УДК 517.588

Л. Д. Яроцкая
Белорусский государственный технологический университет

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА G-ФУНКЦИИ МЕЙЕРА С ДВУМЯ МНИМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Проблема асимптотических разложений специальных функций по индексам или параметрам возникает в связи с исследованием некоторых классов интегралов и преобразований по индексам. Наиболее общей специальной функцией гипергеометрического типа является G-функция Мейера. Важность G-функции в значительной степени связана с возможностью выразить через G-символ большое число специальных функций и их комбинаций, встречающихся в прикладной математике.

Работа посвящена изучению асимптотических свойств G-функции Мейера специального вида с двумя мнимыми параметрами, когда их значения по абсолютной величине достаточно велики. Показано, что рассматриваемая функция при частных значениях параметров обобщает ядра известных интегральных преобразований по индексу, в частности, преобразований Конторовича – Лебедева, Мелера – Фока, Олевского, Лебедева и других. С помощью теоремы Слейтер записано представление G-функции в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов со степенными множителями.

Для функций гипергеометрического типа справедливо свойство иметь своим преобразованием Меллина отношение произведений гамма-функций Эйлера, асимптотика которых в соответствии с формулой Стирлинга известна. Записана формула Стирлинга для гамма-функции Эйлера комплексного аргумента, у которого мнимая часть неограниченно увеличивается, а действительная фиксирована. Установлены асимптотические оценки G-функции Мейера специального вида, у которой мнимая часть двух параметров неограниченно возрастает. Показано, что полученное разложение включает в себя в качестве частных случаев известные в литературе некоторые представления функций Бесселя и родственных им функций.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, G-функция Мейера, преобразования по индексу, функции Бесселя, формула Стирлинга, гамма-функции Эйлера.

Для цитирования: Яроцкая Л. Д. Асимптотические свойства G-функции Мейера с двумя мнимыми параметрами // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 2 (260). С. 14–20.

L. D. Yarotskaya
Belarusian State Technological University

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF MEIJER`S G-FUNCTION WITH TWO IMAGINARY PARAMETERS

The problem of asymptotic expansions of special functions by their indices or parameters arises in connection with the investigation of some classes of integrals and index transforms. The Meyer G-function is the most common function of the hypergeometric type. The G-function is important in applied mathematics due to the ability to express through the G-symbol a large number of special functions and their combinations.

This paper deals with some asymptotic properties of the Meyer G-function of a special kind with two imaginary parameters, which are large enough by their absolute values. It is shown that particular cases of the considered function are the kernels of known integral transformations by index – the transformations of Kontorovich – Lebedev, Mehler – Fock, Olevsky, Lebedev and others. The representation of the G-function in the form of a linear combination of generalized hypergeometric series with power multipliers is based on the Slater's theorem.

The Mellin transforms of functions of the hypergeometric type are the ratio of the products of the Euler gamma functions whose asymptotics are known in accordance to the Stirling formula. We give the Stirling formula for the Euler gamma function of a complex argument, for which the imaginary part is unbounded and the real part is fixed. Asymptotic estimates for the Meijer`s G-function of a special form with respect to large values of the parameter are established. It is shown that such expansion includes, as special cases, earlier known representations Bessel functions and functions connected with them.

Key words: asymptotic expansion, Meijer`s G-function, index transform, Bessel functions, Stirling formula, Euler Gamma-function.

For citation: Yarotskaya L. D. Asymptotic properties of Meijer`s G-function with two imaginary parameters. *Proceedings of BSTU*, *issue 3*, *Physics and Mathematics*. *Informatics*, 2022, no. 2 (260), pp. 14–20 (In Russian).

Введение. В приложениях часто используют различные интегральные преобразования, обобщающие преобразование Фурье. Можно условно выделить два основных класса: преобразования типа свертки и преобразования по индексу. Самые общие из этих преобразований содержат в ядрах G-функцию Мейера, остальные выводятся из них при частных значениях параметров. Обзор свыше 800 работ по интегральным преобразованиям приведен в источнике [1].

