

Н. Ф. Ковалев, И. В. Турлай

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПОТОКИ ЛЕСОЗАГОТОВИТЕЛЬНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ КАК СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Потоки обрабатываемых пакетов хлыстов, хлыстов и сортиментов в производственном процессе леспромхоза носят нерегулярный, стохастический характер. Все операции, составляющие процесс, имеют случайные длительности и случайные моменты возникновения. Принимая во внимание массовость и повторяемость операций, можно получить описание и характеристики функционирования производственного процесса на основе теории массового обслуживания.

Процесс состоит из ряда последовательных операций. Выделение элементов обслуживания производится таким образом, чтобы в каждом отдельном случае соблюдалась завершенность операции обработки или транспортировки предмета труда. При таком выделении поток хлыстов или сортиментов, выходящий из одного агрегата обслуживания, будет являться входящим потоком для следующего агрегата. Тем самым сохраняются функциональные связи для потока в целом и появляется возможность описать процесс сравнительно простыми аналитическими выражениями.

Рассмотрим два смежных агрегата обслуживания (рис. 1), как две системы массового обслуживания (СМО): λ — интенсивность входящего потока хлыстов в раскряжевочный агрегат; λ_1 — интенсивность входящего потока сортиментов в сортировочный транспортер; λ_2 — интенсивность выходящего потока сортиментов от транспортера.

Хлысты, поступающие в раскряжевочный агрегат, образуют простейший поток заявок (единиц сырья), так как обладают ординарностью и отсутствием последействия. Но тогда процесс, имеющий входящие и выходящие потоки пуассоновские, является марковским процессом. Вероятность любого состояния процесса в будущем зависит только от его состояния в настоящее время

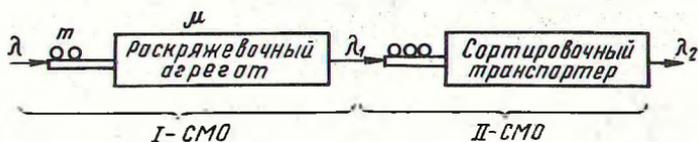


Рис. 1. Схема смежных агрегатов обслуживания.

и не зависит от того, как развивался процесс в прошлом. Выделенная СМО (раскряжевочный агрегат) имеет конечное множество состояний. Рассматриваем данную СМО, как СМО с ожиданием, предполагая, что перед раскряжевочным агрегатом имеется буфер для запаса хлыстов.

Тогда μ — интенсивность обслуживания хлыстов агрегатом; m — число мест в буфере.

Система будет находиться в одном из следующих состояний: S_0 — раскряжевочный агрегат свободен; S_1 — агрегат занят, хлыстов в буфере нет; S_2 — агрегат занят, один хлыст в буфере; ; S_{m+1} — агрегат занят, m хлыстов в буфере, буфер заполнен.

Граф состояний СМО представлен на рис. 2.

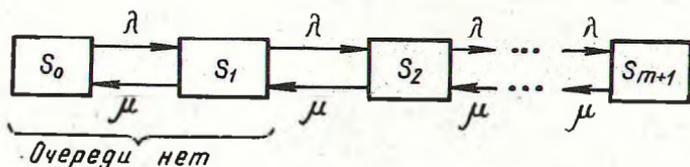


Рис. 2. Состояние СМО.

Данный граф представляет собой схему гибели и размножения. Пользуясь общими решениями для схемы гибели и размножения, можно определить характеристики СМО.

Вероятность обслуживания хлыста определяется как

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{m+1},$$

где P_{m+1} — предельная вероятность S_{m+1} состояния системы.

При $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ $P_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$ [1]

Вероятность отказа хлысту на обслуживание $P_{\text{отк}} = P_{m+1}$.

Относительная пропускная способность системы определяется как вероятность обслуживания хлыста.

