6. Скоромник О.В., Шлапаков С.А. *Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией Бесселя–Клиффорда в ядре по пирамидальной области* // Весн. Віцебск. дзярж. ўн-та. 2018. № 2 (99). С. 5–13.

7. Папкович М.В., Скоромник О.В. *Решение одного класса многомерных интегральных уравнений первого рода с функцией Бесселя - Клиффорда в ядре по пирамидальной области* // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. Междунар. науч. конф., Воронеж, 7–9 декабря 2020 г. Воронеж, 2021. С. 172–178.

СОГЛАСОВАНИЕ ГРАНИЧНОГО ДАННОГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ, НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ПРАВОЙ ЧАСТИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМИ СЛАГАЕМЫМИ

Устилко Е.В.[1], **Ломовцев Ф.Е.**[2]

[1] Белорусский государственный технологический университет Минск, Беларусь
ustilko@tut.by
[2] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
lomovcev@bsu.by

В первой четверти плоскости ставится характеристическая смешанная задача:

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \dot{G}_\infty = (0,\infty) \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \tag{2}$$

$$[\alpha(t)(\partial_t u(x,t) + a_1\partial_x u(x,t)) + \gamma(t)u(x,t)]|_{x=0} = \mu(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

где коэффициенты α, γ – заданные функции переменной t, исходные данные f, φ, ψ, μ – заданные функции своих переменных x, t и постоянные $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1, b_2 \in (-\infty, \infty)$.

Множество $G_\infty = [0,\infty) \times [0,\infty)$ разбивается критической характеристикой $x = a_1 t$ на два множества

$$G_- = \{(x,t) \in G_\infty : x > a_1 t > 0\} \quad \text{и} \quad G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : 0 \leqslant x \leqslant a_1 t\}.$$

Теорема. *Пусть коэффициенты граничного режима* (3) : α, $\gamma \in C^m(\mathbb{R}_+)$ *и* $\gamma(t) \neq a_1\alpha(t)$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, *и данные задачи:* $f \in C^{m-1}(G_\infty)$, $\varphi \in C^{m+1}(\mathbb{R}_+)$, $\psi \in C^m(\mathbb{R}_+)$, $\mu \in C^m(\mathbb{R}_+)$. *Если существует решение* $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ *задачи* (1)–(3), *то верны условия согласования*

$$\alpha(0)[\psi(0) + a_1\varphi'(0)] + \varphi(0)\gamma(0) = \mu(0), \tag{4}$$

$$\alpha'(0)[\psi(0) + a_1\varphi'(0)] + \varphi(0)\gamma'(0) +$$
$$+\alpha(0)\langle a_2[-B(A\varphi(0) + \psi(0)) + A\varphi'(0) + \psi'(0) + a_1(B^2\varphi(0) - 2B\varphi'(0) + \varphi''(0))] +$$
$$+ f(0,0)\rangle + (A\varphi(0) + \psi(0))(\gamma(0) - b1\alpha(0)) = A\mu(0) + \mu'(0), \tag{5}$$

$$\left\langle \alpha^{(q)}(0)[\psi(0) + a_1\varphi'(0)] + \varphi(0)\gamma^{(q)}(0) \right\rangle + q\left\{ \alpha^{(q-1)}(0)\left\langle a_2[-B(A\varphi(0) + \psi(0)) + A\varphi'(0) + \psi'(0) + \right.\right.$$

$$+a_1(B^2\varphi(0)-2B\varphi'(0)+\varphi''(0))]+f(0,0)\Big\rangle+(\gamma^{(q-1)}(0)-b_1\alpha^{(q-1)}(0))(A\varphi(0)+\psi(0))\Big\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{q}C_q^i\Big\{\alpha^{(q-i)}(0)\Big\langle a_2^i\Big[\sum_{s=0}^{i}C_i^s(-B)^{i-s}\Big(\Big(A-\frac{(i+1)a_1B}{i-s+1}\Big)\varphi^{(s)}(0)+\psi^{(s)}(0)\Big)+a_1\varphi^{(i+1)}(0)\Big]+$$

$$+\sum_{j=0}^{i-1}a_2^j\sum_{p=0}^{j}\sum_{s=0}^{i-j-1}C_j^pC_{i-j-1}^sA^{i-j-s-1}(-B)^{j-p}f^{(p,s)}(0,0)\Big\rangle+(\gamma^{(q-i)}(0)-b_1\alpha^{(q-i)}(0))\times$$

$$\times\Big\langle a_2\frac{a_2^{i-1}-(-a_1)^{i-1}}{a_1+a_2}\Big[\sum_{s=0}^{i-1}C_{i-1}^s(-B)^{i-s-1}\Big(\Big(A-\frac{ia_1B}{i-s}\Big)\varphi^{(s)}(0)+\psi^{(s)}(0)\Big)+a_1\varphi^{(i)}(0)\Big]+$$

$$+\sum_{k=0}^{i-2}\frac{a_2^{k+1}-(-a_1)^{k+1}}{a_1+a_2}\sum_{p=0}^{k}\sum_{s=0}^{i-k-2}C_k^pC_{i-k-2}^sA^{i-k-s-2}(-B)^{k-p}f^{(p,s)}(0,0)+$$

$$+(-a_1)^{i-1}\sum_{s=0}^{i-1}C_{i-1}^s(-B)^{i-s-1}(A\varphi^{(s)}(0)+\psi^{(s)}(0))\Big\rangle\Big\}=\sum_{i=0}^{q}C_q^iA^{q-i}\mu^{(i)}(0),\quad q=2,3,\ldots,m,\tag{6}$$