Интегральное преобразование по индексу с G-функцией Мейера в ядре было введено в работе [2] и исследовано в [3] в пространстве функций $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$. Особенностями этого преобразования являются те обстоятельства, что интеграл зависит от переменной, входящей в параметры, а не в аргумент G-функции. Соответственно, в формуле обращения преобразования интегрирование следует вести по параметрам, а не по аргументу, что имеет место в случае преобразования типа свертки.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотических свойств *G*-функции Мейера специального вида с двумя мнимыми параметрами, у которых мнимая часть неограниченно увеличивается. Отметим, что рассматриваемая специальная функция относится к функциям гипергеометрического типа и обобщает изученное в работе [4] ядро интегрального преобразования по индексу в весовых пространствах суммируемых с квадратом функций.

Асимптотическое поведение функций гипергеометрического типа различно в зависимости от того, что стремится к бесконечности: параметры, независимая переменная или эти величины вместе. Исследования в этой области основаны на представлении функции в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов, для которых справедливо свойство иметь своим преобразованием Меллина отношение произведений гамма-функций Эйлера, асимптотика которых в соответствии с формулой Стирлинга известна. В работах [5], [6] такой подход реализован при нахождении асимптотических представлений на бесконечности по мнимым параметрам функций Макдональда, Уиттекера, Лежандра, гипергеометрической функции Гаусса и некоторых других. Аналогичные вопросы рассмотрены в работе [7] для двух функций бесселевого типа.

Основная часть.

1. ***Предварительные сведения.*** G-функция определена Мейером в 1941 г. контурным интегралом Меллина – Барнса [8]

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \Psi(s)\,z^{-s}ds \qquad (1)$$

для целых неотрицательных m, n, p, q, $0\le m\le q$, $0\le n\le p$, комплексных a_i и b_j при $z\ne 0$, где

$$\Psi(s)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+s\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(1-a_i-s\right)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-s\right)\prod\limits_{i=n+1}^{p}\Gamma\left(a_i+s\right)}, \qquad (2)$$

при этом пустые произведения в (2) (если таковые имеются) считаются равными единице;

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt,\ \ s>0 -$$

гамма-функция Эйлера [8]. Контур L в (1) – специально выбранный замкнутый контур, проходящий через бесконечно удаленную точку и разделяющий все левые полюсы $s=-b_j-k$, $j = 1, \ldots, m$, числителя от правых $s=1-a_i+k$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Важным свойством G-функции является то, что ее преобразование Меллина, определяемое равенством

$$(\mathfrak{M}f)(s)=\int_0^\infty f(t)\,t^{s-1}dt,\ \ s\in\mathbb{C}, \qquad (3)$$

является при определенных условиях на параметры отношением произведений гамма-функций Эйлера и совпадает с функцией (2), т. е.

$$\left(\mathfrak{M}\,G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)\right)(s)=\Psi(s).$$

Замена переменной в интеграле (1) дает формулу симметрии:

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)=G_{q,p}^{n,m}\left(\frac{1}{z}\left|\begin{matrix}1-b_1,\ldots,1-b_q\\ 1-a_1,\ldots,1-a_p\end{matrix}\right.\right). \qquad (4)$$

Свойство (4) позволяет преобразовать G-функцию, для которой $p>q$, в G-функцию, где $p<q$. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что $p\le q$.

Важным рядом в приложениях и теории специальных функций является обобщенный гипергеометрический ряд [8]

$${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix};z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k\ldots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}, \qquad (5)$$

содержащий в числителе p, а в знаменателе q параметров, коэффициенты которого определяются символом Похгаммера:

$$(a)_k=a(a+1)\ldots(a+k-1)=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)},\qquad (a)_0=1.$$

Ряд в правой части (5) абсолютно сходится при всех z, если $p\le q$.

Функции, представимые в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов, а также функции, которые можно непрерывно получить из такой линейной комбинации предельными переходами по параметрам, принято относить к классу функций гипергеометрического типа.

Многие элементарные и большинство изученных специальных функций являются функциями гипергеометрического типа и поэтому, в общем, могут быть определены как линейные комбинации интегралов Меллина – Барнса (1). Переход от образов Меллина, имеющих вид (2), к их прообразам осуществляется с помощью теоремы Слейтер или теории вычетов, на основании которой эта теорема доказана [9].

