уфимский, Оленинский, Мостовской и Хандагатайский леспромхозы) в два раза (параметр ρ_1 уменьшается с 0,1 до 0,05) обеспечивает рост производительности оборудования в среднем на 2,7% при невысокой степени их загрузки ρ_2 =0,5. В то же время повышение стабильности подачи хлыстов в раскряжевку в два раза обеспечивает рост производительности на данной операции на 8%.

Резюме. Устанавливая оптимальные режимы работы оборудования, можно достигнуть определенного увеличения его производительности без дополнительных капиталовложений.

Литература

1. Ковалев Н. Ф., Турлай И.В. Вопросы анализа систем обслуживания лесозаготовок с учетом надежности механизмов. — "Лесной журнал", 1975, № 2.

УДК 634.0.848.7

В.П. Ситяев

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ПЛОЩАДКЕ НИЖНЕГО СКЛАДА

Транспортные операции по перемещению лесоматериалов составляют до 50% всех внутрискладских трудозатрат и являются непроизводительными операциями. Как абсолютная, так и относительная доля этих операций в общем процессе имеет тенденцию к увеличению. Поэтому качество нижнескладского производства во многом определяется рациональной организацией внутрискладского транспорта.

Для нижних складов с достаточно развитой транспортной схемой остро ставится задача такого размещения технологических объектов, между которыми осуществляются перевозки лесоматериалов, обеспечивающие наименьшие транспортные затраты.

Для машинного решения задачи прежде всего надо иметь формальную ее запись. В [1] получены различные модели задачи размещения объектов. Развитие математической модели задачи состоит в поиске варианта формальной записи, допускающего применение эффективных вычислительных методов решения.

Среди всех машинных методов математического программирования эффективными являются методы линейного программирования. В настоящей работе исследуются те из моделей задачи размещения объектов, для решения которых можно применить симплекс-метод.

При внедрении в проектирование нижних складов машинного метода размещения объектов основное значение имеет размерность задачи, поскольку точность формального описания задачи размещения объектов при проектировании конкретного нижнего склада прямо определяется числом покрывающих простейших объектов, как указано в [1], и размерностью решаемой задачи.

Оценим размерность различных моделей задачи размещения, решаемых с помощью симплекс-метода.

В [2] показано, что задача размещения объектов эквивалентна по оптимальному плану некоторой задаче билинейного вида. Последнюю предлагается рассматривать формально как задачу квадратного программирования

$$c = \frac{1}{2} X^T DX + CX \longrightarrow \min ; \tag{1}$$

$$AX = B . \tag{2}$$

Применение выпуклого симплекс-метода для решения задачи (1)-(2) в [2] обосновывается доказательством выпуклости целевой функции (1). Для решения задачи (1)-(2) применим любой метод, который не требует обязательной строгой выпуклости целевой функции (1). Таким образом, доказано существование решения задачи оптимального размещения объектов и предложен способ нахождения этого решения, использующий симплекс-метод.

Автором предложен метод решения задачи размещения объектов, записанный в виде нелинейной задачи:

$$c = CX \longrightarrow \min ; \tag{3}$$

$$AX = B; \tag{4}$$

$$Z \cdot \overline{Z} = 0; \quad Z, \overline{Z} \in X , \tag{5}$$

где $Z, \overline{Z}$ — некоторые непересекающиеся подмножества переменных X.

Для решения задачи (3)—(5) разработана АЛГОЛ-программа, основу которой составляет симплекс-метод и которая была проверена на решении тестовой задачи и нескольких практических задач размещения объектов на площадке нижних складов. Размерность задачи (3)—(5)

$$l_2 = \left\{ n, m \right\},$$

где n, m — размерность матрицы А в ограничении (4), одинаковая с размерностью А в задаче (1)—(2). Ясно, что размерность l_2 существенно меньше l_1.

Для практической реализации на ЭВМ метода важен другой параметр — информационный объем $\rho(l)$ метода, требуемый для решения задачи размерностью l и измеренным объемом необходимой оперативной памяти ЭВМ.

