

А. П. Клубков, доцент; А. А. Гришкевич, канд. техн. наук; В. И. Гиль, канд. техн. наук

КОЛЕБАНИЯ ДЕРЕВОРЕЖУЩИХ ИНСТРУМЕНТОВ

Rigid requirements to the equipment bear on the foreground maintenance of necessary durability of elements of tools at simultaneous decrease in expenses of materials and work on their manufacturing. Mechanical fluctuations often lead to breakages of the tool long before the expiration of its working resource (catastrophic deterioration). Having a plenty of standard sizes of the modern tool, a problem of calculations and designing, its basic elements it is possible to generalize.

Введение. Современные требования к оборудованию ставят перед специалистами деревообрабатывающего машиностроения, инструментальной промышленности задачи обеспечения необходимой прочности, жесткости и виброустойчивости элементов дереворежущих инструментов при одновременном снижении затрат материалов и труда на их изготовление.

Инженер-механик должен применять общепринятые инженерные знания для решения конкретных технических задач. Он должен при проектировании систем дереворежущего инструмента не слепо копировать существующие образцы, а осмысленно конструировать, выбирая из многообразия конструктивных решений наиболее целесообразные варианты, соответствующие данным конкретным условиям.

Несмотря на большую дифференцированность современного дереворежущего инструмента, задачи расчетов и конструирования основных режущих узлов и деталей могут быть обобщены независимо от их технологического назначения. Это в значительной степени обусловлено унификацией и нормализацией, а также широким применением стандартизированных элементов.

Колебания резцов дереворежущего инструмента. Рассмотрим систему не как ротор с закрепленными резцами, а отдельный резец, жестко закрепленный в роторе (например, в сборной фрезе).

Колебательным процессом, или просто колебаниями, называют процесс, при котором характеризующей его физической величине свойственны переходы от возрастания к убыванию, чередующиеся с переходами от убывания к возрастанию. Если колебания представляют собой механическое движение – перемещение какого-нибудь тела, то происходит механический колебательный процесс.

Механические колебания с малыми амплитудами называют вибрациями. Механические колебания возбуждаются в узлах резания различными периодически или внезапно приложенными силами.

Неуравновешенность жесткого ротора бывает статическая, моментная, динамическая или квазистатическая.

При вращении неуравновешенного ротора с постоянной угловой скоростью ω в каждом поперечном сечении массой m , возникает центробежная сила

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{l}_i \cdot \omega^2. \quad (1)$$

Рассматриваемой массой может являться масса ротора или любая другая локально расположенная масса m , находящаяся на расстоянии \vec{r} от оси вращения.

Все роторы с равными произведениями $m_i \cdot l_i$ (или $m \cdot r$) при одинаковой угловой скорости вращения имеют одинаковую центробежную силу, а выражение

$$mr = D \quad (2)$$

называют дисбалансом. Единицей дисбаланса служит 1 г·мм.

Чаще всего резцы в дереворежущем инструменте имеют форму, показанную на рис. 1.

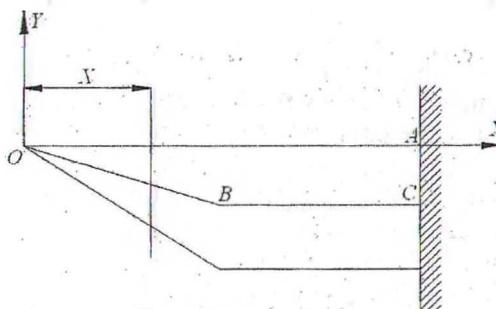


Рис. 1. Форма резца

Их можно рассматривать как балку, зашпеченную одним концом. Обычно расчет балок производится относительно оси балки, то есть линии, соединяющей центр тяжести поперечных сечений. В данном случае такой линией будет ломаная OBC . Производить расчет относительно ломаной оси неудобно. Поэтому в качестве расчетной примем ось OA , совпадающую с верхней гранью резца. Выберем начало координат на кончике резца, ось X совместим с расчетной осью OA . При нагружении расчетная ось OA будет искривляться. Уравнение изогнутой расчетной оси в этом случае будет иметь вид

$$X = \frac{M \times A}{E \times (J \times A - S^2)}, \quad (3)$$

где X – кривизна расчетной оси в сечении на расстоянии X ; A – площадь сечения, проведенного перпендикулярно оси X ; M – изгибающий момент в сечении X ; E – модуль Юнга; J – момент инерции относительно оси Z сечения, проведенного перпендикулярно оси X (рис. 2); S – статический

момент относительно оси Z сечения, проведенного перпендикулярно оси X .