Отметим, что функции Бесселя являются частными случаями G-функции Мейера. Укажем некоторые представления [6], [9], [10]:

1) функция Макдональда:

$$K_\nu\left(2\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{G}_{0,2}^{2,0}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix} \\ \nu/2,-\nu/2\end{matrix}\right); \tag{6}$$

2) линейная комбинация функций Бесселя первого рода и функции Макдональда:

$$\left[J_{-\nu}\left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}\right)-J_\nu\left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}\right)\right]K_\nu\left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}\right)=$$

$$=\frac{\sin(\pi\nu/2)}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{G}_{0,4}^{3,0}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix} \\ 0,\nu/2,-\nu/2,1/2\end{matrix}\right); \tag{7}$$

3) линейная комбинация функций гипергеометрического типа [4]:

$$C_s\left(2\sqrt{x},2\tau\right)=\frac{1}{2\tau}\,{}_1F_2\left(1;1-i\tau,1+i\tau;x\right)-$$

$$-\frac{\pi}{4\,\mathrm{sh}(\pi\tau)}\left[I_{2i\tau}\left(2\sqrt{x}\right)+I_{-2i\tau}\left(2\sqrt{x}\right)\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{sh}(\pi\tau)}{2}\mathrm{G}_{2,4}^{3,1}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}0,1/2\\ i\tau,-i\tau,\ 0,1/2\end{matrix}\right). \tag{8}$$

2. *Постановка задачи.* Для G-функции Мейера специального вида действительного аргумента $x>0$

$$\mathrm{G}(x)=\mathrm{G}_{p,2m+2}^{m+2,n}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p)\\ i\tau,-i\tau,(b_m),1/2-(b_m)\end{matrix}\right), \tag{9}$$

где параметры записаны в виде векторов

$$(a_p)=a_1,\ldots,a_p,\quad (b_m)=b_1,\ldots,b_m,$$

изучить асимптотические свойства при больших значениях τ. Отметим, что функция (9) при $p=2n$ рассматривалась в работе [4] в качестве ядра интегрального преобразования по индексу. Ее асимптотические свойства по τ получены в работе [11].

Введем обозначение [9]

$$\Gamma\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)=\frac{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_p)}{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_q)}.$$

Тогда ядро (2) для функции (9) запишем в виде

$$\Psi(s)=\Gamma\left(\begin{matrix}i\tau+s,-i\tau+s,(b_m)+s,1-(a_n)-s\\ \left(a_p^{n+1}\right)+s,1/2+(b_m)-s\end{matrix}\right) \tag{10}$$

(пустое произведение заменяется единицей), где

$$\left(a_p^{n+1}\right)+s=a_{n+1}+s,\ldots,a_p+s.$$

3. *Представление G-функции Мейера через линейные комбинации обобщенных гипергеометрических рядов со степенными множителями.* Применим теорему Слейтер [9] для представления функции, преобразование Меллина (3) которой имеет вид (10).

Предположим, что

$$p\le 2m+2,\ a_j,b_k\in\mathbb{R},\ j=1,\ldots,p,\ k=1,\ldots,m,$$

и никакие из параметров $b_1,\ldots,b_m$ не совпадают и не отличаются на целое число.

Теорема 1. Пусть для ядра $\Psi(s)$, определенного формулой (10), выполнены условия

$$0<\mathrm{Re}\,s<1-a_k,\quad k=1,2,\ldots,n,$$

$$-b_j<\mathrm{Re}\,s<1-a_k,\quad j=1,2,\ldots,m,\ k=1,2,\ldots,n,$$

$$p\le 2n+2,$$

$$(2m+2-p)\mathrm{Re}\,s<-\mathrm{Re}\,\nu,\ \text{если}\ 2n+2=p,$$

где

$$\nu=n-\frac{m}{2}-\sum_{k=1}^{p}a_k.$$

Тогда при действительных значениях $x>0$ для G-функции (9) справедливо представление

$$G(x)=\mathrm{Re}_{i\tau}\left[x^{i\tau}\Gamma\left(\begin{matrix}-2i\tau,(b_m)-i\tau,1-(a_n)+i\tau\\ \left(a_p^{n+1}\right)-i\tau,1/2+(b_m)+i\tau\end{matrix}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,{}_pF_{2m+1}\left(\begin{matrix}1-(a_p)+i\tau;\quad (-1)^{p-n-m}x\\ 1+2i\tau,1-(b_m)+i\tau,1/2+(b_m)+i\tau\end{matrix}\right)\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}x^{b_j}\Gamma\left(i\tau-b_j,-i\tau-b_j\right)\times$$

