4. Pranevich A.F. *The generalized Jacobi-Poisson theorem of building first integrals for Hamiltonian systems* // Qualitative Theory of Differential Equations: Proc. of Intern. Workshop QUALITDE / Editorial board I. Kiguradze, R.P. Agarwal, R. Hakl et al. Tbilisi, 2018. P. 147–149.

5. Pranevich A.F. *On Poisson's theorem of building first integrals for ordinary differential systems* // Russ. J. of Nonlin. Dynamics. 2019. V. 15. № 1. P. 87–96.

6. Горбузов В.Н. *Интегралы дифференциальных систем.* Гродно: ГрГУ, 2006.

7. Горбузов В.Н., Павлючик П.Б., Проневич А.Ф. *Комплекснозначные полиномиальные частные интегралы неавтономных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем* // Весн Гродз. дзярж. ўн-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. 2021. Т. 11. № 1. С. 56–67.

ВОЗБУЖДЕНИЕ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ: РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Савва В.А., Банжак С.

Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь
vadimsavva@yandex.by; bnjk_sary@yahoo.com

Представлен дискретный алгоритм решения системы уравнений

$$-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t} = f_{n+1}e^{-\mathrm{i}\varepsilon_{n+1}t}a_{n+1}(t) + f_n e^{+\mathrm{i}\varepsilon_n t}a_{n-1}(t), \quad a_n(t=0) = \delta_{n,0}, \quad n = 0, 1, \ldots, N, \tag{1}$$

описывающих возбуждение многоуровневых квантовых систем (моделей молекул) [1]. Излучение взаимодействует с N последовательными переходами с энергиями E_0, E_1, $\ldots$, E_N. Решение построено для конкретного простого случая $N = 2$ (трехуровневых систем). Все величины безразмерны: f_1, f_2 – характеризуют дипольное взаимодействие переходов с излучением, ε_1, ε_2 – относительные отстройки частот переходов от частоты излучения, $a_n(t)$ – искомые функции – амплитуды вероятности обнаружить частицу на уровне E_n в момент t. Функции периодичны, их спектры Фурье дискретны.

В качестве исходной структуры задаем дискретную функцию

$$\sigma(x; a, b) = \{\sigma(0), \sigma(1), \sigma(2)\} = \{1-a-b, a, b\}, \quad x = \{0, 1, 2\}, \quad 0 < a < 1, \quad 0 < b \leqslant 1-a. \tag{2}$$

Здесь введены два свободных параметра a, b; если их значения попадают в указанные интервалы, то $\sigma(x)$ удовлетворяет условиям для весовой функции. Построенная с ней система трех дискретных ортогональных нормированных полиномов $\{\hat{p}_n(x)\}_0^2$ имеет вид

$$\hat{p}_0(x) \equiv d_0^{-1}, \quad d_0^2 = 1, \quad \hat{p}_1(x) = d_1^{-1}\{x - (a+2b)\}, \quad d_1^2 = a + 4b - (a+2b)^2,$$

$$\hat{p}_2(x) = d_2^{-1}\{x^2[a + 4b - (a^2 + 2b)^2] - x[(a+8b) - (a+2b)(a+4b)] + 2ab\},$$

$$d_2^2 = 4abc[ab + (a+4b)c], \quad c = 1 - a - b.$$

Как известно, ортогональные полиномы удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению, которое можно записать в виде

$$\bar{f}_{n+1}\hat{p}_{n+1}(x) + \bar{f}_n\hat{p}_{n-1}(x) = [rx + s_n]\hat{p}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \quad \bar{f}_0 = 0, \quad \bar{f}_1 = 1, \quad \bar{f}_3 = 0.$$

Коэффициенты соотношения нетрудно найти по стандартным формулам теории ортогональных полиномов [2]:

$$r = \frac{1}{d_1}, \quad \bar{f}_1 = 1, \quad \bar{f}_2 = \frac{d_2}{d_1^4}, \quad s_0 = -r(a+2b), \quad s_1 = -r\frac{d_1^4 + 2ab}{d_1^2(a + 2b)}, \quad s_2 = -r\frac{d_2^2(a + 2b)}{d_1^4 2ab}. \tag{3}$$