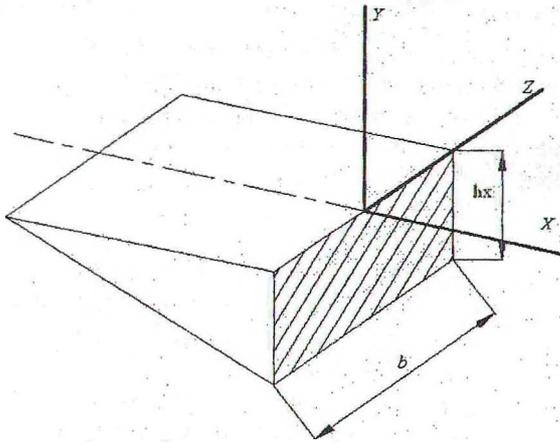


Рис. 2. Схема определения момента инерции

Для прямоугольного сечения

$$s = \int_A y \times dA = b \times \int_{-h_x}^0 y \times dy = -\frac{b \times h_x^2}{2};$$

$$J = \int_A y^2 \times dA = b \times \int_{-h_x}^0 y^2 \times dy = -\frac{b \times h_x^3}{3};$$

$$A = b \times h_x.$$

Если балка состоит из нескольких слоев (рис. 3), уравнение (3) примет вид

$$X = \frac{M \times \sum_{i=1}^n E_i \times A_i}{\sum_{i=1}^n E_i \times A_i \times \sum_{i=1}^n E_i \times J_i - \left(\sum_{i=1}^n E_i \times S_i \right)^2}. \quad (4)$$

где n – число слоев; E_i – модули упругости слоев; S_i , J_i – статические моменты и моменты инерции сечения слоев относительно оси Z ; A_i – площади сечения слоев.

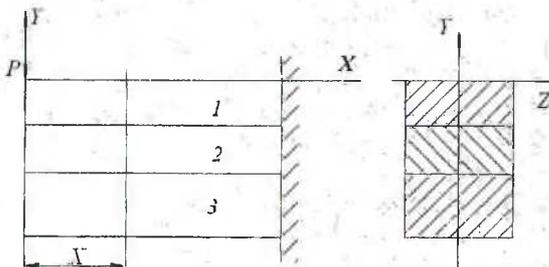


Рис. 3. Многослойная система

Введя обозначение

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n E_i \times A_i \times \sum_{i=1}^n E_i \times J_i - \left(\sum_{i=1}^n E_i \times S_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n E_i \times A_i} \quad (5)$$

и учитывая, что $X \approx \frac{d^2 y}{dx^2}$,

уравнение (4) можно записать следующим образом:

$$B \times \frac{d^2 y}{dx^2} = M. \quad (6)$$

Уравнение (6) является приближенным дифференциальным уравнением изогнутой расчетной оси многослойной балки.

Рассмотрим колебания двухслойного резца (рис. 4).

В любой момент времени грань OA занимает положение, определяемое ординатой y . Согласно принципу Даламбера, выделенный элемент dx должен находиться в равновесии под действием силы инерции dP_H и внутренних сил. При этом

$$dP_H = (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times dx \times \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad (7)$$

где A_1 , A_2 – площади сечения, перпендикулярного оси X , слоев 1 и 2; ρ_1 , ρ_2 – плотности материала слоев 1 и 2.

Запишем уравнение статики:

$$\sum Y = 0; \quad Q - dP_u - \left(Q + \frac{dQ}{dx} dx \right) = 0$$

$$\sum M_{O1} = 0;$$

$$-M - dP_u \times \frac{dx}{2} + \left(M + \frac{dM}{dx} dx \right) - \left(Q + \frac{dQ}{dx} dx \right) \times dx = 0.$$

После преобразований, пренебрегая малыми величинами второго порядка, получим

$$\frac{dQ}{dx} dx + \frac{dP_u}{dx} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) продифференцируем по X :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{dQ}{dx} = 0. \quad (10)$$

Из уравнения (8) $\frac{dQ}{dx} = -\frac{dP_u}{dx}$ подставим в уравнение (10):

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{dP_u}{dx} = 0.$$

В последнее уравнение подставим значение dP_u согласно (7):

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times \frac{d^2 y}{dt^2} = 0. \quad (11)$$

