Список использованных источников

1. Шутько, Н. П., Листопад Н. И., Урбанович П. П. Моделирование стеганографической системы в задачах по охране авторских прав // Восьмая Междунар. научно-техн. конф. «Информационные технологии в промышленности» (ITI`2015): тезисы докладов. Минск, ОИПИ НАН Беларуси, 2015. С. 30–31.

2. Савельева М. Г., Урбанович П. П. Метод стеганографического преобразования web-документов на основе растровой графики и модели RGB // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 2 (260). С. 99–107.

УДК 532.516

В.Л. Сенницкий[1,2]
[1]Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
[2]Новосибирский государственный университет
Новосибирск, Россия

ВЫНУЖДЕННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация. *Рассмотрена новая задача о колебаниях гидромеханической системы, состоящей из вязкой жидкости и окружающего ее твердого тела. На систему действует периодически изменяющийся со временем внешний силовой момент. Твердое тело является свободным. Получено решение задачи, пригодное при любом (положительном) значении числа Рейнольдса.*

V.L. Sennitskii[1,2]
[1]Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS
[2]Novosibirsk State University
Novosibirsk, Russia

FORCED ROTATIONAL OSCILLATIONS OF A HYDRO-MECHANICAL SYSTEM

Abstract. *A new problem is considered on the oscillations of a hydro-mechanical system consisting of a viscous liquid and a surrounding it solid body. An external force moment changing in time periodically acts to the system. The solid body is free. The solution is obtained which is valid for any (positive) value of the number of Reynolds.*

1. Данная работа выполнена в развитие исследований, нашедших отражение в [1] (см. также [2, 3]). Изучаемая задача представляет интерес, в частности, в связи со следующим. Колебательное движение практически повсеместно и чрезвычайно разнообразно реализуется в природе и в технике, ввиду чего изучение закономерностей колебательного движения неизменно сохраняет свою актуальность, в частности, в отношении проблем, касающихся экологии, климата, зеленой энергетики. При изучении колебательного движения жидких сред прежде всего представляют интерес поиск, постановка и решение новых актуальных задач о движения вязкой жидкости. Для классических задач гидромеханики характерно то, что те или иные части присутствующей в задаче гидромеханической системы – находящиеся в жидкости тела, стенки сосудов – совершают заданное движение. Задачи, в которых гидромеханическая система является свободной, все части системы являются свободными (движение всех частей системы подлежит определению) к настоящему времени мало изучены. Рассматриваемая задача представляет собой новую задачу о колебательном движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью, в которой все части гидромеханической системы являются свободными.

2. Имеется гидромеханическая система, движение которой подлежит определению. Система состоит из абсолютно твердого тела Ξ и вязкой несжимаемой жидкости. Тело Ξ ограничено двумя сферами радиусов A и A' ($A' > A$) с центрами в точке O – начале инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Масса m тела Ξ распределена сферически-симметрично относительно точки O. Разность $A' - A$ пренебрежимо мала по сравнению с радиусом A, в связи с чем тело Ξ рассматривается, как материальная поверхность (сфера массы m, радиуса A, с центром в точке O). Жидкость заполняет область Q: $0 \le X^2 + Y^2 + Z^2 < A^2$. На тело Ξ, наряду с силами со стороны жидкости, действуют внешние силы. Момент M_{ext} внешних сил относительно оси X периодически с периодом T изменяется со *временем* t. Тело Ξ совершает обусловленные наличием момента M_{ext} вынужденные вращательные колебания вокруг оси X (монотонное вращение тела Ξ вокруг оси X отсутствует).

Требуется определить не зависящее от начальных данных движение гидромеханической системы (тела Ξ и жидкости).

Уравнение движения тела Ξ, уравнение Навье–Стокса, уравнение неразрывности и условия на твердой границе жидкости имеют вид

$$æ\frac{d\omega}{d\tau} = \varepsilon f + \frac{\mu}{Re}\ ; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{v}; \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{3}$$

$$v_r = 0,\ \ v_\theta = 0,\ \ v_\varphi = \omega\sin\theta \quad \text{при } r = 1. \tag{4}$$

