Q \subset R^m$$

относительно переменных ε и q.

Учитывая (12)–(14), и то, что $[B]$ – интервальная матрица, $[x_0]$ – интервальный вектор-столбец, получим интервальные оценки для P и M:

$$\underline{P} \le P \le \overline{P} \text{ и } \underline{M} \le M \le \overline{M}.$$

Далее представим векторные интервалы их центрами

$$P_0 = (\underline{P} + \overline{P})/2,\ \ M_0 = (\underline{M} + \overline{M})/2$$

и радиусами

$$\Delta P = (\overline{P} - \underline{P})/2,\ \ \Delta M = (\overline{M} - \underline{M})/2.$$

Из результатов работы [8] следует, что задача (15) эквивалентна следующей задаче нелинейного программирования:

$$e'\varepsilon \to \min;$$
$$M_0 q + \Delta M\left|q\right| \le P_0 - \Delta P + \varepsilon;$$
$$-M_0 q + \Delta M\left|q\right| \le -P_0 - \Delta P + \varepsilon; \tag{16}$$
$$\varepsilon \ge 0,\ \ q \in Q \subset R^m.$$

Если Q – брус, т. е. выпуклый замкнутый ограниченный многогранник, то задача (16) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$e'\varepsilon \to \min;$$
$$M_0 q + \Delta M w - \varepsilon \le P_0 - \Delta P;$$
$$-M_0 q + \Delta M w - \varepsilon \le -P_0 - \Delta P; \tag{17}$$
$$\varepsilon \ge 0,\ -w \le q \le w.$$

Задача (17), очевидно, всегда разрешима, при этом, если ε^0, q^0, w^0 – ее решение, то $\varepsilon = \varepsilon^0$ – радиус минимальной окрестности нуля, куда попадут все векторы $x(t_1)$, управляемые дескрипторным регулятором, стартующим из начального условия $y_0 = D_1{}^d D_1 q_0$.

Таким образом, если Q – брус, то начальное состояние дескрипторного регулятора находится из решения задачи линейного программирования (17).

Когда множество Q произвольно, решается задача нелинейного программирования (16). Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для управляемости ансамбля систем (1) достаточно, чтобы разрешимая задача линейного программирования (17) имела оптимальный план $(\varepsilon^0, q^0, w^0)$ с $\varepsilon^0 = 0$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Следствие 1. Если интервалы $[A]$, $[B]$, $[x_0]$ вырождены, то управляемость системы (1) из состояния $x(0) = x_0$ в нуль дескрипторным регулятором равносильна разрешимости системы алгебраических уравнений

$$M_0 q - P_0 = 0,$$

где M_0 и P_0 вычислены по формулам (14). Причем условие $\operatorname{rank} M_0 = n$ будет необходимым и достаточным.

Следствие 2. Если интервалы $[A]$, $[B]$ вырождены и вектор q является решением задачи (17), то выполнение неравенства $\Delta P \le \varepsilon$ достаточно для управляемости дескрипторным регулятором. Это, очевидно, следует из ограничений задачи (17).

Следствие 3. Если все интервальные объекты вырождены, то система (1) управляема дескрипторным регулятором (3) тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\operatorname{rank}\left(\int_0^{t_1} e^{A(\tau - t_1)} B C e^{(D_1^d D_2)\tau} D_1^d D_1 d\tau\right) = n,$$

которое эквивалентно условиям [3]:

$$\operatorname{rank}(B, AB, A^2 B, \ldots, A^{n-1} B) = n;$$

$$\operatorname{rank}(C D_1^d D_1, C D_1^d K D_1, C D_1^d K^2 D_1, \ldots$$

$$\ldots, C D_1^d K^{n-1} D_1) = n,$$

где $K = D_2 D_1^d$.

Заключение. Отметим, что полученные результаты предполагается перенести и на более сложные объекты управления, такие как нестационарные системы с последействием и т. п.

Список литературы

1. Гайшун И. В., Горячкин В. В., Крахотко В. В. Управление ансамблем линейных дискретных двухпараметрических систем // Весцi НАН Беларусi. 2018. № 1. С. 20–23.