$$\times\Gamma\left(\begin{matrix}(b_m)'-b_j,1-(a_n)+b_j\\ \left(a_p^{n+1}\right)-b_j,1/2+(b_m)+b_j\end{matrix}\right)\times$$

$$\times {}_pF_{2m+1}\left(\begin{matrix} 1-(a_p)+b_j \\ 1-i\tau+b_j, 1+i\tau+b_j, 1-(b_m)'+b_j, \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \\ 1/2+(b_m)+b_j; (-1)^{p-n-m}x \end{matrix}\right), \qquad (11)$$

где символ $\mathrm{Re}_{i\tau}\left[f(i\tau)\right]$ означает

$$\mathrm{Re}_{i\tau}\left[f(i\tau)\right] = f(i\tau) + f(-i\tau),$$

а символ $(b_m)' - b_j$ означает

$$b_1 - b_j, \ldots, b_{j-1} - b_j, b_{j+1} - b_j, \ldots, b_m - b_j.$$

Из формул (11) и (4) непосредственно вытекают асимптотические оценки для G-функции (9) действительного аргумента:

$$G(x) = \begin{cases} O(x^\beta), \ x \to 0, \beta = \min\limits_{1\le j\le m}\{b_j\}, \\ O(|x|^{\alpha-1}), \ x \to \infty, \alpha = \max\limits_{1\le j\le n}\{a_j\}. \end{cases} \qquad (12)$$

4. *Формула Стирлинга.* Метод нахождения асимптотических выражений функции (9) при фиксированных x и больших τ основан на применении формулы Стирлинга для гамма-функции Эйлера [8]:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \qquad (13)$$

когда $|z| \to \infty$ и $|\arg z| < \pi$.

Оценим остаточный член формулы (13), исходя из формулы Бине [8]:

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) +$$

$$+ \int_0^\infty \left[\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right]\frac{e^{-zt}}{t}dt, \quad \mathrm{Re}\, z > 0. \qquad (14)$$

Пусть $z = \alpha + i\tau$, $\alpha > 0$. Обозначим

$$\varphi(\alpha + i\tau) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right]\frac{e^{-(\alpha+i\tau)t}}{t}dt =$$

$$= \int_0^\infty \phi(t) t^{-\gamma} e^{-i\tau t} dt, \quad 0 < \gamma < 1,$$

где

$$\phi(t) = \left[\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right] e^{-\alpha t} t^{-\beta}, \quad \beta = 1 - \gamma.$$

Очевидно, что $\phi(t)$ – функция ограниченной вариации на интервале $(0; +\infty)$. Более того, имеют место асимптотические соотношения:

$$\phi(t) = O(t^\gamma), \quad t \to +0,$$

$$\phi(t) = O(t^{-\beta} e^{-\alpha t}), \quad t \to +\infty.$$

Отсюда, согласно теореме 126 из [12], получим

$$\varphi(\alpha + i\tau) = \int_0^\infty \phi(t) t^{-\gamma}\cos(\tau t)dt +$$

$$+ i\int_0^\infty \phi(t) t^{-\gamma}\sin(\tau t)dt = O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \to +\infty. \qquad (15)$$

В силу (14) и (15), запишем формулу (13) в виде

$$\Gamma(\alpha \pm i\tau) = \sqrt{2\pi}\exp\left[\left(\alpha - \frac{1}{2} \pm i\tau\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\ln\sqrt{\tau^2 + \alpha^2} \pm i\,\mathrm{arctg}\frac{\tau}{\alpha}\right\} - \alpha \mp i\tau - O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right], \tau \to +\infty.$$

Отсюда после непосредственных преобразований при $\tau \to +\infty$ следует формула

$$\Gamma(\alpha \pm i\tau) = \sqrt{2\pi}\tau^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\times$$

$$\times\exp\left[\pm i\left\{\frac{\pi}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \tau\ln\tau - \tau\right\} - O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]. \qquad (16)$$

В случае $\alpha \le 0$ используем формулу дополнения для гамма-функции

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

и формулу (16).