Здесь $\tau = t / T$; r, θ, φ – сферические координаты, связанные с координатами X, Y, Z соотношениями $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\theta\sin\varphi$ ($x = X / A$; $y = Y / A$; $z = Z / A$); $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/A = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ ($\mathbf{V}$ – скорость жидкости; $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ – – единичные базисные векторы системы координат r, θ, φ) ; $p = T^2P/(\rho A^2)$; (P и ρ – давление в жидкости и плотность жидкости); $Re = A^2/(\nu T)$ – число Рейнольдса (ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости); $æ = I/(\rho A^5)$ (I – момент инерции тела Ξ относительно оси X); $\omega = T\Omega$ (Ω – угловая скорость вращения тела Ξ вокруг оси X); $f = \sin 2\pi\tau$; $M_{ext} = \widehat{M}f$ – момент внешних сил, действующих на тело Ξ, относительно оси X ($\widehat{M} > 0$ – постоянная); $\varepsilon = \widehat{M}T^2/(\rho A^5)$;

$$\mu = \frac{Re\,T^2}{\rho A^5}M_{liq} = -2\pi\int_0^\pi\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right)_{|r=1}(\sin\theta)^2\,d\theta$$

(M_{liq} – момент сил, действующих на тело Ξ со стороны жидкости, относительно оси X).

3. Будем рассматривать задачу (1) – (4) при малых по сравнению с единицей значениях ε. Применим метод разложения по степеням малого параметра [4]. Предположим, что

$$\omega \sim \omega_0 + \varepsilon\omega_1,\ \ \mathbf{v} \sim \mathbf{v}_0 + \varepsilon\mathbf{v}_1,\ \ p \sim p_0 + \varepsilon p_1 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{5}$$

Используя (1) – (5) в ε^N – приближении (N = 0, 1) получим

$$æ\frac{d\omega_N}{d\tau} = Nf + \frac{\mu_N}{Re}\ ; \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_N}{\partial \tau} + (1 - N)\,(\mathbf{v_0}\cdot\nabla)\mathbf{v_0} = -\nabla p_N + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{v}_N\ ; \tag{7}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}_N = 0; \tag{8}$$

$$v_{Nr} = 0, \quad v_{N\theta} = 0, \quad v_{N\varphi} = \omega_N \sin\theta \quad \text{при} \quad r = 1, \tag{9}$$

где

$$\mu_N = -2\pi \int_0^\pi \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_{N\varphi}}{r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_{Nr}}{\partial\varphi}\right)_{|r=1} (\sin\theta)^2\, d\theta;$$

$$v_{Nr} = \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{e}_r\,; \quad v_{N\theta} = \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{e}_\theta\,; \quad v_{N\varphi} = \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{e}_\varphi\,.$$

Пусть N = 0. Задача (6) – (9) имеет решение

$$\omega_0 = 0, \quad \mathbf{v}_0 = 0, \quad p_0 = p_0(\tau). \tag{10}$$

Пусть N = 1. Задача (6) – (9) имеет решение

$$\omega_1 = \mathrm{Real}\left(\widehat{\omega}\, e^{2\pi i\tau}\right), \quad \mathbf{v}_1 = \mathrm{Real}\left[v(r,\theta)\, e^{2\pi i\tau}\right]\mathbf{e}_\varphi\,, \quad p_1 = p_1(\tau), \tag{11}$$

где

$$\widehat{\omega} = -\frac{i}{2\pi i æ + \Phi}\,; \qquad v = \widehat{\omega}\,\frac{I_{3/2}(qr)}{I_{3/2}(q)\, r^{1/2}}\sin\theta \tag{12}$$

($\Phi = \dfrac{8\pi}{3Re}\dfrac{qI_{1/2}(q) - 3I_{3/2}(q)}{I_{3/2}(q)}$; $q = (1+i)\sqrt{\pi Re}$; $I_{1/2}$, $I_{3/2}$ – – модифицированные функции Бесселя). Отметим, что ввиду наличия соотношения

$$I_{3/2}(q) = e^{-i\frac{3\pi}{4}} J_{3/2}(q)$$

($J_{3/2}$ – функция Бесселя), согласно теореме Ломмеля [5]

$$I_{3/2}(q) \neq 0$$

для любого положительного значения Re.

Формулами

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1\,, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon\mathbf{v}_1\,, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 \tag{13}$$

и (10)–(12) определяется приближенное решение задачи (1) – (4).

4. Остановимся на вопросе о движении тела Ξ при малых и больших (по сравнению с единицей) значениях числа Рейнольдса.

Предварительно отметим следующее.