При использовании программы для решения задачи (3)—(5) размерности l_2 требуется следующее число ячеек оперативной памяти для размещения информационной части метода:

$$\rho(l_2) = m^2 + 11m + n(5 + 2l_{ср}) + 24,$$

где $l_{ср}$ — среднее в столбце число ненулевых элементов матрицы А ограничения (4). Если для машинной реализации метода Вольфе решения задачи (1)—(2) использовать симплекс-метод, то

$$\rho(l_1) = m^2 + n^2 + 2nm + 11m + n(36 + 10l_{ср}) + 24.$$

Поскольку для канонической записи задачи линейного программирования требуется $n > m$, то понятно, что информационный объем при решении задачи (1)—(2) значительно больше этого объема при решении задачи (3—(5).

Оценка $\rho(l)$ характеризует прежде всего возможности конкретной реализации метода. Использовать $\rho(l)$ в практических задачах размещения объектов можно, если найдена зависимость $\rho(N)$, т.е. зависимость информационного объема от числа объектов N. Найдем, как зависят параметры m и n задачи размещения (3)—(5) от числа элементарных покрывающих объектов N.

Запишем векторное ограничение (4) в развернутом виде, согласно[2], разбив его на группы:

$$\left.\begin{aligned} & x_i - r_i = R_i; \\ & y_i - r_i = R_i; \end{aligned}\right\} \text{ I группа из } m_{I} \text{ равенств}$$

$$\left.\begin{aligned} & x_i - x_j - z_{ij} + z_{ij} = 0; \\ & y_i - y_i - \omega_{ij} + \omega_{ij} = 0; \end{aligned}\right\} \text{ II группа из } m_{II} \text{ равенств}$$

$$z_{ij} + \bar{z}_{ij} + \omega_{ij} + \bar{\omega}_{ij} - \eta_{ij} = R_i + R_j \qquad \text{III группа из } m_{III} \text{ равенств}$$

$$i,j = 1, 2, \ldots, N; \quad j > i$$

Обозначим число переменных $\{x_i\}$ через $n[x_i]$. Очевидно,

$$n[x_i]=n[y_i]=n[r_i]=n[\varepsilon_i]=N;$$

$$n[z_{ij}, \bar{z}_{ij}, \omega_{ij}, \bar{\omega}_{ij}]= 4\frac{N^2-N}{2} \quad ; \quad n[\eta_{ij}]=\frac{N^2-N}{2} \quad .$$

Тогда

$$n=n[X]=n[x_i, y_i, \varepsilon_i, r_i, z_{ij}, \bar{z}_{ij}, \omega_{ij}, \bar{\omega}_{ij}, \eta_{ij}] =$$

$$= 2{,}5N^2 + 1{,}5N. \qquad (6)$$

Число ограничений

$$m=m_I+m_{II}+m_{III}=2N+2\frac{N^2-N}{2}+\frac{N^2-N}{2}=1{,}5N^2+0{,}05N. \quad (7)$$

Оценки (6), (7) являются верхними для размерности l_2 задачи (3)—(5), поскольку в реальных задачах всегда координаты хотя бы одного объекта фиксируются, т.е. переводятся из переменных $\{x_i, y_i\}$ в константы, а также фиксируются некоторые связи из III группы, т.е. уменьшается $n[\eta_{ij}]$. Поэтому практические задачи размещения объектов всегда имеют размерность меньше, чем дают оценки (6), (7). Автором решен ряд практических примеров размещения объектов.

При решении задачи размещения (3)—(5) для N_2 объектов необходим объем оперативной памяти для информационной части метода в количестве ячеек

$$\rho(N_2)\leq 2{,}25N^4+1{,}5N^3+(29{,}25+5\,l_{cp})N^2+(13{,}3\,l_{cp})N+ + 24.$$

Примеры практических задач показывают, что можно принять $l_{cp}\approx 2$. Тогда

$$\rho(N_2)\leq 2{,}25N^4+1{,}5N^3+39{,}25N^2+19N+24.$$

Найдем для примера число объектов N_2, для которого можно решить задачу размещения на ЭВМ БЭСМ-6 методом [3].

