

УДК 536.24:66.045

Т. Б. Карлович, А. Б. Сухоцкий, Е. С. Данильчик
Белорусский государственный технологический университет

**ДЕФОРМАЦИЯ КОНВЕКТИВНЫХ ЯЧЕЕК
В ПЛОСКОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ
ПРИ НАПРАВЛЕННОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ**

Рассмотрена задача о деформации двумерных конвективных ячеек Рэлея – Бенара, возникающих в плоском горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу, в случае ее просачивания через границы с постоянной скоростью. Такое явление может наблюдаться в вытяжной шахте, установленной для интенсификации теплообмена над четырехрядным оребренным пучком труб, служащим для отведения теплоты от горячего источника. Для описания воздушных потоков в шахте используется модель термогравитационной конвекции. В отличие от предыдущих работ, где средняя скорость течения воздуха в шахте полагалась равной нулю, в настоящей статье она учитывается в виде постоянного вектора, направленного вдоль оси z . Отличная от нуля скорость воздуха в шахте возникает в результате его непрерывного подсоса снизу через оребренный пучок труб.

В случае малой скорости воздушных потоков в шахте получено аналитическое решение для возмущений скорости и температуры. Показано, что собственные значения рассматриваемой тепловой и гидродинамической задачи являются комплексными числами. Это свидетельствует о наличии не только затуханий возмущений температуры и скорости (так называемая монотонная неустойчивость), но и появлении колебательной неустойчивости в системе, что приводит к деформации ячеек Рэлея – Бенара. Этот факт также подтверждается численными расчетами модельных уравнений.

Ключевые слова: свободная конвекция, вытяжная шахта, оребренная труба, теплопередача, ячейки Рэлея – Бенара, числа Рэлея, Прандтля, Пекле.

Для цитирования: Карлович Т. Б., Сухоцкий А. Б., Данильчик Е. С. Деформация конвективных ячеек в плоском горизонтальном слое с проницаемыми границами при направленном течении жидкости // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 2 (260). С. 31–35.

T. B. Karlovich, A. B. Sukhotskii, E. S. Danilchik
Belarusian State Technological University

**DEFORMATION OF CONVECTIVE CELLS
IN A FLAT HORIZONTAL LAYER WITH PERMEABLE BOUNDARIES
UNDER A DIRECTIONAL FLOW OF A LIQUID**

The problem of deformation of two-dimensional Rayleigh-Benard convective cells, which arise in a flat horizontal layer of liquid heated from below, in the case of its seepage through the boundaries at a constant speed, is considered. Such a phenomenon can be observed in an exhaust shaft installed to intensify heat transfer above a four-row finned tube bundle that serves to remove heat from a hot source. The model of thermogravitational convection is used to describe the air flows in the mine. Unlike previous works, where the average air flow velocity in the shaft was assumed to be zero, in this article it is taken into account as a constant vector directed along z -axis. The nonzero air velocity in the shaft arises as a result of its continuous suction from below through the finned tube bundle.

In the case of low speed of air flows in the shaft, an analytical solution is obtained for perturbations of speed and temperature. It is shown that the own values of the considered thermal and hydrodynamic problem are complex numbers. This indicates the presence of not only the damping of temperature and velocity perturbations (the so-called monotonic instability), but also the appearance of an oscillatory instability in the system, which leads to deformation of the Rayleigh-Benard cells. This fact is also confirmed by numerical calculations of the model equations.

Key words: free convection, exhaust shaft, finned tube, heat transfer, Rayleigh – Benard cell, Rayleigh, Prandtl, Peclet numbers.

For citation: Karlovich T. B., Sukhotskii A. B., Danilchik E. S. Deformation of convective cells in a flat horizontal layer with permeable boundaries under a directional flow of a liquid. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2022, no. 2 (260), pp. 31–35 (In Russian).

Введение. Конвекция Рэлея – Бенара является пограничным состоянием между устойчивой и неустойчивой фазами течения жидкости в случае ее нижнего подогрева. Она характеризует начало конвекционного процесса, обусловленного действием подъемных сил на разогретые слои жидкости [1].

