

Р. В. Азарчик, аспирант

### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ РОСТА ПО МАТЕРИАЛАМ ВЫБОРОЧНОЙ ТАКСАЦИИ СОСНОВЫХ ДРЕВОСТОЕВ

The analysis of some the basic functions of growth is submitted on the basis of the data of sample mensuration and two most precisely describing changes of mean height of a forest stand from its middle-aged with the account bonitet plantings are chosen.

Функции роста леса являются одним из видов моделей хода роста, выражающих наиболее вероятные линии изменения важнейших таксационных показателей (признаков) древостоев в зависимости от их возраста [1].

Модели хода роста леса необходимы для решения большого круга практических задач, включая лесоинвентаризационные работы, лесоустойчивое проектирование и лесохозяйственное планирование. Таким образом, модели хода роста – это важнейшие лесотаксационные нормативы, на усовершенствование которых направлены усилия многих поколений лесоводов.

На современном этапе моделирования хода роста древостоев доминируют математические модели, выражающиеся через формулы или системы формул. Простейшими математическими моделями хода роста являются функции роста.

Функции роста в качестве аргумента могут содержать различные таксационные показатели (происхождение, состав, показатели условий мест произрастания и т.п.), однако обычно предполагается их постоянство во времени и рассматриваются они как параметры. Поэтому в качестве аргумента в большинстве случаев используется возраст.

В данной работе анализируются функции роста средней высоты. Были рассмотрены 17 функций различных групп (дробных, степенных, экспоненциальных преобразований, преобразований Митчерлиха), предложенные как рекомендуемые функции роста для аппроксимации динамики высот А. К. Кивисте [1].

Анализируемые функции, упорядоченные по числу параметров ( $k$ ), представлены в табл. 1.

Таблица 1

Анализируемые функции зависимости высоты от возраста

Число параметров	Автор	Вид функции	Номер функции
1	2	3	4
5	Йошид	$H = \frac{A^{c_0}}{(w_0 + w_1 A^{c_0-1} + w_2 A^{c_0}) - c^1}$	8
	Тодорович	$H = c_0 \left(\frac{A}{100}\right)^{b_0 + b_1 x + b_2 x^{c_1}}, \text{ где } x = \frac{2A}{(100 + A)}$	19
4	Йошид	$H = \frac{A^{c_0}}{((w_0 + w_1 A^{c_0}) - c^1)}$	5
	Тодорович	$H = \frac{A^3}{(w_0 + w_1 A + w_2 A^2 + w_3 A^3)}$	14
	—	$H = Hm \left(1 - \left(\frac{k+1}{k \text{Exp}(wA) + 1}\right)^c\right)$	3
3	Митчерлих	$H = Hm(1 - \text{Exp}(-wA))^c$	4
	Хосфильд	$H = \frac{A^{c_0}}{(b_0 + b_1 A^{c_0})}$	9
	Вейбул	$H = Hm(1 - \text{Exp}(-wA^c))$	10
	Корсунь	$H = \text{Exp}(w_0 + w_1 \ln(A) - w_2 \ln(A)^2)$	12
	Хосфильд	$H = \frac{A^2}{(w_0 + w_1 A + w_2 A^2)}$	13
	Хосфильд	$H = \frac{A}{(w_0 + w_1 \ln(A) + w_2 A)}$	17

1	2	3	4
2	Севастьянов	$H = Hm \operatorname{tgh}(wA)$	1
	Вебер	$H = Hm(1 - \operatorname{Exp}(-wA))$	2
	Митчерлих	$H = \operatorname{Exp}(w_0 + w_1 \ln(1 - \operatorname{Exp}(-0.02A)))$	18
	Гемеси	$H = \operatorname{Exp}\left(\frac{A}{b_0 + b_1 A}\right) - 1$	20
	Странд	$H = \left(\frac{A}{b_0 + b_1 A}\right)^3$	21
	Сивен	$H = c_0 \left(\frac{A}{c_1}\right)^{0.25} \sqrt{\frac{c_1}{A}}$	22

Для проверки корректности работы функций были использованы данные выборочной таксации Гродненского ПЛХО по основным типам леса: сосняку мшистому, сосняку орляковому, сосняку черничному, сосняку кисличному. Данные были представлены 3667 круговыми реласкопическими площадками.

