

При увеличении переднего угла свыше 45° уменьшается задний угол, что значительно увеличивает трения задней грани резца о резину, тем самым увеличивает износ ножей. Усилие резания при этом возрастает.

Из анализа данных, приведенных в табл. 1, и визуальных наблюдений можно принять оптимальными углами: угол заострения резца от 15° до 30° , передний угол от 30° до 45° .

УДК 534.29

М.Д.Мартыненко, докт.физ.-мат.наук,
профессор, И.Г.Довгялло, канд.техн.наук

О ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Интенсификация рабочих процессов лесозаготовительной техники лесной промышленности, повышение нагрузок, скоростей, давлений, температур, сочетание статических и циклических напряжений, уменьшение веса и габаритов конструкций, увеличение их надежности и ресурса настоятельно требуют расширения теоретических и экспериментальных исследований в области прочности, устойчивости и колебаний [1].

Для правильного учета характеристик прочности при сложном нагружении очевидна необходимость математического описания напряженного состояния материала при действии знакопеременных высокочастотных нагрузок как одной из компонент сложного напряженного состояния деталей подобных машин и механизмов.

Целью настоящей работы и является расчет многоступенчатых стержней при действии продольных ультразвуковых колебаний.

Рассмотрим симметричный n - ступенчатый полуволновой стержень, расчетная схема которого представлена на рис. 1. Поскольку сечение n - n является плоскостью узла колебаний, середина стержня неподвижна и может считаться жестко закрепленной. Поместим начало координат в узле колебаний и направим ось x вдоль оси стержня. Обозначим через ρ_i , $E_i(x)$, $F_i(x)$, a_{i-1} , a_i - соответственно плотность материала, его модуль Юнга, площадь поперечного сечения, координаты начала и конца i -й ступени стержня.

Предположим, что каждый момент времени поперечные сечения стержня остаются плоскими и напряжения по ним рас-

пределяются равномерно. Тогда главный вектор усилий, действующих в каждом поперечном сечении i -й ступени, будет равен

$$P_i(x,t) = E_i F_i \frac{\partial u}{\partial x},$$

где $u(x,t)$ - продольное перемещение этого сечения, $\frac{\partial u}{\partial x}$ - относительная деформация. Из определения $u(x,t)$ следует его непрерывная, но не непрерывно-дифференцируемая зависимость от x и t в области $0 < x < a_n, t \geq 0$. Точками разрыва непрерывной дифференцируемости $u(x,t)$ являются начало и конец каждой ступени стержня.

Условие равновесия элемента i -й ступени стержня длины под действием вынуждающей силы $g_i(x,t) dx$, сил $P_i(x,t), P_i(x+dx,t)$ и силы инерции $\rho_i F_i \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$ приводит к следующему уравнению продольных колебаний:

$$\rho_i F_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[E_i(x) F_i(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + g_i(x,t). \quad (1)$$

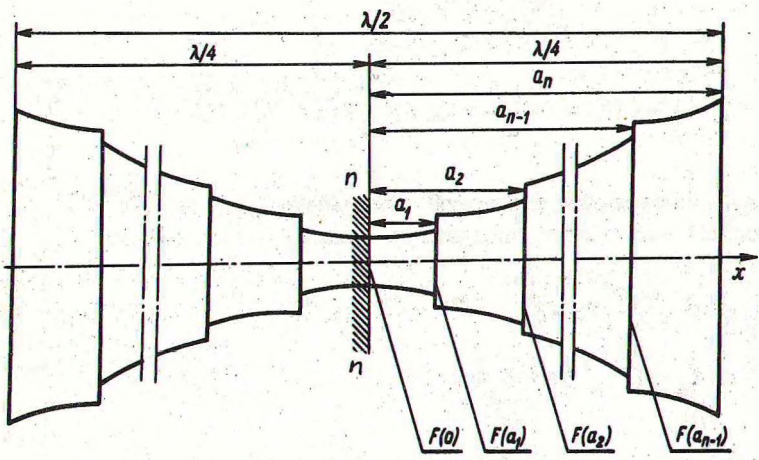


Рис. 1. Расчетная схема многоступенчатого стержня.

