имела изохронный центр а особой точке $O(0,0)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие
$$e(x) = (1+ax)^3.$$

Литература

1. *Волокитин Е.П, Иванов В.В.* Изохронность и коммутируемость полиномиальных векторных полей, Сиб. матем. журн., Т. 40, №1 (1999), 30–48.

ДИСКРЕТНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЛАЗЕРНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

В. А. Савва, С. Банжак (Минск, Беларусь)

Представлен полностью дискретный алгоритм построения аналитического решения, приводящего к дискретному статистическому распределению возбуждаемых частиц по их уровням энергии. Уравнения
$$-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t}=f_{n+1}e^{-\mathrm{i}\,\varepsilon_{n+1}t}a_{n+1}(t)+f_ne^{+\mathrm{i}\,\varepsilon_n t}a_{n-1}(t),\ a_n(0)=\delta_{n,0},\ n=0,1,\ldots,N; \tag{1}$$
описывают взаимодействие излучения с N (заданное натуральное число) последовательными переходами $E_{n-1}\leftrightarrow E_n, n=1,2,\ldots,N$ между уровнями. Ниже приведен случай $N=2$ двух переходов, но это не принципиально. Квантовые системы и излучение в уравнениях (1) описаны коэффициентами f_n,ε_n и параметром N.

Алгоритм основан на задании дискретной функции
$$\sigma(x;a,b)=\{\sigma(0),\sigma(1),\sigma(2)\}=\{1-a-b,a,b\},\quad x=\{0,1,2\}. \tag{2}$$
В нее введены два свободных параметра $0<a<1,\ \ 0<b\le 1-a$, а ее аргумент x имеет смысл безразмерной частоты Фурье искомых функций $a_n(t)$ в их однородном Фурье пространстве. Используя $\sigma(x)$ в качестве весовой функции, строим систему трех ортогональных дискретных нормированных полиномов $\{\hat p_n(x)\}_0^2$. Они. естественно, удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению
$$\bar f_{n+1}\hat p_{n+1}(x)+\bar f_n\hat p_{n-1}(x)=[rx+s_n]\hat p_n(x),\quad n=0,1,2,\quad \bar f_0=0,\quad \bar f_1=1,\quad \bar f_3=0;$$
коэффициенты которого находим:
$$r=\frac{1}{d_1},\ \bar f_1=1,\ \bar f_2=\frac{d_2}{d_1^4},\ d_1^2=a+4b-(a+2b)^2,\ d_2^2=4abc[ab+(a+4b)c],\ c=1-a-b.$$
$$s_0=-r(a+2b),\quad s_1=-r\frac{d_1^4+2ab}{d_1^2(a+2b)},\quad s_2=-r\frac{d_2^2(a+2b)}{d_1^4 2ab}.$$
Решение уравнений (1) ищем в виде дискретного преобразования Фурье
$$a_n(t)=e^{\mathrm{i}\,s_nt}\sum_{x=0}^{2}F_n(x)e^{\mathrm{i}\,rxt},\ F_n(x)=\sigma(x)\hat p_0\hat p_n(x),\ n=0,1,2;\ x=0,1,2. \tag{3}$$
Здесь $F_n(x)$ — Фурье спектры искомых функций $a_n(t)$, выраженные через построенные полиномы. Подстановка (3) в уравнения (1) показывает, что уравнения удовлетворяются при $f_n=\bar f_n,\quad \varepsilon_n=s_n-s_{n-1},\quad n=1,2$. Это взаимно-однозначное соответствие между коэффициентами уравнений (1) и извесными коэффициентами рекуррентного соотношения. Вычисление суммы (3) доставляет решение $a_n(t)$, а вычисление квадрата модуля $\rho_n(t)=a_n^*(t)a_n(t)$ дает экспериментально определяемую величину — вероятностное дискретное распределение частиц по энергетическим уровням.