УДК 519.862.6

А. А. Якименко
Белорусский государственный технологический университет

К ВОПРОСУ ОБ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ СИСТЕМ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассматривается задача идентифицируемости систем одновременных уравнений. Дано определение задачи идентифицируемости. В публикации проведен анализ имеющихся в литературе необходимых, достаточных условий идентифицируемости. Установлено, что некоторые из этих условий не являются верными. В работе получено новое достаточное условие разрешимости задачи идентифицируемости. Кроме того, рассмотрен метод получения оценок структурной формы модели системы одновременных уравнений по оценкам приведенной формы, выведенных методом наименьших квадратов. Также приведена модификация двухэтапного метода наименьших квадратов.

Ключевые слова: системы одновременных уравнений, идентифицируемость, структурная форма, приведенная форма, достаточное условие идентифицируемости, двухэтапный метод наименьших квадратов.

Для цитирования: Якименко А. А. К вопросу об идентифицируемости систем одновременных уравнений // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 2 (260). С. 10–13.

A. A. Yakimenka
Belarusian State Technological University

ON THE QUESTION OF IDENTIFICATION OF SIMULTANEOUS EQUATIONS MODELS

The article deals with the problem of identification of simultaneous equations models. The definition of the problem of identification is given. The article analyzes the necessary, sufficient conditions for identification available in the literature. It has been found that some of these conditions are not true. In this work, a new sufficient condition for the solvability of the identification problem is obtained. In addition, a method for obtaining estimates of the structural form of a model of a of simultaneous equations models from estimates of the reduced form obtained by the least squares method is given. A modification of the two-stage least squares method is also given.

Key words: simultaneous equations models, identification, structural form, reduced form, sufficient condition for identification, two-stage least squares method.

For citation: Yakimenka A. A. On the question of identification of simultaneous equations models. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2022, no. 2 (260), pp. 10–13.

Введение. Система одновременных уравнений представляет собой систему линейных регрессионных уравнений, в которой в качестве регрессоров отдельного уравнения могут выступать зависимые переменные из других уравнений системы. Если по выборке методом наименьших квадратов найти оценки параметров такой системы, то эти оценки окажутся смещенными и не состоятельными. Чтобы получить несмещенные и состоятельные оценки, от исходной системы, называемой структурной формой системы одновременных уравнений, переходят к приведенной форме, в которой в качестве регрессоров каждого уравнения выступают только независимые переменные. Оценки такой системы, полученные методом наименьших квадратов, будут обладать свойствами несмещенности и состоятельности. Задача идентифицируемости состоит в определении связи между параметрами структурной и приведенной форм. Задача идентифицируемости изучалась многими авторами [1–10]. В работе показано, что некоторые из условий, полученные авторами, не являются корректными.

Основная часть. Рассмотрим структурную форму системы одновременных уравнений

$$y = By + Ax + c + \varepsilon, \tag{1}$$

где $y \in \mathbb{R}^m$ – вектор зависимых (эндогенных) переменных, $x \in \mathbb{R}^k$ – вектор независимых (экзогенных) переменных, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – матрица регрессионных коэффициентов при эндогенных переменных, $b_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ – матрица регрессионных коэффициентов при экзогенных переменных, $c \in \mathbb{R}^m$ – вектор свободных членов регрессионных уравнений, $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ – вектор случайных отклонений. Некоторые из элементов матриц B и A могут быть известными и равными нулю. Перепишем систему (1) в виде

$$y - By = Ax + c + \varepsilon$$

или

$$\left(I_m - B\right) y = Ax + c + \varepsilon,$$

где I_m – единичная матрица порядка m.

В предположении, что матрица $I_m - B$ не вырождена, умножим обе части последнего равенства слева на матрицу $\left(I_m - B\right)^{-1}$. Придем к системе

$$y = Dx + E + \eta, \qquad (2)$$

где $D = \left(I_m - B\right)^{-1} A$, $E = \left(I_m - B\right)^{-1} c$, $\eta = \left(I_m - B\right)^{-1} \varepsilon$.

Система (2) называется приведенной формой системы одновременных уравнений. Оценки регрессионных коэффициентов системы (2) можно найти по методу наименьших квадратов. В дальнейшем элементы матриц $D \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $E \in \mathbb{R}^{m}$ будем считать известными.

Возможность нахождения параметров структурной формы (1) по параметрам приведенной формы (2) составляет суть проблемы идентифицируемости. Имеют место следующие определения различных видов идентифицируемости.

Определение 1. Система (1) называется *точно идентифицируемой* (2), если оценки регрессионных коэффициентов структурной формы (1) единственным образом находятся с помощью оценок регрессионных коэффициентов приведенной системы (2).