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda P_{\text{адс}} = \lambda \left[1 - \frac{\rho^{m+1} (1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} \right] \quad (1)$$

Вероятность того, что агрегат будет занят

$$P_{3, \text{а}} = \frac{\lambda P_{\text{адс}}}{\mu} = \rho \left[1 - \frac{\rho^{m+1} (1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} \right] \quad (2)$$

Среднее число хлыстов в буфере определим как математическое ожидание дискретной случайной величины числа заявок в очереди R :

$$\bar{r} = M[R], \quad (1)$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^2 [1 - \rho^m (m+1 - m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}$$

Среднее время нахождения хлыста в буфере

$$\bar{t}_{\text{ouc}} = \frac{1}{\rho\mu} \bar{r}$$

Полученные показатели характеризуют обслуживающий раскряжевочный агрегат и буфер.

Предположим, что перед раскряжевочным агрегатом отсутствует буфер, и хлысты от предыдущего агрегата сразу направляются по одному на раскряжевку. Характеристики состояний подобной системы: S_0 — раскряжевочный агрегат свободен; S_1 — раскряжевочный агрегат занят.

Граф переходов системы представлен на рис. 3.

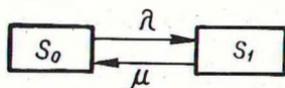


Рис. 3. Граф переходов системы.

При установившемся процессе обслуживания (т.е. работы раскряжевочного агрегата) вероятность обслуживания хлыста

$$P'_{\text{адс}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad (3)$$

Абсолютная пропускная способность

$$A' = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \quad (4)$$

Вероятность отказа хлысту на обслуживание

$$P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad (5)$$

Рассмотрим две СМО для случая раскряжевочного агрегата.

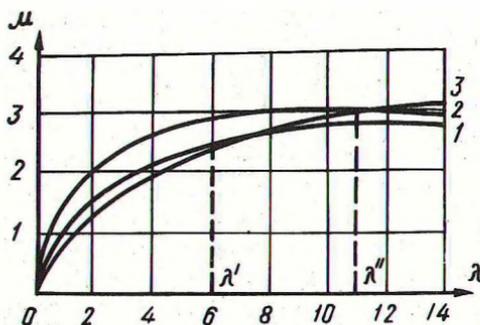
1. Система с наличием буфера с характеристиками:

$$m_1 = 3, \quad m = 7, \quad \mu = 3.$$

2. Система без буфера с параметром $\mu = 4$. Характер изменения абсолютных пропускных способностей систем в зависимости от λ представлен на графиках рис. 4. λ — число хлыстов, раскряжеванных в минуту. Принята проектная производительность системы без буфера на 33% выше производительности системы с буфером.

Рис. 4. Зависимость абсолютной пропускной способности систем от λ .

Система с буфером (формула (1)): 1 — число мест в буфере $m=3$; 2 — число мест в буфере $m=7$; 3 — система без буфера (формула (4)).



Пропускная способность системы с буфером в случае $m_1 = 3$ больше пропускной способности системы без буфера в интервале $0 < \lambda' < 6$, несмотря на меньшую проектную производительность. При $m_2 = 7$ (предельное число мест в буфере) интервал интенсивности входящего потока расширяется до $\lambda'' = 11,5$.

Вероятности того, что в системах с буферами будут очереди хлыстов: для системы с $m_1 = 3$ $P_{04} = 0,9660$ ($\lambda = 6$), для системы с $m_2 = 7$ $P_{04} = 0,9999$ ($\lambda = 12$) из формулы (2).

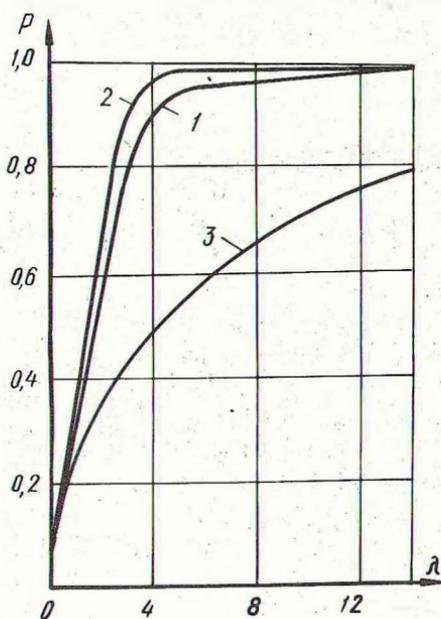


Рис.5. Вероятность наличия очереди в системе в зависимости от λ : 1—для $m = 3$, $\mu = 3$; 2— $m = 7$; $\mu = 3$; 3—вероятность системы без буфера, $\mu = 4$.