Таким образом, без потери общности будем считать, что α и τ – действительные числа.

5. *Асимптотические представления G-функции (9).* Пусть выполняются условия теоремы 1. Введем обозначение

$$C_j = \Gamma\left(\begin{matrix} (b_m)' - b_j, 1 - (a_n) + b_j \\ (a_p^{n+1}) - b_j, 1/2 + (b_m) + b_j \end{matrix}\right).$$

Используя формулу удвоения Лежандра для гамма-функции [8]

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right),$$

запишем сумму (11) в виде

$$G(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{Re}_{i\tau}\left[\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}\Gamma(-i\tau)\Gamma(1/2 - i\tau)\times\right.$$

$$\times\Gamma\left(\begin{matrix}(b_m)-i\tau,1-(a_n)+i\tau\\ (a_p^{n+1})-i\tau,1/2+(b_m)+i\tau\end{matrix}\right)\times$$

$$\times{}_pF_{2m+1}\left(\begin{matrix}1-(a_p)+i\tau;\ (-1)^{p-n-m}x\\ 1+2i\tau,1-(b_m)+i\tau,1/2+(b_m)+i\tau\end{matrix}\right)\Bigg]+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}C_jx^{b_j}\Gamma(i\tau-b_j,-i\tau-b_j)\times$$

$$\times{}_pF_{2m+1}\left(\begin{matrix}1-(a_p)+b_j\\ 1-i\tau+b_j,1+i\tau+b_j,1-(b_m)'+b_j,\end{matrix}\right.$$

$$\left.1/2+(b_m)+b_j\ ;(-1)^{p-n-m}x\right).\qquad(17)$$

Далее, используя оценку (16), при достаточно больших положительных τ получим для гамма-множителей первого слагаемого в (17) выражение вида

$$\Gamma\left(\begin{matrix}-i\tau,1/2-i\tau,(b_m)-i\tau,1-(a_n)+i\tau\\ (a_p^{n+1})-i\tau,1/2+(b_m)+i\tau\end{matrix}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{2\pi}\right)^{2n+2-p}e^{-\left(n+1-\frac{p}{2}\right)\pi\tau}\tau^{\frac{p-m-1}{2}-\sum_{k=1}^{p}a_k}\times$$

$$\times\exp\left[-i\left\{(2m+2-p)(\tau\ln\tau-\tau)+\frac{\pi}{2}\chi\right\}\right]\times$$

$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right),\quad\tau\to+\infty,\qquad(18)$$

где

$$\chi=2\sum_{j=1}^{m}b_j+\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=n+1}^{p}a_k-n+\frac{p-m-1}{2}.$$

Оценим символ Похгаммера при $\tau\to+\infty$:

$$(a\pm i\tau)_k=\frac{\Gamma(a+k\pm i\tau)}{\Gamma(a\pm i\tau)}=(\pm i\tau)^k\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right).$$

Тогда для первого гипергеометрического ряда в (17) с учетом формулы (5) запишем:

$${}_pF_{2m+1}\left(\begin{matrix}1-(a_p)+i\tau;\ (-1)^{p-n-m}x\\ 1+2i\tau,1-(b_m)+i\tau,1/2+(b_m)+i\tau\end{matrix}\right)=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\sum_{k=0}^{M}\frac{\left(1-(a_p)+i\tau\right)_k}{(1+2i\tau)_k\,(1-(b)_m+i\tau)_k}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(1/2+(b_m)+i\tau\right)_k}\frac{\left((-1)^{p-n-m}x\right)^k}{k!}=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\sum_{k=0}^{M}\frac{\left((-1)^{p-n-m}(i\tau)^{p-2m-1}x\right)^k}{2^k\,k!}\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)=$$

$$=\exp\left(\frac{(-1)^{p-n}i^{p-1}x}{2\tau^{2m+1-p}}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right),\ \tau\to+\infty.\ (19)$$

