УДК 634.0.51:634.0.181 .64

В.А. Добровольский

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СТВОЛА ДЕРЕВА КАК ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

При определении центра тяжести хлыста, его гибкости исследователи сталкиваются с необходимостью установления формы ствола дерева в виде правильной стереометрической фигуры.

Описанные в литературе уравнения образующей ствола имеют большое число коэффициентов, нахождение которых вызывает определенные трудности. Это обстоятельство приводит многих исследователей к выводу, что теоретически подобные расчеты не могут быть проведены.

Некоторые исследователи принимают форму ствола за конус и используют все соотношения, выведенные для конуса, в расчетах по отношению к хлысту. Однако в связи с тем, что центр тяжести конуса находится на 1/4 его высоты от основания, а для хлыста он близок к 1/3, очевидно несоответствие форм этих двух тел.

Ряд авторов считает, что ствол дерева представляет собой кубический параболоид. Более того, М. Бюсген [1], использовав результаты обширных лесоводственных измерений, а также обобщив опыт других исследователей, пришел к выводу, что при равномерном росте в чистой от сучьев части ствола диаметр в каждом сечении (D_x) в третьей степени пропорционален расстоянию (b_x) между измеренным местом и центром кроны, т.е.

$$\frac{D_x}{b_x} = C, \qquad (1)$$

где C — коэффициент пропорциональности.

Внутри кроны ствол образует конус. Отношение высоты конуса (h_x) к диаметру в его сечении (d_x) есть величина постоянная, т.е.

$$\frac{h_x}{d_x} = C_o. \qquad (2)$$

Используем эти соотношения для описания формы ствола дерева.

Расчетная схема и направление координатных осей показаны на рис. 1. Длина стволового участка принята за H, размер кроны h, расстояние от центра тяжести кроны до основания b.

Для каждого сечения хлыста значения его радиуса определяют значения y.

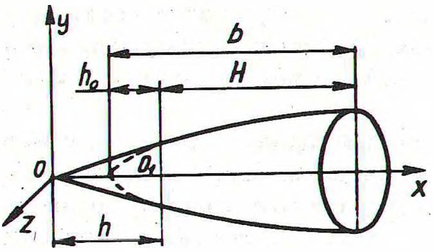

Рис. 1. Расчетная схема для определения формы ствола дерева, его объема и положения центра тяжести.

Уравнение образующей стволовой части хлыста в плоскости xoy определится следующим образом. Так как из (1) $_{C_x}$ D^3 = =Cx, где x определяет значение b_x, то R = $\frac{Cx}{8}$ и $y = R = \sqrt[3]{\frac{Cx}{8}} = \frac{1}{2}(Cx)^{1/3}$.

Уравнение параболоида вращения будет

$$y^2 + z^2 = \frac{1}{4}C^{2/3}\,x^{2/3}.$$

Уравнение показывает, что параболоид, соответствующий форме ствола дерева, является не кубическим, а в степени 2/3.

Определим уравнение участка ствола с кроной (вершинного участка).

Из (2) определяем, что $У = r = \frac{x}{2C_o}$, где $0 \leq x \leq h$, r — радиус сечения.

Искомое уравнение конуса (вершинной части ствола) будет иметь вид

$$y^2 + z^2 = \frac{x^2}{4C_o^2}.$$

Определим объем и центр тяжести хлыста.

Объем хлыста, образованного вращением треугольника и параболы вокруг оси x, равен сумме этих объемов

$$V = V_к + V_п.$$

Объем вершинной части

$$V_к = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h \frac{x^2 dx}{4C_o^2} = \frac{\pi h^3}{12C_o^2}.$$

Если принять вместо C_o его значение, то получим

$$V_к = \frac{\pi h^3 d^2}{12 h^2} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{1}{3} h. \qquad (4)$$