Решение уравнений (1) ищем в виде дискретного преобразования Фурье

$$a_n(t) = e^{\mathrm{i}s_n t}\sum_{x=0}^{2} F_n(x)e^{\mathrm{i}rxt}, \tag{4}$$

где $F_n(x)$ – Фурье образы (спектры) искомых функций $a_n(t)$ – амплитуд вероятности обнаружить квантовую систему на уровне E_n в момент времени t, пока действует излучение. Далее делаем предположение, что спектры Фурье выражаются через построенную систему ортогональных дискретных полиномов $\{\hat{p}_n(x; a, b)\}_0^2$ следующим образом

$$F_n(x) = \sigma(x)\hat{p}_0\hat{p}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \quad x = 0, 1, 2. \tag{5}$$

Справедливость предположения доказываем подстановкой (4), (5) в динамические уравнения (1). Это приводит к соотношению, которое удовлетворяется при

$$f_n = \bar{f}_n, \quad \varepsilon_n = s_n - s_{n-1}, \quad n = 1, 2. \tag{6}$$

Взаимно-однозначное соответствие (6) устанавливает связь между коэффициентами уравнений (1) и коэффициентами рекуррентного соотношения построенных полиномов. Другими словами это соответствие между характеристиками квантовых систем и возбуждающего их излучения, с одной стороны, и спектральными свойствами искомых функций $a_n(t)$ – амплитуд вероятности.

Все величины в (4) и (5) известны, что позволяет вычислить Фурье спектры и решение уравнений (1) – амплитуды вероятности $a_n(t)$. Здесь мы приведем экспериментально определяемую величину $\rho_n(t) = a_n^*(t)a_n(t)$ – дискретное статистическое распределение возбуждаемых частиц по энергетическим уровням E_n. Это населенности уровней, зависимые от времени:

$$\begin{gathered}
\rho_0(t) = 1 - 2a(1-a)\{1 - \cos(rt)\} - 2b(1-a-b)\{1 - \cos(2rt)\}, \\
\rho_1(t) = \left(2a(1-a) - \frac{8ab(1-a-b)}{d_1^2}\right)\{1 - \cos(rt)\} + \\
+ \left(2b(1-a-b) + \frac{2ab(1-a-b)}{d_1^2}\right)\{1 - \cos(2rt)\}, \\
\rho_2(t) = \frac{2b(1-a-b)}{d_1^2}\{3 - 4\cos(rt) + \cos(2rt)\}, \\
d_1^2 = a(1 - a) + 4b(1-a-b) = a + 4b - (a + 2b)^2.
\end{gathered}$$

Выражение (6) определяет все коэффициенты уравнений (1), т.е. те квантовые системы, динамику которых описывает построенное решение. Это двухпараметрическое семейство (a, b) моделей частиц с разнообразными дипольными моментами переходов, с различным расположением энергетических уровней, в том числе с неэквидистантным расположением, что характерно для молекул. Эти системы возбуждаются излучением, обладающим разными наборами параметров – несущей частотой и амплитудой.

Отметим, что простая функция $\sigma(x; a, b)$ (2) дискретного аргумента x определяет все остальные структуры, связанные с уравнениями типа (1). Она «порождает» соответствующую систему ортогональных полиномов, построенных в Фурье пространстве функций $a_n(t)$.

Аналогичным образом можно строить решение уравнений типа (1) для систем с большим числом $N > 2$ последовательных переходов, взаимодействующих с излучением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского государственного технологического университета, Минск, Беларусь и Международной школы SABIS, Эрбиль, Ирак.

Литература

1. Shapiro M., Brumer P. *Quantum Control of Molecular Processes.* Wiley, VCH, 2012.

2. Nikiforov A.F., Suslov S.K., Uvarov V.B. *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable.* Berlin; Heidelberg: Springer, 2012.

О СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Цегельник В.В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
tsegvv@bsuir.by

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$p_{1-b} = -p_b + \frac{(p_b' - b)^2}{2p_b^2} + t, \tag{1}$$

$$p_b = -p_{1-b} + \frac{(p_{1-b}' + b - 1)^2}{2p_{1-b}^2} + t \tag{2}$$

с квадратичной нелинейностью производной неизвестных функций p_b, p_{1-b} независимой переменной t и произвольным параметром b.

Пусть $p_b = p(t, b)$, $p_{1-b} = p(t, 1-b)$ – две произвольные функции, удовлетворяющие системе (1), (2) при значении параметра b. Исключая из (1), (2) независимую переменную t, получим условие

$$p_{1-b}(p_b' - b) - \varepsilon p_b(p_{1-b}' + b - 1) = 0, \quad \varepsilon^2 = 1.$$

1. При $\varepsilon = 1$ имеем условие

$$p_{1-b}(p_b' - b) - p_b(p_{1-b}' + b - 1) = 0. \tag{3}$$