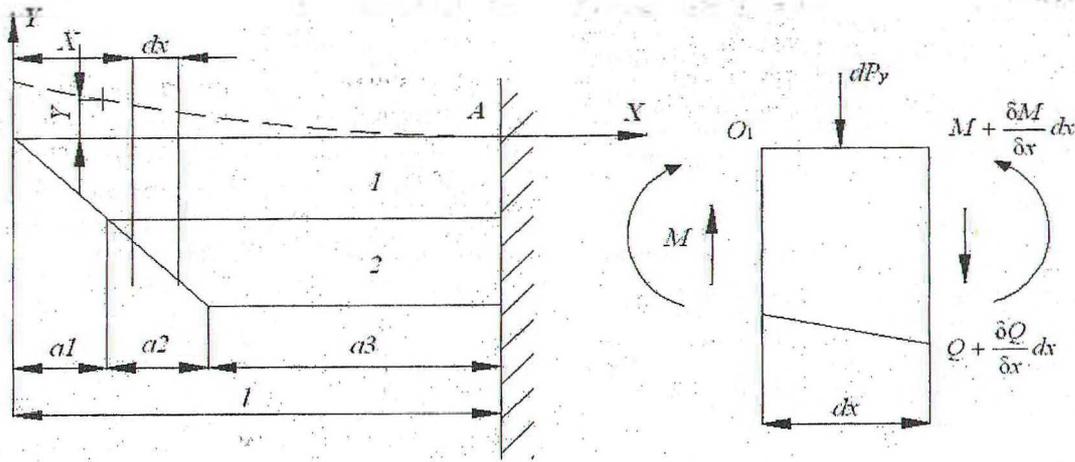


Рис. 4. Схема колебаний двухслойного резца

Продифференцируем уравнение (6) дважды по X и подставим в уравнение (9):

$$\frac{d^2}{dx^2} \times \left(B \times \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times \frac{d^2 y}{dt^2} = 0. \quad (12)$$

Решим это уравнение относительно t :

$$y = V \times \sin(\omega t + \varphi), \quad (13)$$

где V – амплитудное смещение расчетной оси резца в сечении X , которое зависит только от X . Продифференцировав уравнение (13) по t

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + V \times \omega^2 \times \sin(\omega t + \varphi),$$

а затем по X

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 V}{dx^2} \times \sin(\omega t + \varphi),$$

и подставив в (12), получим

$$\frac{d^2}{dx^2} \times \left(B \times \frac{d^2 V}{dx^2} \right) - (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times \omega^2 V = 0. \quad (14)$$

Величина B характеризует жесткость сечения резца и является функцией X . Для двухслойного резца, показанного на рис. 4, жесткость сечений на участках a_1, a_2, a_3 будет выражаться различными функциями

$$B_1 = f_1(x), \quad B_2 = f_2(x), \quad B_3 = f_3(x).$$

Следовательно, для каждого участка дифференциальное уравнение (14) необходимо записать отдельно. Постоянные интегрирования этих уравнений будут определяться из граничных условий в целом для резца и из условий на границах участков. На границе первого и второго участков

$$V_1 = V_2; \quad \frac{dV_1}{dx_1} = \frac{dV_2}{dx_2}; \quad B_1 \times \frac{d^2 V_1}{dx_1^2} = B_2 \times \frac{d^2 V_2}{dx_2^2};$$

$$B_1 \times \frac{d^3 V_1}{dx_1^3} = B_2 \times \frac{d^3 V_2}{dx_2^3}.$$

Аналогичные условия будут на границе второго и третьего участков. В целом для резца при $X=0$

$$B_1 \times \frac{d^2 V_1}{dx_1^2} = 0; \quad B_1 \times \frac{d^3 V_1}{dx_1^3} = 0,$$

$$V_3 = 0; \quad \frac{dV_3}{dx_3} = 0 \quad \text{при } x = l.$$

Решение этой системы трех дифференциальных уравнений довольно затруднено, поэтому более эффективным в данном случае будет какой-либо из приближенных методов. Примем метод последовательных приближений с использованием формулы Рэлея и численного интегрирования.