Для определения объема стволовой части поместим начало координат в точку центра тяжести кроны o_1, которая является и вершиной параболоида:

$$V_п = \pi \int_{h_o}^{b} y^2 dx = \pi \int_{h_o}^{b} \frac{1}{4} C^{2/3} x^{2/3} dx \frac{3}{20} =$$

$$= \pi C^{2/3} (b^{5/3} - h_o^{5/3}). \qquad (5)$$

Объем хлыста

$$V = \frac{\pi d^2 h}{12} + \frac{3}{20} \pi C^{2/3} (b^{5/3} - h_o^{5/3}).$$

Подставив величины $b = \frac{D^3}{C}$; $h_o = \frac{d^3}{C}$, где D и d — соответственно диаметры ствола у основания и начала кроны, получим

$$V = \frac{\pi d^2 h}{12} + \frac{3}{20} \frac{\pi}{C} (D^5 - d^5). \qquad (6)$$

Например, при длине хлыста $l = 31$ м, из которого стволовой участок $H = 21$ м, крона — $h = 10$ м, от начала кроны до ее центра тяжести $h_o = 5$ м, и диаметре ствола у основания $D = 60$ см объем ствола определится следующим образом.

Коэффициент $C = \dfrac{D^3}{H + h} = 83{,}07$ см^2. Крона начинается при диаметре дерева $d = (h_o C)^{1/3} = 34{,}6$ см. Объем ствола $V = 3{,}825$ м^3.

При этих размерах хлыста из таблиц[2] объем сосны равен 3,78 м^3 (расхождение $\varepsilon = 1{,}2\%$), для березы 3,88 м^3 ($\varepsilon = 1{,}4\%$), для дуба 3,83 м^3 ($\varepsilon = 0{,}1\%$).

Полученный результат вполне удовлетворителен для расчетов и свидетельствует о правильности уравнений, определяющих объем стволов деревьев.

Центр тяжести хлыста лежит на оси симметрии ох. Координаты центров тяжести конуса и усеченного параболоида обозначены x_1 и x_2, объемы их — V_1 и V_2.

Координата центра тяжести

$$x_{ц.т} = \frac{x_1 V_1 + x_2 V_2}{V_1 + V_2}; \tag{7}$$

V_1 и V_2 определены через уравнения (4) и (5).

Центр тяжести конуса находится на 3/4 от вершины.

Центр тяжести усеченного параболоида определится уравнением

$$x_2 = \frac{\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz}{V_2} + h - h_o. \tag{8}$$

Тройной интеграл в числителе выражает статический момент параболоида относительно координатной плоскости, проходящей через его вершину o_1, перпендикулярно оси ох.

Из уравнения (5) проекцией параболоида на плоскость zoy будет круг

$$y^2 + z^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{Cb}{8}}\right)^2,$$

где $\sqrt[3]{\dfrac{Cb}{8}} = \rho$ — радиус круга.

Для вычисления тройного интеграла переходим к цилиндрическим координатам через соотношения:

$$z = \rho\cos\varphi \quad ; \quad y = \rho\sin\varphi \; ; \quad x = x.$$

В новых координатах уравнение параболоида выразится следующим образом:

$$x^{2/3} = \frac{y^2+z^2}{1/4C^{2/3}} \; ; \; x^2 = \left(\frac{y^2+z^2}{1/4C^{2/3}}\right)^3 ;$$

$$x = \sqrt{\frac{64}{C^2}\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right)^3} = \frac{8\rho^3}{C}.$$

Установим пределы интегрирования.

Для всего параболоида:

$$0 \le \varphi \le 2\pi \quad ; \quad 0 \le \rho \le \sqrt[3]{\frac{Cb}{8}} \quad ; \quad \frac{8\rho^3}{C} \le x \le b.$$

Для его вершинной части (на рис. 1 показана пунктирной линией)

$$0 \le \varphi \le 2\pi \; ; \; 0 \le \rho \le \sqrt[3]{\frac{Ch_o}{8}} \; ; \; \frac{8\rho^3}{C} \le x \le h_o ;$$

$$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V_1} d\varphi\,\rho\,d\rho\,x\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{Cb}{8}}} \rho\,d\rho \int_{\frac{8\rho^3}{C}}^{b} x\,dx - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{Ch_o}{8}}} \times$$

$$\times\, \rho\,d\rho \int_{\frac{8\rho^3}{C}}^{h_o} x\,dx = \frac{\pi C^{2/3} b^{2/3}}{8}\left(b^2 - \frac{b^2}{4}\right) -$$

$$- \frac{\pi C^{2/3} h_o^{2/3}}{8}\left(h_o^2 - \frac{h_o^2}{4}\right) = \frac{3}{32}\pi C^{2/3}\left(b^{8/3} - h_o^{8/3}\right)$$

Объем усеченного параболоида определен уравнением (5).