Более сложный вид течения исследовался в задаче о передаче теплоты воздуху от электронагреваемого пучка оребренных труб [2, 3]. Для создания направленного воздушного потока использовалась вытяжная шахта. Схема соответствующей экспериментальной установки представлена на рис. 1. Шахта имела прямоугольное поперечное сечение 38×31 см и высоту $H = 52$ см. В качестве источника тепла рассматривался четырехрядный шахматный пучок, состоящий из $m = 22$ шт. ребристых труб с поперечным $S_1 = 64$ мм и продольным $S_2 = 55,4$ мм шагами. К каждой трубе подводилась регулируемая электрическая мощность, вызывающая ее разогрев. Оказалось, что при определенных значениях подведенной электрической мощности в шахте наблюдались разнонаправленные воздушные потоки [2], способствующие более интенсивному перемешиванию воздушных масс и, соответственно, более интенсивному охлаждению источника теплоты.

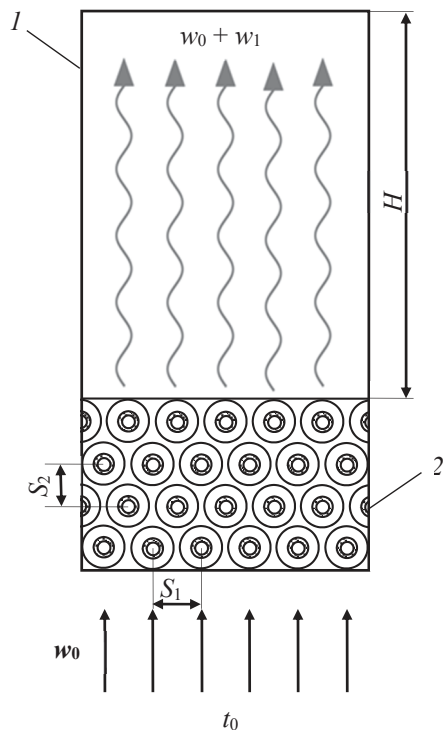


Рис. 1. Схема экспериментальной установки
1 – вытяжная шахта;
2 – четырехрядный шахматный пучок труб

В работе [3] данное явление интерпретировалось на основе конвекции Рэлея – Бенара,

сопровождающейся появлением трехмерных квазипериодических структур в шахте, число которых обусловлено критическим числом Рэлея. Для описания конвекции Рэлея – Бенара использовалась система уравнений для термогравитационной конвекции в приближении Обербека – Буссинеска. Подобные задачи о неустойчивом течении жидкости рассматривались в публикациях [4, 5]. В работе [4] исследовалась устойчивость слоя вязкой несжимаемой жидкости между двумя вертикальными плоскостями с малой разницей температур приближенным методом Бубнова – Галеркина. В публикации [5] получены спектры декрементов малых нормальных возмущений скорости и температуры, а также зависимости критических чисел Рэлея от числа Пекле для плоского горизонтального слоя жидкости, просачивающейся через границы при ее нижнем подогреве.

Основная часть. В данной работе для описания воздушных потоков в шахте над оребренным пучком труб будет использоваться гидродинамическая и тепловая модель, описанная в работе [3]. Однако ранее в ней не учитывалась ненулевая скорость течения воздуха в шахте, обусловленная подсосом воздуха снизу через межреберные и межтрубные зазоры, из-за которой может возникать деформация конвективных ячеек.

Для моделирования движения воздуха в шахте его скорость, температура и давление раскладываются на равновесные значения и малые возмущения:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1; \quad t = t_0 + t_1; \quad p = p_0 + p_1. \quad (1)$$

Тогда соответствующая система уравнений для равновесных значений записывается в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 = g \beta t_0 \mathbf{k}, \\ \mathbf{w}_0 \nabla t_0 = a \Delta t_0 \end{cases} \quad (2)$$

и для малых возмущений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial \tau} + \mathbf{w}_0 \nabla \mathbf{w}_1 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 + \nu \Delta \mathbf{w}_1 + g \beta t_1 \mathbf{k}, \\ \frac{\partial t_1}{\partial \tau} + \mathbf{w}_0 \nabla t_1 + \mathbf{w}_1 \nabla t_0 = a \Delta t_1, \\ \nabla \mathbf{w}_1 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где \mathbf{k} – единичный вектор, направленный вдоль вертикальной оси z ; ρ_0 – средняя плотность воздуха; β – коэффициент объемного расширения; a – коэффициент температуропроводности; ν – коэффициент кинематической вязкости.