в которых параметр $m\geqslant 2$ и используются обозначения

$$A=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1+a_2},\quad B=\frac{b_2-b_1}{a_1+a_2},\quad f^{(n,m)}(x,t)=\frac{\partial^{n+m}f(x,t)}{\partial x^n\partial t^m}.$$

Схема доказательства. Смешанная задача (1)–(3) невырожденной заменой неизвестной функции $u(x,t)=e^{Bx-At}\hat{u}(x,t)$ сводится к эквивалентной смешанной задаче:

$$\hat{u}_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)\hat{u}_{xt}(x,t)-a_1a_2\hat{u}_{xx}(x,t)=\hat{f}(x,t),\quad (x,t)\in\dot{G}_\infty=(0,\infty)\times(0,\infty),\tag{7}$$

$$\hat{u}(x,t)|_{t=0}=\hat{\varphi}(x),\quad \partial_t\hat{u}(x,t)|_{t=0}=\hat{\psi}(x),\quad x>0,\tag{8}$$

$$[\alpha(t)(\partial_t\hat{u}(x,t)+a_1\partial_x\hat{u}(x,t))+\hat{\gamma}(t)\hat{u}(x,t)]|_{x=0}=\hat{\mu}(t),\quad t>0,\tag{9}$$

с новым коэффициентом граничного режима и данными новой задачи

$$\hat{\gamma}(t)=\gamma(t)-b_1\alpha(t),\quad \hat{f}(x,t)=e^{At-Bx}f(x,t),\quad \hat{\varphi}(x)=e^{-Bx}\varphi(x),$$
$$\hat{\psi}(x)=e^{-Bx}(A\varphi(x)+\psi(x)),\quad \hat{\mu}(t)=e^{At}\mu(t).\tag{10}$$

Корректность по Адамару задачи (7)–(9) исследована в [1, 2], а формулы условий согласования и достаточные требования гладкости, налагаемые на данные $\hat{f}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\mu}$, выведены в [3]. Таким образом, условия согласования (4)–(6) получены из выведенных ранее условий согласования в [3] с помощью указанной выше замены неизвестной функции. Требования гладкости на исходные данные f, φ, ψ, μ совпадают с требованиями гладкости на $\hat{f}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\mu}$.

Замечания. 1. Если $\alpha\equiv 0$ и $\gamma(t)\neq 0$ $\forall t\geqslant 0$, то смешанная задача (1)–(3) при характеристической первой косой производной в (3) становится первой смешанной задачей.

2. Если существует такое $\exists t_0\geqslant 0$, что $\alpha(t_0)=0$, то смешанная задача (1)–(3) с нестационарной (зависящей от времени t) характеристической первой косой производной (3) не сводится к смешанной задаче вида (1)–(3) со стационарной (не зависящей от времени t) характеристической первой косой производной вида (3).

3. По способу вывода (из постановки смешанной задачи) условия согласования (4)–(6) при $q \leqslant m$ оказываются необходимыми для корректности по Адамару характеристической смешанной задачи (1)–(3) во множестве решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$. Работы [1, 2] свидетельствуют о том, что для ее корректности по Адамару в пространстве решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ не хватает соответствующего условия согласования типа (6) при $q = m+1$, которое содержит производную по вектору $\vec{\nu}_2 = \{a_2, 1\}$ для нечетных m и критериальное значение суммы частных производных от f по x и t порядка $m-1$ для четных m в начале координат $(0,0)$.

Литература

1. Ломовцев Ф.Е., Устилко Е.В. *Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии* // Весн. Віцебск. дзярж. ўн-та. 2018. № 4 (101). С. 18–28.

2. Ломовцев Ф.Е., Устилко Е.В. *Смешанная задача для одномерного волнового уравнения при характеристической первой косой производной в нестационарном граничном режиме для гладких решений* // Весн. Магілеўск. дзярж. ўн-та імя А.А. Куляшова. Сер. B. Прыродазнаўчыя навукі. 2020. № 2 (56). С. 21–37.

3. Ломовцев Ф.Е., Устилко Е.В. *Условия согласования значений характеристической косой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 1. С. 30–37.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Чеб Е.С., Борисевич Д.В.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
cheb@bsu.by; dashbor00@gmail.com

Рассматривается построение классического решения смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка, оператор которого представляет собой четырехкратную композицию одного и того же оператора первого порядка, с постоянными коэффициентами и четырехкратной характеристикой, и получение достаточных условий гладкости и согласований граничных условий с начальными условиями и уравнением. Доказана теорема существования единственного классического решения этой смешанной задачи.

В области $Q = (0,\infty) \times (0,l) \subset \mathbb{R}^2$, переменных (t,x) рассмотрим относительно функции $u(t,x)$ линейное нестрого гиперболическое неоднородное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами в предположении, что гиперболический оператор уравнения L представим в виде композиции операторов первого порядка

$$Lu \equiv \prod_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t,x) = f(t,x), \quad a > 0, \quad (t,x) \in Q. \tag{1}$$

К уравнению (1) присоединим начальные условия

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad x \in (0,l), \quad j = 0,1,2,3, \tag{2}$$