Полное смещение любой точки резца зависит от времени по формуле (13). Скорость точек резца будет равна

$$\frac{dy}{dt} = V \times \omega \times \cos(\omega t + \varphi).$$

В момент прохождения всеми точками положения равновесия величина обращается в нуль, а скорость dy/dt достигает максимального значения

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)_{\max} = V \times \omega.$$

Соответственно наибольшего значения достигает и кинетическая энергия

$$K = \int_l \frac{dm \times \left(\frac{dy}{dt} \right)_{\max}^2}{2}.$$

Учитывая, что элементарная масса равна

$$dm = (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times dx,$$

получим

$$K = \frac{1}{2} \int_l (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times V^2 \times \omega^2 \times dx. \quad (15)$$

Упругая потенциальная энергия при этом равна нулю. В момент максимального отклонения точек реза от положения равновесия $y_{\max} = V$ кинетическая энергия обращается в нуль, а потенциальная достигает наибольшего значения

$$U = \int_l \frac{q_x \times V \times dx}{2}, \quad (16)$$

где q_x – интенсивность распределенной нагрузки, приложенной к резу.

В случае свободных колебаний интенсивность распределенной нагрузки определяется инерционными силами и равна

$$q_x = -m \times a,$$

где m – масса единицы длины реза; a – ускорение.

Ускорение точек будет равно

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2} = -V \times w^2 \times \sin(w \times t + \varphi).$$

При максимальном отклонении точек от положения равновесия

$$\sin(w \times t + \varphi) = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} q_x &= m \times V \times w^2 = \\ &= (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times V \times w^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Из условия сохранения энергии можно записать

$$K = U$$

или

$$\begin{aligned} \frac{w^2}{2} \times \int_l (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times V^2 \times dx &= \frac{1}{2} \times \\ &\times \int_l q_x \times V \times dx, \end{aligned}$$

откуда

$$w = \sqrt{\frac{\int_l q_x \times V \times dx}{\int_l (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times V^2 \times dx}}. \quad (18)$$

Таким образом, мы получили формулу Рэлея для определения частоты колебаний двухслойного реза. Далее вычисления производятся в следующем порядке. Задаются приближенно формой изогнутой оси $V_0 = V_0(x)$. Принимают какое-либо значение частоты w_0 . По формуле (17) определяют интенсивность нагрузки q_x^0 .

$$q_x^0 = (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times V_0(x) \times w_0^2. \quad (19)$$

Затем обращаются к уравнению (14), переписав его таким образом:

$$\frac{d^2}{dx^2} \times \left(B \times \frac{d^2 V}{dx^2} \right) = q_x. \quad (20)$$

В уравнение (20) вместо q_x подставляют q_x^0 , интегрируют численным методом и находят первое приближение для прогибов $V_1(x)$. Определяют по формуле (18) первое приближение частоты w_1 , подставив вместо q_x значение q_x^0 , вместо V значение $V_1(x)$.

$$w = \sqrt{\frac{\int_l q_x \times V_1(x) \times dx}{\int_l (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times (V_1(x))^2 \times dx}}. \quad (21)$$

Подставляя в формулу (21) значение q_x^0 согласно (19), получим

$$w_1 = w_0 \times \sqrt{\frac{\int_l (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times V_0(x) \times V_1(x) \times dx}{\int_l (A_1 \times \rho_1 + A_2 \times \rho_2) \times (V_1(x))^2 \times dx}}.$$

Сравнивают частоты w_1 и w_0 , и если отличие большое, то расчеты повторяют, приняв за исходную форму упругой линии $V_1(x)$. Рассмотрим более детально численное интегрирование уравнения (20).

Первый интеграл дает поперечную силу

$$\frac{d}{dx} \times \left(B \times \frac{d^2 V}{dx^2} \right) = Q_{(x)} = \int_0^x q_x \times dx. \quad (22)$$

Произвольная постоянная в этом случае равна нулю, так как на свободном конце бруса при $X = 0$ и $Q = 0$.

Второй интеграл дает изгибающий момент

$$B \times \frac{d^2 V}{dx^2} = M_{(x)} = \int_0^x Q_{(x)} \times dx. \quad (23)$$

Здесь тоже постоянная интегрирования равна нулю, так как на конце реза при $X = 0$ и $M = 0$. Далее, чтобы постоянные интегрирования были равны нулю, необходимо интегрировать от X до $X = l$, так как при $X = l$ (в заделке) $dU/dx = 0$ и $V = 0$.

Тогда

$$Q_{(x)} = \frac{dV}{dx} = - \int_x^l \frac{M_{(x)}}{B} \times dx; \quad (24)$$

$$V_{(x)} = - \int_x^l Q_{(x)} \times dx. \quad (25)$$

Вычисление интегралов целесообразно проводить по формуле трапеций, разделив резец на некоторое число участков равной длины.

Заключение. Предложенная методика описывает процесс колебаний с малыми амплитудами резцов дереворежущего инструмента (паяных твердым сплавом резцов) и может быть использована для расчета дереворежущего инструмента при его проектировании.