На рис.5 представлены графики изменения вероятности наличия очереди в системе в зависимости от интенсивности входящего потока хлыстов для случаев: $m_1 = 3$, $m_2 = 7$.

Анализируя зависимости, приходим к выводу, что система с $m = 3$ будет уже полностью загружена, начиная с $\lambda = 4,2$ (вероятность 0,9). Система с $m = 7$ будет иметь полную загрузку с $\lambda = 3,0$ (вероятность 0,9). Для системы без буфера при $\mu = 4$ состояние полной загрузки, установленное с вероятностью 0,9, наступит при $\lambda = 36$.

Рассмотрим функционирование штабеля на нижнем складе. Сортименты, поступающие из карманов-накопителей в штабель, образуют случайный поток, так как поток характеризуется ординарностью и отсутствием последействия, он является пуассоновским с интенсивностью $\lambda(t)$. Пакеты сортиментов, образующие поток, имеют параметры: α_1 — количество сортиментов в пакете; α_2 — объем пакета; α_3 — порода сортиментов в пакете. Параметр α_2 примем постоянным, предполагая, что карманы-накопители, из которых поступают пакеты, имеют один и тот же объем. Параметры α_1 и α_3 являются случайными величинами. Закон распределения $P = F(\alpha_1, \alpha_3)$.

Пусть P_i — средняя доля времени, в течение которой в штабеле находится i пакетов сортиментов. Введем функцию

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k .$$

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1-z-\rho z [1-F(z)]} ,$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

P_i вычислим, раскладывая функцию $P(z)$ в ряд по степеням z .

Пусть

$$F(\alpha_1, \alpha_3) = \begin{cases} 0, & i \neq 1 \\ 1, & i = 1 \end{cases} ; \quad F(z) = z, \quad P(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z} ;$$

$$P_i(t) = (1-\rho) \rho^i \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Задавшись вероятностью P_{min} , найдем предельное количество пакетов M в штабелях или размер штабельных запасов.

Вероятность перегрузки штабелей

$$P_{пер} = \sum_{i=M+1}^{\infty} P_i = (1-\rho) \rho^{M+1} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \rho^{M+1} .$$

Из условия $\rho^{M+1} \leq \rho_{min}$ найдем объем штабелей M

$$M \leq \frac{\ln \rho_{min}}{\ln \rho} .$$

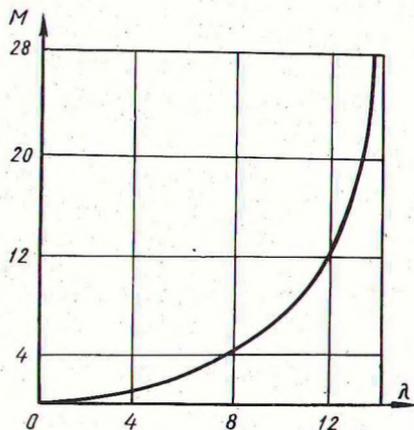


Рис. 6. Зависимость числа мест в штабеле от λ .

Рассмотрим систему штабеля с параметром $\mu = 15$, вероятность скопления в штабеле сортиментов больше $M, \rho_{\min} = 0,05$. На рис. 6 представлена зависимость числа мест в штабеле M от изменения величины λ .

Подобный подход применим к определению параметров других запасов леспромхоза.

Идеализированные потоки не предусматривают неоднородностей хлыстов в потоке. Неоднородности оказывают существенное влияние на параметры процесса обслуживания. Поступающие на обработку хлысты имеют различный объем, форму, породу и т.д. Их можно характеризовать моментом поступления в систему (раскряжевочный агрегат) t_i и k параметрами: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Для полного описания хлыста достаточно характеризовать его 3—4 параметрами, например, объемом (α_1), формой (α_2), породой (α_3). Примем, что указанные параметры не зависят от моментов поступления хлыстов t_i . Тогда поток опишется законом распределения моментов поступления хлыстов в систему $P(t)$ и отдельными законами распределения параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

При наличии пуассоновского потока для t_i некоторые параметры хлыстов можно зафиксировать.