Аналогично оценим второе слагаемое в (17). В частности, получим

$$\sum_{j=1}^{m}C_jx^{b_j}\Gamma(i\tau-b_j,-i\tau-b_j)\times$$

$$\times{}_pF_{2m+1}\left(\begin{matrix}1-(a_p)+b_j;\ (-1)^{p-n-m}x\\ 1\pm i\tau+b_j,1-(b_m)'+b_j,1/2+(b_m)+b_j\end{matrix}\right)=$$

$$=2\pi\frac{e^{-\pi\tau}}{\tau}\sum_{j=1}^{m}C_j\left(\frac{x}{\tau^2}\right)^{b_j}\times$$

$$\times{}_pF_{2m-1}\left(\begin{matrix}1-(a_p)+b_j;\ (-1)^{p-n-m}x/\tau^2\\ 1-(b_m)'+b_j,1/2+(b_m)+b_j\end{matrix}\right)\times$$

$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right),\quad\tau\to+\infty.\qquad(20)$$

Параметр p может принимать как четные, так и нечетные значения. В зависимости от этого показатель экспоненты в (19) принимает комплексные или действительные значения. Это влияет на асимптотические оценки (17).

Пусть $p=2l+1,\ l=0,1,2,\ldots$. Тогда справедливо разложение G-функции (9)

$$G(x)=\frac{(2\pi)^{n+1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi\tau}}\tau^{\frac{p-m-1}{2}-\sum_{k=1}^{p}a_k}\times$$

$$\times\exp\left[-\left\{\left(n+1-\frac{p}{2}\right)\pi\tau+\frac{(-1)^{l-n}x}{2\tau^{2(m-l)}}\right\}\right]\times$$

$$\times\cos\left((2m+2-p)(\tau\ln\tau-\tau)-\tau\ln\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\chi\right)+$$

$$+2\pi\frac{e^{-\pi\tau}}{\tau}\sum_{j=1}^{m}C_j\left(\frac{x}{\tau^2}\right)^{b_j}\times$$

$$\times{}_pF_{2m-1}\left(\begin{matrix}1-(a_p)+b_j;\ (-1)^{p-n-m}x/\tau^2\\ 1-(b_m)'+b_j,1/2+(b_m)+b_j\end{matrix}\right)\times$$

$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right),\ \tau\to+\infty.\qquad(21)$$

Пусть $p = 2l, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда справедливо следующее асимптотическое разложение функции (9) при $\tau \to +\infty$:

$$G(x) = \frac{(2\pi)^{n++1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\left(n+1-\frac{p}{2}\right)\pi\tau} \tau^{\frac{p-m-1}{2} - \sum_{k=1}^{p} a_k} \times$$

$$\times \cos\left((2m+2-p)(\tau \ln \tau - \tau) - \tau \ln\left(\frac{x}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{l-n} x}{2\tau^{2(m-l)+1}} + \frac{\pi}{2}\chi \right) + 2\pi \frac{e^{-\pi\tau}}{\tau} \sum_{j=1}^{m} C_j \left(\frac{x}{\tau^2}\right)^{b_j} \times$$

$$\times {}_pF_{2m-1}\left(\begin{matrix} 1-(a_p)+b_j \\ 1-(b_m)' + b_j, 1/2 + (b_m) + b_j \end{matrix}; \right.$$

$$\left. (-1)^{p-n-m} \frac{x}{\tau^2} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right). \qquad (22)$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 для G-функции Мейера (9) с действительными параметрами (a_p), (b_m) и аргументом $x > 0$ справедливы асимптотические представления по параметру (21), (22) при $\tau \to +\infty$.

Из формулы (22) следуют следующие асимптотические разложения для функций (6)–(8):

$$K_{i\tau}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} e^{-\pi\tau/2} \sin\left(\tau \ln\left(\frac{2\tau}{x}\right) - \tau + \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{4\tau} \right) \times$$

$$\times \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right), \tau \to +\infty; \qquad (23)$$

$$\left[J_{-2i\tau}\left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}\right) - J_{2i\tau}\left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}\right) \right] K_{2i\tau}\left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}\right) =$$

$$= \frac{i}{2\tau}\left[\cos\left(\tau \ln\left(\frac{4\tau^4}{x}\right) - 4\tau + \frac{x}{2\tau^3} \right) + \sqrt{\pi} \cos\left(\frac{2\sqrt{x}}{\tau}\right) \right] \times$$

$$\times \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right), \tau \to +\infty; \qquad (24)$$

$$C_s(2x, 2\tau) = \left[\sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \cos\left(\tau \ln\left(\frac{4\tau^2}{x}\right) - \tau - \frac{3\pi}{4} + \frac{x^2}{2\tau^5} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\tau}{\tau^2 - x^2} \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right), \; \tau \to +\infty. \qquad (25)$$

Заключение. Для G-функции Мейера записано представление в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов со степенными множителями. Представлена формула Стирлинга для гамма-функции Эйлера комплексного аргумента, у которого мнимая часть неограниченно увеличивается, а действительная фиксирована. Установлены асимптотические оценки G-функции Мейера специального вида при больших значениях параметра. Показано, что полученное разложение включает в качестве частных случаев известные в литературе представления функций бесселевого типа.