1. Пусть область Q заполнена не жидкостью, а однородным твердым телом Ξ' (шаром радиуса A с центром в точке O) плотностью ρ, и тела Ξ, Ξ' колеблются как одно твердое тело. Тогда движение системы (тела Ξ и тела Ξ') определяется уравнением

$$(I + I')\frac{d\Omega}{dt} = M_{ext}\,. \tag{14}$$

Здесь $I' = (8\pi / 15)\rho A^5$ – момент инерции тела Ξ' относительно оси X. Из (14) следует

$$\Omega = \eta_1 , \tag{15}$$

где

$$\eta_1 = \frac{T}{2\pi(I + I')} \widehat{M} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) .$$

2. Пусть в области Q отсутствует какая-либо материальная среда. Тогда движение системы (тела Ξ) определяется уравнением

$$I \frac{d\Omega}{dt} = M_{ext} . \tag{16}$$

Из (16) следует

$$\Omega = \eta_2, \tag{17}$$

где

$$\eta_2 = \frac{T}{2\pi I} \widehat{M} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) .$$

Отметим, что «твердотельные» колебания η_1, η_2 имеют сдвиг по времени на $-T/4$ по отношению к моменту M_{ext}.

Обратимся к полученному решению задачи (1) – (4). Используя (10) – (13) найдем

$$\omega \sim -\frac{\varepsilon}{2\pi} \mathrm{Real}\left\{\left[1 + \frac{16\pi^2 \, i \, Re}{525(æ + 8\pi/15)}\right] \frac{e^{2\pi i \tau}}{æ + 8\pi/15}\right\} \text{ при } Re \to 0; \tag{18}$$

$$\omega \sim -\frac{\varepsilon}{2\pi æ} \mathrm{Real}\left\{\left[1 - \frac{4\sqrt{\pi}\,(1-i)}{3æ\sqrt{Re}}\right] e^{2\pi i \tau}\right\} \text{ при } Re \to \infty. \tag{19}$$

Из (18), (19) следуют приближенные формулы

$$\Omega = \eta_1 + \xi_1 = \eta_1 + \frac{I' T Re}{35(I + I')^2} \widehat{M} \sin\frac{2\pi t}{T} \tag{20}$$

– для малых значений Re;

$$\Omega = \eta_2 + \xi_2 = \eta_2 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho A^5 T}{I^2 \sqrt{Re}} \widehat{M} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{7\pi}{4}\right) \tag{21}$$

– для больших значений Re.

Согласно (20), (21) и при малых, и при больших значениях Re угловая скорость Ω представляет собой сумму «больших» колебаний (которые совпадают с «твердотельными» колебаниями (15), (17) и «малых» колебаний ξ_1, ξ_2.

5. Проведенное рассмотрение позволило определить движение гидромеханической системы с вязкой жидкостью, установить, каковы отклики системы на оказываемые на нее периодические по времени воздействия и, в частности, обнаружить, что при малых и больших (по сравнению с единицей) значениях числа Рейнольдса присутствие в системе вязкой жидкости проявляется в наличии «малых» колебаний угловой скорости окружающего жидкость твердого тела. Формулами (20), (21) демонстрируется связь между параметрами гидромеханической системы и являющимися наблюдаемыми (измеряемыми) «малыми» колебаниями угловой скорости вращения твердого тела.

Наряду с иными возможными приложениями, полученные результаты могут использоваться, в частности, при поиске новых подходов к изучению строения гидромеханических систем.

Список использованных источников

1. Сенницкий В. Л. Ускоренное вращательное движение твердого тела и вязкой жидкости. Международная конференция Минские научные чтения-2021. Передовые технологии и материалы будущего. (Беларусь, Минск, 9 декабря 2021). Сборник статей в 3-х томах. Минск: БГТУ, 2021. 883 с. Т. 2. С. 160–164.
2. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное вращение твёрдого тела и вязкой жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 93–97; DOI 10.17377/sibjim.2017.20.210.
3. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное течение вязкой жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24, № 2. С. 126–133. DOI 10.33048/SIBJIM.2021.24.210.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФ-МЛ, 1958. 409 с.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949. 799 с.

УДК 911.9:332.132:504.38

С.Н. Соколов
Нижневартовский государственный университет
Нижневартовск, Россия

ПРОБЛЕМЫ ИЗМЕНЕНИЯ КЛИМАТА И АДАПТАЦИЯ ОБЩЕСТВА

Аннотация. *Рассмотрены проблемы изменения климата и адаптации общества и страны к ним. Они должны рассматриваться и анализироваться при*