Исходя из непрерывности перемещений на границах участков и непрерывности усилий в плоскостях их сопряжений, а также условий закрепления концов стержня, получим следующие граничные условия для (1):

$$\left. \begin{aligned} u \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a_n} &= 0; \\ u \Big|_{x=a_1-0} = u \Big|_{x=a_1+0} &; \\ E_i F_i \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a_1-0} = E_{i+1} F_{i+1} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a_1+0} & \end{aligned} \right\} (2)$$

К (2) следует присоединить начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} u \Big|_{t=0} &= f(x); \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \phi(x). \end{aligned} \right\} (3)$$

Решение задачи (1), (2), (3) будем искать по методу Фурье. Предположим сначала, что $g(x, t) = 0$. Полагая $u(x, t) = \varphi(t)\psi(x)$ получим для определения φ и ψ уравнения:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \alpha \varphi(t) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} (E_i F_i \frac{d\psi}{dx}) - \alpha \rho_i F_i \psi(x) = 0, \quad (5)$$

где α — некоторый числовой параметр.

Из (2) вытекают следующие граничные условия:

$$\psi \Big|_{x=0} = \psi' \Big|_{x=a_n} = 0; \quad (6)$$

$$\psi \Big|_{x=a_1-0} = \psi \Big|_{x=a_1+0}; \quad (7)$$

$$E_i F_i \psi' \Big|_{x=a_1-0} = E_{i+1} F_{i+1} \psi' \Big|_{x=a_1+0}. \quad (8)$$

Из самосопряженности дифференциального выражения, стоящего слева в формуле (5), следует вещественность α .

Для исследования его знака рассмотрим интегральное тождество, вытекающее из (5):

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} \psi(x) \frac{d}{dx} (E_i F_i \frac{d\psi}{dx}) dx = \alpha \int_{a_{i-1}}^{a_i} \rho_i F_i \psi^2(x) dx,$$

которое после интегрирования по частям примет вид

$$\begin{aligned} \alpha \int_{a_{i-1}}^{a_i} \rho_i F_i \psi^2(x) dx &= \left[E_i F_i \psi(x) \frac{d\psi}{dx} \right]_{x=a_i} - \\ &- \left[E_i F_i \psi(x) \frac{d\psi}{dx} \right]_{x=a_{i-1}} - \int_{a_{i-1}}^{a_i} E_i F_i \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Суммируя (9) по i от 1 до n , получим

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} \rho_i F_i \psi^2 dx &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[E_i F_i \psi(x) \frac{d\psi}{dx} \right]_{x=a_i} - \right. \\ &\left. - \left[E_i F_i \psi(x) \frac{d\psi}{dx} \right]_{x=a_{i-1}} \right\} - \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} E_i F_i \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу условий (6)...(8) первая сумма справа в (10) исчезает и поэтому

$$\alpha \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} \rho_i F_i \psi^2 dx = - \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} E_i F_i \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx. \quad (11)$$

Поскольку ρ_i , F_i и F_i существенно положительны, то отсюда следует, что $\alpha < 0$. В частности, при $\alpha = 0$ из (11) вытекает, что $\psi = A_i = \text{const}$; условия (6) ... (7) приводят к $A_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Следовательно, $\alpha = -k^2$ ($k = 0$). Представим решение уравнений (5) в виде

$$\psi_k(x) = L_k^{(i)} y_k^{(i)}(x) + M_k^{(i)} z_k^{(i)}(x), (a_{i-1} < x < a_i), \quad (12)$$

где $L_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$ — произвольные постоянные, $y_k^{(i)}(x)$, $z_k^{(i)}(x)$ линейно-независимые решения уравнения (5), удовлетворяющие условиям:

$$\left. \begin{aligned} y_k^{(i)}(x) \Big|_{x=a_{i-1}} &= 0, \quad z_k^{(i)}(x) \Big|_{x=a_{i-1}} = 1; \\ \frac{dy_k^{(i)}(x)}{dx} \Big|_{x=a_i} &= 1; \quad \frac{dz_k^{(i)}(x)}{dx} \Big|_{x=a_i} = 0. \end{aligned} \right\} (13)$$