2. Управление ансамблем линейных систем с запаздыванием по управлению в классе кусочно-постоянных функций / В. В. Крахотко [и др.] // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2021. № 1 С. 5–8 .

3. Игнатенко В. В. Управляемость динамических систем с помощью регулятора // Вестник БГУ. Сер. 1, № 2. 1976. С. 56–58.

4. Крахотко В. В., Игнатенко В. В., Размыслович Г. П. К управляемости линейных систем дескрипторными регуляторами // Труды БГТУ. Сер 3. Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 1. С. 5–7.

5. Campbell S. L., Meyer C. D., Rose, N. J. Applications of the Drazin inverse to Linear systems of Differential equations with Singular constant Coefficients // SIAM J. Appl. Math. 1976. Vol. 31, no. 3. P. 411–425.

6. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 224 с.

7. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.

8. Ащепков Л. Т. Внешние оценки и ступенчатая управляемость интервальных линейных систем // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 51–58.

9. Ащепков Л. Т., Давыдов Д. В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. М.: Наука, 2006.151 с.

References

1. Gaishun I. V., Goryachkin V. V., Krakhotko V. V. Control of an ensemble of linear discrete two-parameter systems. *Vesti NAN Belarusi* [Vesti National Academy of Sciences of Belarus], 2018, no. 1, pp. 20–23 (In Russian).

2. Krakhotko V. V., Goryachkin V. V., Ignatenko V. V., Razmyslovich G. P. Management of an ensemble of linear systems with a delay in control in the class of succulent-constant functions. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2021, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).

3. Ignatenko V. V. The Controllability of dynamical systems with a controller. *Vestnik BGU* [Bulletin of the Belarusian State University], series 1, Physics, Mathematics, Mechanics, 1976, no. 2, pp. 56–58 (In Russian).

4. Krakhotko V. V., Ignatenko V. V., Razmyslovich G. P. On controllability of linear systems by descriptor regulator. *Trudu BGTU* Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 1, pp. 5–7 (In Russian).

5. Campbell S. L., Meyer C. D., Rose, N. J. Applications of the Drazin inverse to Linear systems of Differential equations with Singular constant Coefficients. *SIAM J. Appl. Math.*, 1976, vol. 31, no. 3, pp. 411–425.

6. Kalmykov S. A., Shokin Yu. I., Yuldashev Z. H. *Metody interval'nogo analisa* [Methods of interval analysis]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1986. 224 p. (In Russian).

7. Alefeld G., Herzberger Yu. *Vvedenie v interval'nyye vichisleniya* [Introduction to interval calculations]. Moscow, Mir Publ., 1987. 360 p. (In Russian).

8. Ashchepkov L. T. External estimates and stepwise controllability of interval linear systems. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 2008, no. 4, pp. 51–58 (In Russian).

9. Ashchepkov L. T., Davydov D. V. *Universal'nyye resheniya interval'nikh zadach optimizatsii i upravleniya* [Universal solutions of interval optimization and control problems]. Moscow, Nauka Publ., 2006. 151 p. (In Russian).

Информация об авторах

Крахотко Валерий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры методов оптимального управления. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: krakhotko@bsu.by

Горячкин Владимир Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры технологий программирования. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: gorvv@bsu.by

Игнатенко Василий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ihnatsenko@tut.by

Размыслович Георгий Прокофьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: razmysl@bsu.by

Information about the authors

Krakhotko Valeriy Vasilievich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Optimal Control Methods. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030, Republic of Belarus). E-mail: krakhotko@bsu.by

Goryachkin Vladimir Viktorovich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Programming Technologies. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030, Republic of Belarus). E-mail: gorvv@bsu.by

Ignatenko Vasiliy Vasil'evich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higer Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ihnatsenko@tut.by

Razmyslovich George Prokof'evich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Mathematics. Belarusian state University (4, Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030, Republic of Belarus). E-mail: razmysl@bsu.by

Поступила после доработки 03.04.2022