Второе уравнение системы (2) решается аналитически в случае постоянной скорости

$w_0 = w_0 k$ воздуха в шахте, направленной вдоль оси z . Полагая, что на верхней и нижней границах шахты температуры соответственно равны θ_1 и θ_2 , получим распределение температуры по высоте шахты в виде

$$t_0 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{e^{Pe} - 1} e^{Pe \cdot z} + \frac{\theta_2 e^{Pe} - \theta_1}{e^{Pe} - 1}, \quad (4)$$

где z – расстояние, нормированное на высоту шахты, $Pe = w_0 H / a$ – число Пекле.

Учет постоянной скорости течения воздуха в шахте приводит к равновесному температурному распределению, отличному от линейного распределения и характеризуется числом Пекле. На рис. 2 показано, что в случае нулевой равновесной скорости воздуха в шахте наблюдается монотонное убывание температуры от пучка труб к выходу шахты с постоянным температурным градиентом (кривая 1 рис. 2).

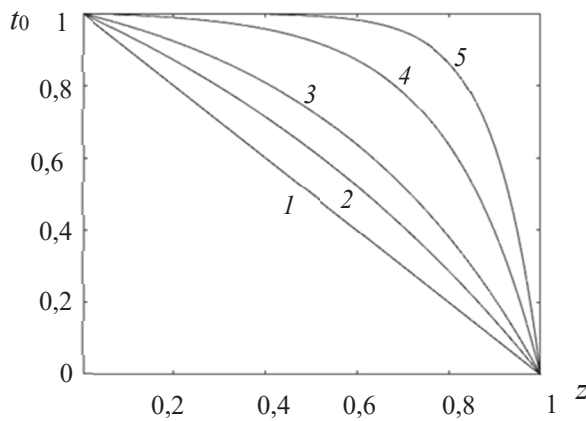


Рис. 2. Распределение температуры для чисел Пекле:

1 – $Pe = 0$; 2 – $Pe = 1$; 3 – $Pe = 2$; 4 – $Pe = 5$; 5 – $Pe = 10$

При возрастании числа Пекле температура начинает сначала медленнее уменьшаться, а затем, наоборот, быстрее в направлении к выходу воздуха из шахты по сравнению с кривой 1 рис. 2. Для числа $Pe = 10$ у температурного распределения появляется резкий изгиб в середине кривой, разделяющий ее на две ветви с температурами, близкими к температурам θ_1 и θ_2 .

С использованием чисел Прандтля (Pr), Рэлея (Ra)

$$Pr = \frac{\nu}{a}; \quad Ra = (\theta_2 - \theta_1) g \frac{\beta H^3}{a \nu} \quad (5)$$

и безразмерных переменных $w'_{1z} = w_{1z} H / a$; $t' = t / \Delta H$, система уравнений (3) переписывается для продольного сечения шахты, учитывающего лишь безразмерные координаты x , z и время τ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta w'_{1z}}{\partial \tau} + Pe \frac{\partial}{\partial z} \Delta w'_{1z} &= \Delta \Delta w'_{1z} + Ra \cdot t'_1; \\ Pr \frac{\partial t'_1}{\partial \tau} - G w'_{1z} e^{Pe \cdot z} + Pe \frac{\partial t'_1}{\partial z} &= \Delta t'_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где введены следующие обозначения:

$$G = Pe \frac{\theta_2 - \theta_1}{e^{Pe} - 1}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (7)$$

В качестве граничных условий для возмущений x -, z -компонент скорости w'_{1x} , w'_{1z} и температуры t'_1 рассмотрим так называемые свободные границы (исчезновение возмущений скорости и температуры на границе, а также равенство нулю касательных напряжений):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} z=0, & \quad w'_{1z}=0, \quad \frac{\partial^2 w'_{1z}}{\partial z^2}=0, \quad t'_1=0; \\ z=1, & \end{aligned} \right. \quad (8) \\ \left\{ \begin{aligned} x=0, \\ x=b/H, \end{aligned} \right. \quad w'_{1x}=0. \end{aligned}$$