Из (6)...(8) получим

$$M_k^{(i)} = 0$$

$$L_k^{(i)} y_k^{(i)}(a_i) + M_k^{(i)} z_k^{(i)}(a_i) = M_k^{i+1};$$

$$E_i(a_i) F_i(a_i) \left\{ L_k^{(i)} \frac{dy_k^{(i)}}{dx} \Big|_{x=a_i} + M_k^{(i)} \frac{dz_k^{(i)}}{dx} \Big|_{x=a_i} \right\} =$$

$$= E_{i+1}(a_i) F_{i+1}(a_i) L_k^{i+1}$$

или

$$\left. \begin{aligned} M_k^{(i+1)} &= \begin{vmatrix} L_k^{(i)} & M_k^{(i)} \\ -z_k^{(i)}(a_i) & y_k^{(i)}(a_i) \end{vmatrix}; \\ L_k^{(i+1)} &= \frac{E_i(a_i) F_i(a_i)}{E_{i+1}(a_i) F_{i+1}(a_i)} \left[-\frac{dz_k^{(i)}}{dx} \Big|_{x=a_i} \frac{L_k^{(i)}}{L_k^{(i)}} + \frac{dy_k^{(i)}}{dx} \Big|_{x=a_i} \frac{M_k^{(i)}}{M_k^{(i)}} \right] \end{aligned} \right\} (14)$$

Из (14) следует, что все $M_k^{(i+1)}$ и $L_k^{(i+1)}$ выражаются через $L_k^{(i)} \neq 0$. Из условия $\psi_k'(a_n) = 0$ следует, что нетривиальное решение уравнения (5) возможно только для тех значений параметра κ_1 , при которых

$$\left| \begin{array}{cc} L_k^{(n)} & M_k^{(n)} \\ -\frac{dz_k^{(n)}}{dx} \Big|_{x=a_n} & \frac{dy_k^{(n)}}{dx} \Big|_{x=a_n} \end{array} \right| = 0. \quad (15)$$

Это есть уравнение частот для многоступенчатого симметричного стержня.

Если $y_k^{(i)}(x), z_k^{(i)}(x)$ - целые функции параметра k , то уравнение (15) будет иметь счетное множество решений $k(1=1, 2, \dots)$.

Докажем ортогональность с весом на промежутке $[0, a_n]$ функций $\psi_k(x)$, определяемых формулами (12)...(14), соответствующих различным корням уравнения (15). С этой целью рассмотрим следующее тождество:

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} \left\{ \psi_{k_1} \frac{d}{dx} \left(E_i F_i \frac{d\psi_{k_m}}{dx} \right) - \psi_{k_m} \frac{d}{dx} \left(E_i F_i \frac{d\psi_{k_1}}{dx} \right) \right\} dx =$$

$$= (k_1^2 - k_m^2) \int_{a_{i-1}}^{a_i} E_i F_i \psi_{k_m}(x) \psi_{k_1}(x) dx.$$

После очевидных преобразований получим

$$(k_1^2 - k_m^2) \int_{a_{i-1}}^{a_i} E_i F_i \psi_{k_1} \psi_{k_m}(x) dx = \left[E_i F_i \left\{ \psi_{k_1}(x) \frac{d\psi_{k_m}}{dx} - \psi_{k_m} \frac{d\psi_{k_1}}{dx} \right\} \right]_{x=a_{i-1}}^{x=a_i}$$

Откуда

$$(k_1^2 - k_m^2) \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} E_i F_i \psi_{k_m}(x) \psi_{k_1}(x) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[E_i F_i \left\{ \psi_{k_1} \frac{d\psi_{k_m}}{dx} - \psi_{k_m} \frac{d\psi_{k_1}}{dx} \right\} \right]_{x=a_i}^{x=a_{i+1}} = 0.$$

в силу условий (6)..(8), что и доказывает ортогональность $\psi_{k_1}^{(i)}(x)$ на $[0, a_n]$ с кусочно-непрерывным весом $E_i F_i$ ($i=1, \dots, n$). Обозначим через

$$\psi_{k_1}^{(i)}(x) = L_{k_1}^{(i)} y_{k_1}^{(i)}(x) + M_{k_1}^{(i)} z_{k_1}^{(i)}(x) \quad (a_{i-1} < x < a_i), \quad (16)$$

