МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

А.А. Якименко

Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь
yakimenko@belstu.by

Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t), \qquad (1)$$

где $A_i, i = 0, 1, 2$ – постоянные 3×3-матрицы; $h > 0$ — постоянное запаздывание; b — ненулевой 3-вектор. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0, 0, 1]$("$'$"означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^{L} \sum_{j=1}^{M} q'_{ij} x^{(i)}(t - jh) + \int_{-h}^{0} g'(s) x(t+s) ds, \qquad (2)$$

где q_{00}, q_{ij} — 3-векторы; $g'(s)$ — непрерывная 3-вектор-функция; $x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t), (x^{(0)}(t) \equiv x(t))$.

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\det \left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 \right] \equiv \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \tilde{\alpha}_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \qquad (3)$$

где числа $\tilde{\alpha}_{ij}$ вычисляются как функции матриц $A_i, i = 0, 1, 2$, в частности, $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0, \tilde{\alpha}_{30} = 1, \tilde{\alpha}_{33} = \det A_2$.

Определение 1. *Система* (1) *будет модально управляема регулятором вида* (2), *если для любых наперёд заданных чисел* $\alpha_{ij}, i = 0, 1, 2, j = 0, 1, 2, \alpha_{20} = 1, \alpha_{3j}, j = 0, 1, 2$ *найдется регулятор* (2) *такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы* (1), (2) *имеет вид*

$$\det \left[A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 + bU(\lambda) \right] \equiv$$

$$\equiv \left(\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} \right) \times (\alpha_{30} + \alpha_{31} e^{-j\lambda h} + \alpha_{32} \lambda e^{-j\lambda h} + \lambda) = 0.$$

Введем (3×3)-матрицы:

$$\mathcal{A}(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda) = \left[A^2(\lambda)b, A(\lambda)b, b\right], \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим общециклический случай:

$$\det W(\lambda) = c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}), (c \neq 0).$$

Пусть матрица $\mathcal{A}(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2 \lambda e^{-\lambda h} & c(\gamma_0 + \gamma_1 e^{-\lambda h} + \lambda e^{-\lambda h}) & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 1 \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 1 \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Здесь $\beta_i, i = 0, 1, 2, c, \gamma_0$ — некоторые действительные числа; $a_{ij}(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ — квазиполиномы:

$$a_{ij}(\lambda) = a_{ij0} + a_{ij1} e^{-\lambda h} + a_{ij2} \lambda e^{-\lambda h},$$

где $a_{ijk} \in \mathbb{R}; k = 0, 1, 2.$

Рассмотрим уравнение

$$\lambda^2 + (\gamma_1 - \beta_0)\lambda + \beta_1\gamma_0 - \beta_0\gamma_1 \equiv (\lambda - \xi_1)(\lambda - \xi_2) = 0, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}.$$

Пусть выполнено условие $\xi_1 = \xi_2 = \xi$. Рассмотрим величину

$$\delta(\xi) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\xi h} - \xi.$$

Справелива следующая

Теорема 1. *Для того, чтобы система* (1) *была модально управляема регулятором* (2) *в общециклическом случае при кратных корнях, необходимо и достаточно выполнения условия* $\delta(\xi) \neq 0$.