Определение 2. Система (1) называется *сверхидентифицируемой* (2), если оценки регрессионных коэффициентов структурной формы (1), найденные с помощью оценок регрессионных коэффициентов приведенной системы (2), могут принимать два и более различных значений.

Определение 3. Система (1) называется *не идентифицируемой* (2), если оценки регрессионных коэффициентов структурной формы (1) невозможно найти с помощью оценок регрессионных коэффициентов приведенной системы (2).

Подставим в правую часть (1) вместо y правую часть (2):

$$\begin{aligned} y &= B\left(Dx + E + \eta\right) + Ax + c + \varepsilon = \\ &= BDx + BE + B\eta + Ax + c + \varepsilon = \\ &= \left(BD + A\right)x + BE + c + B\eta + \varepsilon. \end{aligned}$$

Сравнивая правые части последнего равенства и равенства (2), получим

$$BD + A = D;$$

$$BE + c = E,$$

или

$$A = \left(I_m - B\right) D; \qquad (3)$$

$$c = \left(I_m - B\right) E. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что для решения задачи идентифицируемости необходимо и достаточно нахождения элементов матрицы B. Элементы матриц A и c находятся по формулам (3) и (4).

Известно, что для идентифицируемости системы (1) необходимо и достаточно идентифицируемости каждого уравнения системы. В литературе приводятся различные необходимые, а также достаточные условия идентифицируемости. В работе [4, с. 188] указывается следующее необходимое условие точной идентифицируемости уравнения номер i системы (1):

$$n_i = p_i,$$

где n_i есть количество ненулевых регрессионных коэффициентов β_{ij} уравнения номер i системы (1); p_i – количество нулей в строке номер i матрицы A. Там же сказано, что если $n_i < p_i$, то уравнение сверхидентифицируемо, а если $n_i > p_i$, то уравнение неидентифицируемо. Ниже будет показано, что эти утверждения неверны.

В других источниках [5–10] приводится условие

$$n_i \le p_i, \qquad (5)$$

которое представляется более точным. Очевидно, что для того, чтобы условие (5) могло иметь место, должно быть выполнено неравенство

$$k \ge m - 1. \qquad (6)$$

В самом деле, если предположить, что $k < m - 1$, то в случае, когда $n_i = m - 1$ и $p_i = k$, неравенство (5) примет вид $m - 1 \le k$, что противоречит сделанному предположению.

Известны разные достаточные условия идентифицируемости уравнения системы (1). Например, в издании [4, с. 189, 190] достаточное условие имеет вид: уравнение идентифицируемо, если по отсутствующим в нем переменным (эндогенным и экзогенным) можно из коэффициентов при них в других уравнениях системы (1) составить матрицу, определитель которой не равен нулю, а ранг матрицы не меньше, чем число эндогенных переменных в системе без одного. Однако данное условие не использует известные коэффициенты приведенной формы, поэтому оно является неверным. В работах [5–10] приведено другое достаточное условие строгой идентифицируемости: уравнение номер i будет строго идентифицируемо, если ранг матрицы, получившейся из матрицы D выделением ее строк, соответствующих ненулевым регрессионным коэффициентам при эндогенных переменных этого уравнения и ее столбцов, соответствующих нулевым коэффициентам при экзогенных переменных этого уравнения, имеет ранг, равный n_i. Тем не менее, как будет показано ниже, и это условие не является точным.

Пусть выполнены условия (5), (6). Введем обозначения: J_{A_i} – множество значений в порядке возрастания индекса j, для которых элементы a_{ij} строки номер матрицы A равны нулю; J_{B_i} – множество значений в порядке возрастания индекса j, для которых элементы b_{ij} строки номер i матрицы B не равны нулю. Ясно, что в множестве J_{A_i} будет p_i элементов, а в множестве J_{B_i} будет n_i элементов. Сравним элементы строки номер i и столбцов номер $j \in J_{A_i}$ в левой части и правой частях матричного уравнения (3). Получим систему вида

$$\left\{ 0 = -\sum_{l \in J_{B_i}} \beta_{il} d_{ls} + d_{is},\ s \in J_{A_i}, \right. \qquad (7)$$

где d_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, k}$ – элементы матрицы D.

Система (7) представляет собой систему p_i уравнений с n_i неизвестными. В силу условия (5) число уравнений этой системы не меньше числа неизвестных.

Обозначим через D_i матрицу, которая получается из матрицы D выделением из нее строк из множества J_{B_i} и столбцов из множества J_{A_i}. Нетрудно увидеть, что матрица D_i^T является матрицей системы (7). Здесь знак $(\cdot)^T$ означает транспонирование. Правая часть системы (7) является вектором $d_i^T = \left(d_{is} \mid s \in J_{A_i}\right)$. Если к матрице D_i^T присоединить столбец d_i, то получим матрицу $\bar{D}_i^T$ – расширенную матрицу системы (7). Из теоремы Кронекера – Капелли следует, что имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Если выполнено условие

$$\text{rank } D_i^T = \text{rank } \bar{D}_i^T = n_i,$$

то уравнение номер i системы (1) строго идентифицируемо системой (2).