где $L_{k_1}^{(i)}, M_{k_1}^{(i)}$ определены формулами (14) при $L_{k_1}^{(1)} = 1$. Тогда решение уравнения (1) при $g=0$ представим в виде

$$u(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} (A_l \cos k_l t + B_l \sin k_l t) \psi_{k_l}^{(i)}(x), \quad (17)$$

$$\text{где } \psi_{k_1}^{(i)}(x) = \begin{cases} \psi_{k_1}^{(1)} & 0 < x < a_1; \\ \dots & \dots \\ \psi_{k_1}^{(i)} & a_{i-1} < x < a_i; \\ \dots & \dots \\ \psi_{k_1}^{(n)} & a_{n-1} < x < a_n. \end{cases} \quad (18)$$

Произвольные постоянные A_1 и B_1 определяются из начальных условий (3):

$$A_{k_1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} E_i F_i [\psi_{k_1}^{(i)}(x)]^2 dx} \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x) \psi_{k_1}^{(i)} E_i F_i dx;$$

$$B_{k_1} = \frac{1}{k_1 \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} E_i F_i [\psi_{k_1}^{(i)}(x)]^2 dx} \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} \phi(x) x$$

$$x E_i F_i \psi_{k_1}^{(i)}(x) dx. \quad (19)$$

Если $g_i(x,t) \neq 0$, то, разлагая эту функцию в ряд по собственным функциям $\psi_{k_1}^{(i)}(x)$, построим частное решение уравнения (1) по аналогии с известной схемой метода Фурье для неоднородного уравнения колебания струны [2].

В качестве примера реализации представленного расчета приведем уравнение частот для трехступенчатого однородного ($\rho_i = \rho = \text{const}, i=1,2,3$) стержня кусочно-постоянного сечения ($F_i = E_i = \text{const}, i=1,2,3$):

$$\begin{aligned} & \frac{F_0}{F_2} \cos k_1 (a_3 - a_2) \cos k_1 (a_2 - a_1) \cos k_1 a_1 - \\ & - \frac{F_1}{F_2} \sin k_1 a_1 \sin k_1 (a_2 - a_1) \cos k_1 (a_3 - a_1) = \\ & = \left[\frac{F_0}{F_1} \sin k_1 (a_2 - a_1) \cos k_1 (a_3 - a_1) \cos k_1 a_1 + \right. \\ & \left. + \sin k_1 a_1 \cos k_1 (a_2 - a_1) \cos k_1 (a_3 - a_1) \right] \sin k_1 (a_3 - a_2) \end{aligned} \quad (20)$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{F_0}{F_2} - \frac{F_1}{F_2} \operatorname{tg} k_1 a_1 \operatorname{tg} k_1 (a_2 - a_1) = \left[\frac{F_0}{F_1} \operatorname{tg} k_1 (a_2 - a_1) + \right. \\ & \left. + \operatorname{tg} k_1 a_1 \right] \operatorname{tg} k_1 (a_3 - a_2), \end{aligned} \quad (21)$$

где k_1 - волновое число.

В частном случае двухступенчатого стержня ($a_2 = a_3$) уравнение (20) вырождается в известное уравнение частот, полученное в [1];

$$\frac{F_0}{F_1} = \operatorname{tg} k_1 a_1 \operatorname{tg} k_1 (a_2 - a_1). \quad (22)$$

Поскольку при выводе уравнения (20) предполагалось $\cos k_1 a_1 \neq 0$, $\cos k_1 (a_2 - a_1) \neq 0$, $\cos k_1 (a_3 - a_2) \neq 0$, то дальнейшая редукция к одноступенчатому стержню ($a_2 = a_1$) непосредственно в уравнении (22) невозможна. Из уравнения (20) получим при $a_3 = a_2 = a_1$ известное уравнение частот для одноступенчатых стержней

$$\cos k_1 a_1 = 0. \quad (23)$$

Преимуществом вышеизложенной методики является возможность получения частного уравнения для стержней более низко-

го порядка непосредственно из уравнения частот для стержней с большим числом ступеней. Предложенный расчет применим не только для симметричных, но и для несимметричных (консольных) стержней.

Несмотря на то что уравнение (1) является приближенным, расхождений между расчетными и измеренными значениями распределения амплитуд по сечениям симметричных трехступенчатых и консольных образцов практически не наблюдалось.*

Л и т е р а т у р а

1. Серенсен С.В., Гарф М.Э., Кузьменко В.А. Динамика машин для испытаний на усталость. М., 1967. 2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1953.

* Соответствующие эксперименты проводились в лаборатории ультразвука БТИ им. С.М.Кирова.