ЭВМ БЭСМ-6 имеет оперативную память в 32 листа, каждый лист содержит 1024 ячейки. АЛГОЛ-программа занимает примерно 2—3 тыс.ячеек. Следовательно, для информационной части задачи размещения выделяется около 30 листов, т.е. примерно 30000 ячеек. Значит,

$$2{,}25N^4 + 1{,}5N^3 + 39{,}25N^2 + 19N + 24 < 30000,$$

откуда $N_2 \approx 10$ объектам при решении задачи (3) - (5).

Учитывая зависимость $\rho(l_1)$, понятно, что число объектов N_1, для которых можно решать задачу размещения в форме (1)-(2) при использовании эквивалентных вычислительных средств, значительно меньше 10 и не может представлять практический интерес.

Что может дать реализация метода решения задачи размещения (3)—(5) на основе симплекс-метода [3], написанного в машинных кодах БЭСМ-6? Симплекс-метод [3] позволяет решать задачи линейного программирования размерностью $l_2' = \{16000, 1000\}$. Основным в симплекс-методе [3] является требование на число ненулевых элементов матрицы не более 32000 линейных ограничений. Согласно (6,7) число переменных задач (3)—(5).

$$n = 2{,}5N^2 + 1{,}5N \leq 16000, \qquad (8)$$

а число ненулевых элементов в (4) равно

$$n \cdot l_{ср} \approx 5N^2 + 3N \leq 32000. \qquad (9)$$

Совместное решение (8), (9) дает оценку $N_2' = 80$ для числа объектов в задаче (3)—(5).

Для задач проектирования время решения на ЭВМ не является сдерживающим фактором. Наметим один возможный подход к решению задачи размещения, позволяющий за счет увеличения машинного времени решать задачу для числа объектов больше $N_2' = 80$.

Рассмотрим формализацию задачи размещения объектов, получающуюся при покрытии реальных объектов кругами [1]:

$$C = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} C_{ij} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \longrightarrow min;$$

$$x \geq R_i; \quad y_i \geq R_i;$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \leq (R_i + R_j)^2;$$

$$i,j = 1,2,\ldots, N; \quad j > i.$$

Здесь (x_i, y_i) — координаты, а R_i — радиусы объектов, число которых равно N; C_{ij} — целевые коэффициенты.

Можно показать, что эта задача эквивалентна

$$z = x_{2N+1} \longrightarrow \min . \tag{10}$$

$$\psi_i = R_i - x_i \leq 0 ; \quad \psi_{N+i} = R_i - x_{N+i} \leq 0 ; \tag{11}$$

$$\psi_{2N+1} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} C_{ij} \left[(x_i - x_j)^2 + (x_{N+i} - x_{N+j})^2 \right] - X_{2N+1} \leq 0 ; \tag{12}$$

$$\psi_{2N+1+1} = (R_i + R_j)^2 - (x_i - x_j)^2 - (x_{N+i} - x_{N+j})^2 \leq 0 ; \tag{13}$$

$$ij = 1,2,\dots,N; \quad j > i .$$

Запись (10)—(13) представляет каноническую форму общей задачи выпуклого программирования.

Для решения (10)—(13) можно применить общий метод выпуклого программирования. Изложим один из таких алгоритмов, следуя [4].

Алгоритм итерационный, общий шаг на к-й итерации содержит следующие действия:

1) определение в полученной точке $x^{(к-1)} \equiv (x_1^{(к-1)}, x_2^{(к-2)}, \dots, x_{(2N+1)}^{(к-2)}$ направления $r^{(к)} \equiv r_1^{(к)}, r_2^{(к)}, \dots, r_{(2N+1)}^{(к)}$ допустимого скорейшего убывания функции z;

2) вычисление нового значения параметра δ;

3) вычисление шага $t_к > 0$, характеризующего длину отрезка допустимого продвижения из $x^{(к-1)}$ вдоль $r^{(к)}$;

4) определение новой точки $x^к$ и новых уклонений этой точки от поверхностей, определяемых условиями (11)—(13).