Список литературы

1. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования // Итоги науки. Математический анализ. 1966. М.: ВИНИТИ АН СССР. 1967. С. 7–82.
2. Wimp J. A class of integral transforms // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1964. Vol. 14, no. 2. P. 33–40.
3. Yakubovich S. B., Luchko Yu. F. The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions. Ser. Mathematics and its Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. Vol. 287. 336 p.
4. Yarotskaya L. D. On index transforms with Meijer`s G-function kernels // Integral Transforms and Special Functions. 2000. Vol. 10, no. 3−4. P. 309–320.
5. Yakubovich S. B., Saigo M., Gusarevich L. D. Some asymptotic expansions of special functions by their indices // Fukuoka Univ. Sci. Reports. 1995. Vol. 25, no. 1. P. 23–32.
6. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore: World Scientific Publ., 1996. 252 p.
7. Яроцкая Л. Д. Асимптотические представления по индексу функций бесселевого типа // Труды БГТУ, Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2004. Вып. XII. С. 18−21.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А**.** Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 295 с.
9. Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск: Наука и техника, 1978. 312 с.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 800 с.
11. Яроцкая Л. Д. Асимптотические представления по параметрам G-функции Мейера специального вида // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2017. № 2 (200). С. 28–32.
12. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 334 с.

References

1. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. Integral transforms. *Itogi nauki. Matematicheskiy analiz* [Results of science. Mathematical analysis]. Moscow, VINITI AN SSSR Publ., 1967, pp. 7–82. (In Russian).

2. Wimp J. A class of integral transforms. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1964., vol. 14, no. 2, pp. 33–40.

3. Yakubovich S. B., Luchko Yu. F. The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions. Ser. Mathematics and its Applications. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1994, vol. 287. 336 p.

4. Yarotskaya L. D. On index transforms with Meijer`s G-function kernels. *Integral Transforms and Special Functions,* 2000, vol. 10, no. 3−4, pp. 309–320.

5. Yakubovich S. B., Saigo M., Gusarevich L. D. Some asymptotic expansions of special functions by their indices. *Fukuoka Univ. Sci. Reports*, 1995, vol. 25, no. 1, pp. 23–32.

6. Yakubovich S. B. Index transforms. Singapore, World Scientific Publ., 1996. 252 p.

7. Yarotskaya L. D. Asymptotic representations of the Bessel type functions by their indices. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physical-mathematical sciences and informatics, 2004, issue XII, pp. 18–21 (In Russian).

8. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshiye transtsendentnyye funktsii. Gipergeometricheskaya funktsiya. Funktsii Lezhandra* [Higher Transcendental Functions. Hypergeometric function. Legendre functions]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 295 p. (In Russian).

9. Marichev O. I. *Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsiy (teoriya i tablitsy formul)* [The method of calculating integrals of special functions (theory and tables of formulas)]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1978. 312 p. (In Russian).

10. Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Spetsial'nyye funktsii* [Integrals and Series. Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 800 p. (In Russian).

11. Yarotskaya L. D. Asymptotic representations of special Meijer`s G-function by its parameters. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physical-mathematical sciences and informatics, 2017, no. 2 (200), pp. 28–32 (In Russian).

12. Titchmarsh Ye. *Vvedeniye v teoriyu integralov Fur'ye* [Introduction to the theory of Fourier integrals]. Moscow; Leningrad, Gostekhizdat, 1948. 334 p. (In Russian).

Информация об авторе

Яроцкая Людмила Дмитриевна − кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yarockaya@belstu.by

Information about the author

Yarotskaya Lyudmila Dmitrievna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yarockaya@belstu.by

Поступила после доработки 27.04.2022