С помощью подобных многомерных распределений возможно достаточно полно аппроксимировать действительные потоки хлыстов пуассоновскими.

При анализе функционирования технологического процесса леспромхоза может случиться, что выделенный процесс не будет являться марковским. Возможно получение решений методом статистического моделирования. Но это трудоемкий и не всегда осуществимый путь.

Часть немарковских процессов можно искусственно свести к марковским. Это возможно, если: число состояний, в которых может пребывать система, невелико; потоки событий имеют эрланговские распределения [2].

Рассмотрим раскряжевочный агрегат, который может выйти из строя с интенсивностью отказов λ . Агрегат сразу начинают ремонтировать. Пусть время восстановления распределено по закону Эрланга 4-го порядка:

$$f_4(t) = \frac{\mu(\mu t)^3}{3!} e^{-\mu t} \quad (t > 0).$$

Имеющийся процесс не является марковским.

Так как T время восстановления распределено по закону Эрланга, оно представляет собой сумму четырех случайных величин T_1, T_2, T_3, T_4 , которые распределены по закону

$$f_i(t) = \mu t^{-\mu} \quad (t > 0),$$

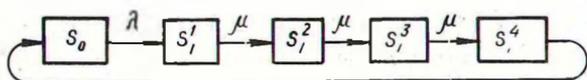
где μ — интенсивность восстановления.

Система будет находиться в двух состояниях: S_0 — раскряжеванный агрегат исправен; S_1 — агрегат ремонтируют.

Граф состояний приведен на рис. 7.

Искусственно, вместо одного состояния S_1 , введем четыре состояния: S_1^1 — для проведения ремонта определяется характер неисправности; S_1^2 — ремонт начинается (доставка нужных деталей); S_1^3 — ремонт продолжается (собственно ремонт); S_1^4 — ремонт заканчивается (проверка работоспособности агрегата).

Граф состояний изображен на рис. 8.



•Рис. 7. Граф состояний.



Рис. 8. Граф состояний.

Время пребывания системы в каждом состоянии считаем распределенным по показательному закону. Процесс в системе будет марковским. $P_1^1, P_1^2, P_1^3, P_1^4$ — предельные вероятности нахождения системы в состояниях $S_1^1, S_1^2, S_1^3, S_1^4$.

$$P_1 = P_1^1 + P_1^2 + P_1^3 + P_1^4 \quad (P_1 < 1).$$

Среднее время нахождения системы в состояниях S_0, S_1 :

$$\bar{t}_0 = \frac{1}{\lambda} ; \quad \bar{t}_1 = \frac{1}{\mu} .$$

Предельные вероятности состояний для схемы рис. 8:

$$P_0 = \frac{\bar{t}_0}{\bar{t}_0 + \bar{t}_1 + \bar{t}_1 + \bar{t}_1 + \bar{t}_1} = \frac{\bar{t}_0}{\bar{t}_0 + 4\bar{t}_1} ;$$

$$P_1^1 = P_1^2 = P_1^3 = P_1^4 = \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_0 + 4\bar{t}_1},$$

$$P_1 = P_1^1 + P_1^2 + P_1^3 + P_1^4 = \frac{4\bar{t}_1}{\bar{t}_0 + 4\bar{t}_1}.$$

Подставляя в систему значения \bar{t}_0 и \bar{t}_1 , получим предельные вероятности состояний для схемы рис.7 для раскряжевочного агрегата.

Для расчета емкостей буферов требуется определение величин μ и λ производить с вероятностью не ниже 0,9. Для определения средних значений пропускной способности следует применять математическое ожидание этих величин.

Л и т е р а т у р а

1. Вентцель Е.С. Исследование операций, М., 1972.
2. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания, М., 1969.
3. Прабху Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами, М., 1969.