Теорема 2. Если выполнено условие

$$\text{rank } D_i^T = \text{rank } \bar{D}_i^T < n_i,$$

то уравнение номер i системы (1) сверхидентифицируемо системой (2).

Теорема 3. Если выполнено условие

$$\text{rank } D_i^T \neq \text{rank } \bar{D}_i^T,$$

то уравнение номер i системы (1) не идентифицируемо системой (2).

Для нахождения параметров структурной формы строго идентифицируемой системы одновременных уравнений по приведенной форме используют двухэтапный метод наименьших квадратов. Он состоит из следующих этапов:

1) от структурной формы (1) переходят к приведенной форме (2);

2) по методу наименьших квадратов по выборке определяют регрессионные коэффициенты приведенной формы (2);

3) по коэффициентам приведенной формы (2) находят регрессионные коэффициенты структурной формы (1).

По мнению автора, первый этап – лишний. Необходимо сразу рассчитывать по выборке регрессионные коэффициенты приведенной формы (2). Затем нужно проверить строгую идентифицируемость системы (1). После этого, решив систему (7), получим структурные коэффициенты системы (1).

Заключение. В данной статье уточнены необходимые, достаточные условия идентифицируемости, полученные ранее другими исследователями.

Рассмотрен конкретный метод нахождения структурных коэффициентов по приведенным коэффициентам для строго идентифицируемой системы (1). Также получена модификация двухэтапного метода наименьших квадратов.

Список литературы

1. Айвазян С. А. Прикладная статистика. Основы эконометрики. М.: Юнити-Дана, 2001. Т. 2. 432 с.

2. Кремер Н. Ш., Путко Б. А. Эконометрика. М.: Юнити-Дана, 2003–2004. 311 с.

3. Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс. М.: Дело, 2007. 504 с.

4. Эконометрика: учебник / под ред. И. И. Елисеевой М.: Финансы и статистика, 2003. 344 с.

5. Martin V., Hurn S., Harris D. Econometric Modelling with Time Series. Cambridge University Press, 2013. 159 p.

6. Maddala G. S., Lahiri K. Introduction to Econometrics (Fourth ed.). Wiley, 2009. 498 p.

7. Asteriou D., Hall S. Applied Econometrics (Second ed.). Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2011. 395 p.

8. Fomby T., Hill R., Johnson S. Simultaneous Equations Models. Advanced Econometric Methods. New York: Springer, 1984. 763 p.

9. Ruud P. Simultaneous Equations. An Introduction to Classical Econometric Theory. Oxford University Press, 2000. 950 p.

10. Wooldridge J. Simultaneous Equations Models. Introductory Econometrics (Fifth ed.). South-Western, 2013. 830 p.

References

1. Ayvazyan S. A. *Prikladnaya statistika*. *Osnovy ekonometriki* [Applied statistics. Fundamentals of econometrics]. Moscow, Yunity-Dana Publ., 2001, vol. 2. 432 p. (In Russian).

2. Kremer N. Sh., Putko B. A. *Ekonometrika* [Econometrics]. Moscow, Yunity-Dana Publ., 2003–2004. 311 p. (In Russian).

3. Magnus Ya. R., Katyshev P. K., Peresetsky A. A. *Ekonometrika. Nachal'nyy kurs* [Econometrics. Initial course]. Moscow, Delo Publ., 2007. 504 p. (In Russian).

4. *Ekonometrika: uchebnik* [Econometrics. Textbook]. Ed. by I. I. Eliseeva. Moscow, Finansy i Statistika Publ., 2003. 344 p. (In Russian).

5. Martin V., Hurn S., Harris D. Econometric Modelling with Time Series. Cambridge, Cambridge University Press Publ., 2013. 159 p.

6. Maddala G. S., Lahiri K. Introduction to Econometrics (Fourth ed.). Wiley Publ., 2009. 498 p.

7. Asteriou D., Hall S. Applied Econometrics (Second ed.). Basingstoke, Palgrave Macmillan Publ., 2011. 395 p.

8. Fomby T., Hill R., Johnson S. Simultaneous Equations Models. Advanced Econometric Methods. New York, Springer Publ., 1984. 763 p.

9. Ruud P. Simultaneous Equations. An Introduction to Classical Econometric Theory. Oxford, Oxford University Press Publ., 2000. 950 p.

10. Wooldridge J. Simultaneous Equations Models. Introductory Econometrics (Fifth ed.). South-Western Publ., 2013. 830 p.

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила после доработки 13.04.2022