Решение задачи (6)–(8) представляется в виде совокупности нормальных возмущений, экспоненциально зависящих от времени и осциллирующих в пространстве:

$$\begin{aligned} w'_{1z} &= A_1 \exp(-\lambda \tau) \exp(in\pi z) \cos(a_x m x); \\ w'_{1x} &= A_2 \exp(-\lambda \tau) \cos(n\pi z) \sin(a_x m x); \\ t'_1 &= A_3 \exp(-\lambda \tau) \exp(in\pi z) \cos(a_x m x), \end{aligned} \quad (9)$$

где $a_x = 2\pi H / b$ – нормированное минимальное волновое число для прямоугольного сечения шахты; A_1, A_2, A_3 – постоянные величины, определяемые из условия нормировки; λ – комплексный декремент, характеризующий временной ход возмущения; m, n – целые неотрицательные числа, характеризующие номер гармоники. В случае малых чисел Пекле решение системы (6)–(8) представимо в аналитическом виде (9) с декрементом:

$$\begin{aligned} \lambda_{nm} &= \frac{in\pi Pe}{Pr} + \frac{d_{nm}^2 (1 + Pr)}{2Pr} \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{d_{nm}^4 (Pr - 1)^2}{4Pr^2} + \frac{Ra \cdot f_m^2}{d_{nm}^4 Pr}}; \\ d_{nm}^2 &= (n\pi)^2 + f_m^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Действительная часть декремента λ описывает монотонную неустойчивость конвекции Рэлея – Бенара и связана с временным затуханием возмущений скорости и температуры (9). Она остается неизменной в случае нулевой скорости течения воздуха в шахте. Наличие мнимой части

у декремента λ означает появление дополнительных колебательных возмущений в шахте с частотой, пропорциональной числу Пекле.

Рассмотрим численное решение задачи термогравитационной конвекции конечно-разностным методом. Для этого уравнения удобно переписать через функции вихря и тока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) &= \Delta \varphi + Ra \frac{\partial t'}{\partial x}; \\ Pr \frac{\partial t'}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial t'}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial z} \right) &= \Delta t', \end{aligned} \quad (11)$$

где ток ψ и вихрь φ задаются формулами

$$w'_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad w'_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \varphi = -\frac{\partial w'_x}{\partial z} + \frac{\partial w'_z}{\partial x}. \quad (12)$$

Граничные условия (8) при этом трансформируются в выражения

$$\begin{aligned} z=0; \quad \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0; \quad t=1; \\ z=1; \quad \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0; \quad t=0; \\ x=0, b/H; \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \quad t=1-z. \end{aligned} \quad (13)$$

Все производные в задаче (11)–(13) заменяются конечно-разностными выражениями. В качестве начального условия выбирается равномерный нижний подогрев и линейное распределение температуры на боковой стенке.

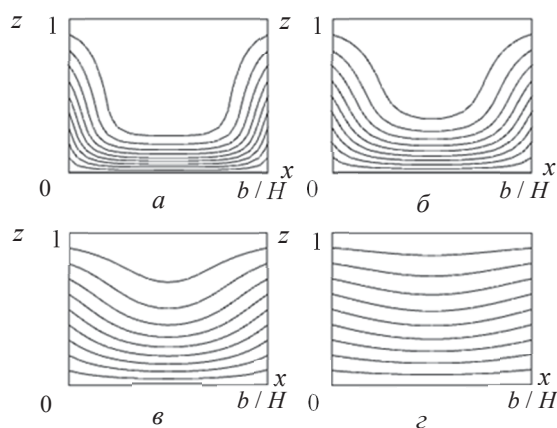


Рис. 3. Изотермы в докритическом режиме.
Число Рэлея $Ra = 500$:
 $a - \tau = 0,01$; $b - \tau = 0,02$; $v - \tau = 0,05$; $z - \tau = 0,1$

На рис. 3 и 4 представлены графики изотерм в плоскости (x, z) для различных времен эволюции воздушных потоков. Показано, что в докритическом режиме ($Ra < Ra_{cr}$, Ra_{cr} определяется на основании формулы (15) работы [3]) происходит постепенное выравнивание температуры по высоте боковой стенки.