Оценка параметров уравнений регрессии выполнялась нелинейным методом наименьших квадратов в пакете «STATISTICA». Основными критериями для выбора оптимальной функции являлись такие статистики, как множественный коэффициент корреляции  $R$  и критерий Фишера  $F$ .

К функции роста предъявляются следующие требования:

- 1) должна исходить из точки начала координат;
- 2) должна быть возрастающей;
- 3) должна приближаться к асимптоте, параллельной оси возраста;
- 4) у функции роста должна быть одна точка перегиба.

Все рассмотренные нами функции удовлетворяют данным требованиям.

Оптимальная функция должна иметь наибольшее значение критерия Фишера  $F$  и коэффициента корреляции  $R$ , т. е. как можно точнее описывать естественный ход роста и при этом иметь наипростейшую структуру.

После анализа по основным статистикам ( $R$  и  $F$ ) функции в рамках групп по числу параметров ( $k$ ) были расположены по уменьшению корректности описания динамики высот для каждого типа леса в отдельности.

В качестве примера, характеризующего общую зависимость изменения коэффициента корреляции  $R$  и критерия Фишера  $F$  от количества параметров и вида функции, в табл. 2 и 3 отображена вариация данных этих статистик в сосняке мшистом и сосняке орляковом соответственно.

Таблица 2

Основные статистики различных видов функций в С. мш.

$k$	Номер функции	$F$	$R$
5	8	16 706.37	0.7428892
	19	16 661.59	0.7420996
4	14	20 905.29	0.7430701
	5	20 899.70	0.7429944
	3	20 896.54	0.7429500
3	9	27 869.95	0.7429030
	13	27 856.54	0.7427617
	4	27 825.12	0.7424298
	12	27 785.09	0.7442006
	17	27 774.76	0.7411896
	10	27 743.67	0.7415654
2	1	40 989.91	0.7369104
	22	40 844.02	0.7358321
	21	40 720.15	0.7349092
	20	40 264.79	0.7314590
	18	40 210.38	0.7310405
	2	40 113.85	0.7302948

Как видно из табл. 2, коэффициент корреляции  $R$  от максимального значения в функциях с количеством параметров 5 до минимального в функциях с количеством параметров 2 уменьшается незначительно (на 1,7%), в то время как критерий Фишера  $F$  значительно увеличивается от 16 661,59 до 40 989,91 (146%). Из этого следует, что увеличение количества параметров в уравнении незначительно повышает точность описания опытных данных, при этом резко увеличивая сложность их использования. Несмотря на различия в абсолютных значениях критерия Фишера  $F$  и коэффициента корреляции  $R$  в сосняках мшистом и орляковом, тенденция их изменения в зависимости от количества параметров аналогична.  $R$  в орляковом типе леса

уменьшается на 2,2%, а  $F$  увеличивается на 146,2%.

В связи с вышесказанным для описания аппроксимации динамики высот достаточно использовать уравнения с количеством параметров от 2 до 3.

Следующим этапом работы был анализ зависимости параметров функций с количеством параметров 2 и 3 от класса бонитета. Для этого все имеющиеся опытные данные по типам леса были сведены в один массив. Каждому классу бонитета был присвоен числовой показатель. Классу бонитета Ib – 1, классу бонитета Ia – 0, классам бонитета I–III были присвоены значения 1–3 соответственно. Затем была произведена оценка связи параметров уравнений с числовым индексом бонитета, которая выполнялась также в пакете «STATISTICA» по множественному коэффициенту корреляции  $R$  и критерию Фишера  $F$ . Результаты для уравнений с числом параметров 2 приведены в табл. 4, а с числом параметров 3 – в табл. 5.

Таблица 3  
Основные статистики различных видов функций в С. орл.