Центр тяжести усеченного параболоида, согласно уравнению (8),

$$x_2 = \frac{\frac{3}{32}\pi C^{2/3}(h^{8/3} - h_o^{8/3})}{\frac{3}{20}\pi C^{2/3}(h^{5/3} - h_o^{5/3})} + h - h_o$$

или

$$x_2 = \frac{5}{8C}\,\frac{(D^8 - d^8)}{(D^5 - d^5)} + h - h_o.$$

Центр тяжести хлыста, согласно уравнению (7),

$$x_{ц.т} = \frac{3}{8}\,\frac{10d^2h^2C^2 + 3\left[5(D^8 - d^8) + 8C(D^5 - d^5)(h - h_o)\right]}{C\left[5d^2hC + 9(D^5 - d^5)\right]}.$$

Если $l = 31$ м, $H = 21$ м, $h = 10$ м, $h_o = 5$ м, $D = 60$ см, то расстояние от центра тяжести хлыста до его вершины

$$x_{ц.т} = 20{,}9484 \text{ м и } \frac{x_{ц.т}}{l} = \frac{20{,}9484}{31} = 0{,}6757,$$

а от основания центр тяжести будет расположен на расстоянии 0,3243 l.

Сравним полученный результат с данными экспериментов, проведенными в [3]. Так, согласно [3], центр тяжести стволов осины находится на расстоянии 0,322 l (расхождение с нашим $\varepsilon_1 = 0{,}7\%$), для березы 0,317 l ($\varepsilon_1 = 2{,}3\%$).

И в данном случае результат подтверждает приемлемость предлагаемых формул для определения объема ствола дерева и его центра тяжести.

Резюме

Получены необходимые для использования при проектировании лесозаготовительной техники и более удобные в сравнении

с приведенными в литературе зависимости для определения объемов стволов и их центров тяжести.

Литература

1. Бюсген М. Строение и жизнь наших лесов. М., 1961. 2. Боярский В.С. Объемы круглых лесоматериалов. Киев, 1969. 3. Полищук А.П. Определение веса и положения центра тяжести дерева. — Труды ЦНИИМЭ, 1968, № 86.

УДК 634.0.377.621.869

М.В. Макушинский,
М.В. Ходосовский (канд.техн.наук)

ВЛИЯНИЕ РАСКОМЛЕВКИ КРУГЛЫХ ЛЕСОМАТЕРИАЛОВ И ИХ СБЕГА НА ВМЕСТИМОСТЬ ВАГОНОВ

В настоящее время погрузка круглых лесоматериалов в вагоны МПС на лесных складах леспромхозов производится пачками без раскомлевки сортиментов в них. Это обусловлено раскряжевкой хлыстов с комля и последующим продольным перемещением сортиментов без их разворота на сортировочных технологических потоках. Вследствие этого существующие способы формирования погружаемых пачек круглых лесоматериалов не позволяют уменьшить отрицательное влияние сбега сортиментов на величину загрузки вагонов.

Целью настоящего исследования является определение процента увеличения загрузки вагона при расположении сортиментов в пачке вразнокомелицу в сравнении с погрузкой пачек без раскомлевки сортиментов.

На рис. 1 изображена схема укладки в вагоне круглых лесоматериалов пачками без раскомлевки, а на рис. 2 — схема укладки пачек с раскомлевкой сортиментов.

Процент увеличения плотности штабеля сортиментов, уложенных в вагоны вразнокомелицу, можно представить так:

$$K = \frac{S_п}{S_р}\,100 = \frac{BH_п}{BH_р}\,100 = \frac{H_п}{H_р}\,100, \qquad (1)$$

где $S_п$ — площадь поперечного сечения штабеля сортиментов, уложенных в вагоны без раскомлевки; $S_р$ — площадь попереч-