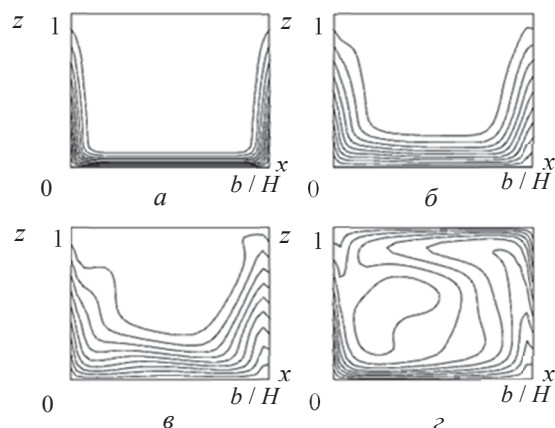


Рис. 4. Изотермы в надкритическом режиме
Число Рэлея $Ra = 6000$:
 $a - \tau = 0,001$; $b - \tau = 0,005$; $v - \tau = 0,01$; $z - \tau = 0,03$

В надкритическом режиме ($Ra > Ra_{cr}$) при наличии начального вихря в системе развивается неустойчивое состояние, приводящее к конвективному перемешиванию воздушных потоков и формированию квазипериодических структур.

Заключение. В работе исследована конвективная неустойчивость течения воздуха в вытяжной шахте над горизонтальным четырехрядным оребренным пучком труб.

Получено аналитическое выражение для собственных значений (декрементов затухания) в модели термогравитационной конвекции в случае малых чисел Пекле.

Продemonстрировано появление колебательной неустойчивости воздушных потоков наряду с монотонной неустойчивостью конвекции Рэлея – Бенара в случае проницаемых горизонтальных границ. Показано частичное разрушение ячеек Рэлея – Бенара при ненулевой скорости течения воздуха с использованием численного решения уравнений тепловой и гидродинамической задачи.

Список литературы

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
2. Карлович Т. Б., Сухоцкий А. Б., Данильчик Е. С. Конвективная неустойчивость воздушных потоков в вытяжной шахте над четырехрядным оребренным пучком // Вести НАН Беларуси. Серия физ.-мат. наук. 2021. Т. 57, № 2. С. 242–254.

3. Карлович Т. Б., Сухоцкий А. Б., Данильчик Е. С. Конвекция Рэлея – Бенара в вытяжной шахте над однорядным горизонтальным пучком из оребренных труб // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2021. № 2. С. 58–64.

4. Рудаков Р. Н. О малых возмущениях конвективного движения между вертикальными параллельными плоскостями // ПММ. 1966. Вып. 2. С. 362–368.

5. Шварцблат Д. Л. О спектре возмущений и конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя жидкости с проницаемыми границами // ПММ. 1968. Вып. 2. С. 276–281.

References

1. Gershuni G. Z., Zhukhovitskiy E. M., Nepomnyaschiy A. A. *Ustoychivost' konvektivnykh techeniy* [Stability of convective flows]. Moscow, Nauka Publ., 1996. 319 p. (In Russian).

2. Karlovich T. B., Sukhotskii A. B., Danilchik E. S. Convective instability of air flows in the exhaust shaft above a four-row finned bundle. *Vesti NAN Belarusi* [Vesti NAS of Belarus], series of physics and mathematics, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 242–254 (In Russian).

3. Karlovich T. B., Sukhotskii A. B., Danilchik E. S. Rayleigh-Benard convection in an exhaust shaft above a single-row horizontal bundle of finned tubes. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics, 2021, no. 2, pp. 58–64 (In Russian).

4. Rudakov R. N. On small perturbations of convective motion between vertical parallel planes. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1966, issue 2, pp. 362–368 (In Russian).

5. Shvartsblat D. L. On the spectrum of perturbations and convective instability of a flat horizontal liquid layer with permeable. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1968, issue 2, pp. 276–281 (In Russian).

Информация об авторах

Карлович Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tbkar@mail.ru

Сухоцкий Альберт Борисович – кандидат технических наук, доцент кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: alk2905@mail.ru

Данильчик Екатерина Сергеевна – ассистент кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: katya.156.156@gmail.com

Information about the authors

Karlovich Tatyana Borisovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tbkar@mail.ru

Sukhotskii Albert Borisovich – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alk2905@mail.ru

Danilchik Ekaterina Sergeevna – Assistant, the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: katya.156.156@gmail.com

Поступила после доработки 04.07.2022