$k$	Номер функции	$F$	$R$
5	19	8 190,41	0,7793045
	8	8 151,71	0,7781240
4	3	10 230,61	0,7786883
	14	10 224,32	0,7785349
	5	9 978,99	0,7723793
3	10	13 656,32	0,7785352
	11	13 650,86	0,7784355
	4	13 650,86	0,7784355
	13	13 645,01	0,7783284
	17	13 643,75	0,7783054
	9	13 626,61	0,7779911
	12	13 595,10	0,7774111
2	1	20 069,21	0,7729092
	22	19 709,04	0,7682035
	21	19 641,83	0,7673033
	2	19 473,86	0,7650219
	20	19 394,75	0,7639317
	18	19 240,20	0,7617715

Таблица 4

Анализ зависимости параметров функций от числового показателя бонитета

Параметр	$H = Hm \operatorname{tgh}(wA) \quad (1)$		$H = c_0 \left(\frac{A}{c_1}\right)^{0,25\sqrt{\frac{c_1}{A}}} \quad (22)$		$H = \left(\frac{A}{b_0 + b_1 A}\right)^3 \quad (21)$	
	$Hm$	$w$	$c_0$	$c_1$	$b_0$	$b_1$
$R$	0.615952	0.462977	0.564699	0.512371	0.505219	0.568526
$F$	2210.54	999.92	1715.89	13046.66	1256.09	1885.57
	$H = \operatorname{Exp}\left(\frac{A}{b_0 + b_1 A}\right) - 1 \quad (20)$		$H = Hm(1 - \operatorname{Exp}(-wA)) \quad (2)$		$H = \operatorname{Exp}(w_0 + w_1 \ln(1 - \operatorname{Exp}(-0.02A))) \quad (18)$	
	$b_0$	$b_1$	$Hm$	$w$	$w_0$	$w_1$
$R$	0.51902	0.58284	0.60712	0.53575	0.52799	0.54759
$F$	1351.31	1885.57	2139.56	1475.47	1416.66	1569.67

Таблица 5

Анализ зависимости параметров функций от числового показателя бонитета

Параметр	$H = \operatorname{Exp}(w_0 + w_1 \ln(A) - w_2 \ln(A)^2) \quad (12)$			$H = Hm(1 - \operatorname{Exp}(-wA^c)) \quad (10)$		
	$w_0$	$w_1$	$w_2$	$Hm$	$w$	$c$
$R$	0.65957	0.62077	0.62077	0.62077	0.61943	0.66290
$F$	2822.16	2297.7	2297.7	2297.7	2281.8	2873.1
	$H = \frac{A^{c_0}}{(b_0 + b_1 A^{c_0})} \quad (9)$			$H = \frac{A}{(w_0 + w_1 \ln(A) + w_2 A)} \quad (17)$		
	$c_0$	$b_0$	$b_1$	$w_0$	$w_1$	$w_2$
$R$	0.64324	0.66290	0.66290	0.66290	0.66290	0.65834
$F$	2586.7	2873.1	2873.1	2873.1	2873.1	2803.6

Для аппроксимации динамики высот сосновых древостоев из групп функций с числом параметров 2 и 3 выбираем по одному уравнению, которое наиболее корректно описывает изменение высоты древостоя от возраста с учетом бонитета. Как видно из табл. 4, наиболее тесная связь между параметрами уравнений и числовыми показателями наблюдается в уравнении (2) Вебера, имеющем вид

$$H = Hm(1 - \text{Exp}(-wA)),$$

а из табл. 5 – уравнение (12) Корсуня, имеющее вид

$$H = \text{Exp}(w_0 + w_1 \ln(A) - w_2 \ln(A)^2).$$

Для сосняков мшистых, орляковых, черничных и кисличных были определены коэффициенты линейных уравнений зависимости параметров уравнений (2) и (12) от числового

индекса бонитета. В результате функции зависимости средней высоты от среднего возраста древостоя для основных типов леса сосновых насаждений Гродненского ПЛХО будут иметь следующий вид:

а) функция (2) Вебера

$$H = (28.84958 + 0.73657B)(1 - \text{Exp}(-(0.022433 - 0.001379B)A));$$

б) функция (12) Корсуня

$$H = \text{Exp}((-4.30320 - 1.29754B) + (7.188576 + 1.417542B)\ln(A) - (1.711090 + 0.386302B)(\ln(A))^2),$$

где  $B$  – числовой индекс бонитета.

#### Литература

Кивисте А. К. Функции роста леса: Учеб.-справочное пособие. – Тарту: Эстонская с.-х. академия, 1988. – 108 с.