На каждой к-й итерации при выполнении 1) и 2) алгоритма решается линейная задача вида: $U = \eta \longrightarrow \min ;$ (14)

$$r_{2N+1} \leq \eta ; \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{2N+1} \frac{\partial \psi_{1\nu} (x^{(к-1)})}{\partial x_i} r_i \leq \eta ; \quad \nu = 1,2,\dots,\nu_к ; \tag{16}$$

$$r_i \leq C ; \quad -r_i \leq C ; \quad i = 1,2,\dots,2N+1, \qquad (17$$

где числа $\frac{\partial \psi_{1\nu}(x^{(\kappa-1)})}{\partial x_i}$ представляют собой коэффициенты матрицы линейных ограничений и вычисляются ранее. Опустив индекс итерации к, ограничения (16) напишем

для $1 \leq 2N - r_j \leq \eta$;

для $1 = 2N+1$

$$\sum_{\kappa=1}^{N} \left[\sum_{j=\kappa+1}^{N} C_{\kappa j}(x_\kappa - x_j) - \sum_{i=1}^{\kappa-1} C_{i\kappa}(x_i - x_\kappa) \right] + r_\kappa +$$

$$+ \sum_{\kappa=1}^{N} \left[\sum_{j=\kappa+1}^{N} C_{\kappa j}(x_{N+\kappa} - x_{N+j}) - \sum_{i=1}^{\kappa-1} C_{i\kappa}(x_{N+i} - x_{N+\kappa}) \right] r_{N+\kappa} - r_{2N+1} \leq \eta;$$

для $2N+1 < 1 \leq 2N + 1 + \frac{N^2 - N}{2}$

$$-2(x_i - x_j) r_i + 2(x_i - x_j) r_j - 2(x_{N+i} - x_{N+j}) r_{N+i} +$$

$$+ 2(x_{N+i} - x_{N+j}) r_{N+j} \, r_{N+j} \leq \eta.$$

Задача линейного программирования (14)-(17) записана в сопряженной канонической форме. Для нее должно выполняться $n < m$. Ее размерность

$$1_3 \leq \left\{ 2N + 2; \quad 0{,}5^2 + 5{,}5N + 4 \right\}. \qquad (18)$$

Для решения (14)-(17) было бы весьма эффективно использовать машинный симплекс-метод, разработанный для задачи программирования в сопряженной канонической форме с двусторонними ограничениями на переменные. Это позволило бы на каждой итерации решить (14)-(16), размерность которой

$$1'_3 \leq \left\{ 2N + 2; \ 0{,}5N^2 + 1{,}5N + 2 \right\}. \qquad (19)$$

Поскольку неизвестны подобные машинные программы симплекс-метода, то нельзя ничего сказать и об информационном объеме $\rho(1)$. Однако общие соображения подсказывают, что основным ограничением будет число ненулевых элементов вида (9). Оценим N_3.

Заметим, что (18), (19) были найдены в предположении, что

$$\nu_к = \frac{N^2+N}{2}, \qquad (20)$$

а $\nu_к$ и число ограничений вида (16) будет значительно меньше: оно точно равняется числу точек касания (с точностью δ) размещаемых кругов друг с другом и с осями координат. Для N_3 найдем нижнюю оценку.

Очевидно, в (14)-(16) $n = 2N+2$. Найдем среднее в столбце число ненулевых элементов $1_{ср}$. При этом (15) можно не учитывать. Анализ (16) в развернутом виде позволяет считать, что

$$1_{ср} = \frac{N}{2} + 2.$$

Тогда

$$n \cdot 1_{ср} \approx N^2 + 5N + 4 \leq 32000.$$

Учитывая (20), получаем $N_3 \geq 170$.

Резюме. Решение задачи размещения в (10)-(13) описанным методом позволяет более чем в 2 раза увеличить число размещаемых объектов по сравнению с задачей в форме (3)-(5) -- задачи (10)-(13) на ЭВМ примерно в к раз больше, чем при решении задачи (3)-(5); здесь к -- число итераций при решении задачи (10)- (13).

Литература

1. Рахманин Г.А., Ситяев В.П. К вопросу о рациональном размещении объектов нижнего склада. -- "Труды ЦНИИМЭ", вып. 145, 1975. 2. Ситяев В.П. Решение задачи размещения объектов нижних складов в билинейной постановке. -- "Труды ЦНИИМЭ", вып. 145, 1975. 3. Станевичус А. И. Мини-комплекс ЛП-БЭСМ-6. Программы и алгоритмы. - В сб.:ЦЭМИ АН СССР. М., 1974, № 49. 4. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М., 1964.