

С. С. Макаревич, профессор; А. И. Стоцкий, ассистент

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ДИСКОВОЙ ПИЛЕ,  
НАСАЖЕННОЙ НА ВАЛ ПОД УГЛОМ К ПЛОСКОСТИ ПРОПИЛА**

Determination of the voltages in disc saw, pinned on gross under a comer to planes has drunk away.

Для того чтобы не делать в пиле развод зубьев, пилу устанавливают под некоторым малым углом к плоскости пропила (рис. 1). У оси  $X$  этот угол будет иметь наибольшее значение  $\alpha$ , а к оси  $Y$  будет уменьшаться и у самой оси  $Y$  будет равен нулю.

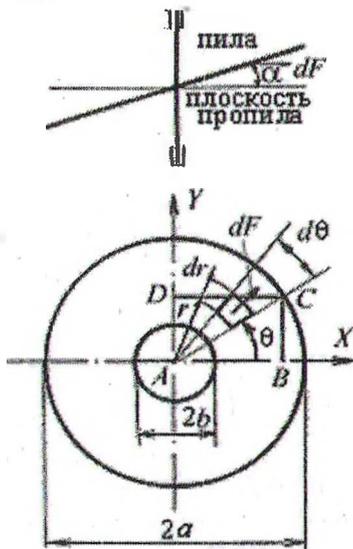


Рис. 1. Пила, установленная под углом к плоскости пропила

Найдем зависимость между углом  $\theta$ , отсчитываемым против часовой стрелки от оси  $X$ , и углом наклона пилы к плоскости пропила. Выделим на плоскости пилы некоторый прямоугольник  $ABCD$  (рис. 1). Спроектировав этот прямоугольник на плоскость пропила (рис. 2), получим прямоугольник  $AB_1C_1D$ .

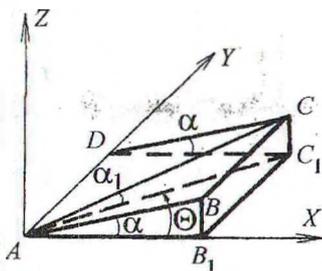


Рис. 2. Проекция выделенного прямоугольника на плоскость пропила

Из рис. 2 видно, что  $\angle BAV_1 = \angle CDC_1 = \alpha$  и  $\angle B_1AC_1 = \theta$ .

Обозначим  $\angle SAC_1 = \alpha_1$ . Тогда можно записать, что  $BB_1 = AB_1 \text{tg} \alpha$ ;  $CC_1 = AC_1 \text{tg} \alpha_1$ . Но  $BB_1 = CC_1$ .

Следовательно,  $AB_1 \text{tg} \alpha = AC_1 \text{tg} \alpha_1$ . Из последнего выражения

$$\text{tg} \alpha_1 = \frac{AB_1}{AC_1} \text{tg} \alpha = \text{tg} \alpha \cos \theta. \tag{1}$$

Так определится угол между радиусом, проведенным в пиле, и радиусом в плоскости пропила, отстоящим от оси  $X$  под углом  $\theta$ .

Если угол  $\alpha$  малый, то  $\text{tg} \alpha \approx \alpha$ ,  $\text{tg} \alpha_1 = \alpha_1$ . Тогда

$$\alpha_1 = \alpha \cos \theta. \tag{2}$$

Определим напряжения, возникающие при свободном равномерном вращении диска пилы. Будем считать, что толщина пилы  $h$  постоянная. Выделим элемент двумя радиальными сечениями, расположенными под углом  $d\theta$ , и двумя цилиндрическими сечениями с радиусами  $r$  и  $r + dr$  (рис. 1). Согласно принципу Д'аламбера, на выделанный элемент будет действовать инерционная сила

$$dF = dma = \rho h \omega^2 r^2 \cos^2 \alpha_1 d\theta dr, \tag{3}$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения пилы.

Сила  $dF$  направлена в сторону, противоположную ускорению, т. е. от оси вращения пильного диска.

Разложим силу  $dF$  на составляющую, направленную по радиусу пильного диска  $dF_r$ , и составляющую, перпендикулярную плоскости диска  $dF_n$ :

$$dF_r = dF \cos \alpha_1 = \rho h \omega^2 r^2 \cos^2 \alpha_1 d\theta dr; \tag{4}$$

$$dF_n = dF \sin \alpha_1 = \rho h \omega^2 r^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 d\theta dr. \tag{5}$$

Определим напряжения в пильном диске от радиальных сил инерции  $dF_r$ . Обозначим через  $u$  радиальное перемещение, т. е. перемещение точек диска по радиусу.

Тогда [1]

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_t = \frac{u}{r}, \tag{6}$$

где  $\epsilon_r$  – относительная деформация в радиальном направлении;  $\epsilon_t$  – относительная деформация в окружном направлении.

Покажем силы, действующие на элементарный объем, выделенный из пильного диска (рис. 3). Запишем сумму проекций всех сил на направление радиуса и приравняем к нулю:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)hd\theta - \sigma_r rhd\theta - \sigma_r hdrd\theta + dF_r = 0.$$

Подставляя  $dF_r$  согласно (4), после преобразований получим

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_r = -\rho\omega^2 r^2 \cos^2 \alpha_1. \quad (7)$$

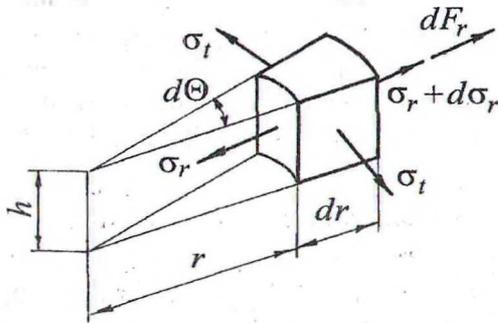


Рис. 3. Силы, действующие на элементарный объем

Согласно закону Гука, напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  с учетом (6) будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $E$  – модуль продольной упругости;  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Подставив (8) в (7), получим

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right] = -\frac{1-\mu^2}{E} \rho\omega^2 r \cos^2 \alpha_1.$$

После двукратного интегрирования будем иметь

$$u = -\frac{1-\mu^2}{E} \rho\omega^2 \frac{r^3}{8} \cos^2 \alpha_1 + C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

Тогда по формулам (8)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ C_1 (1+\mu) - \frac{C_2}{r^2} (1-\mu) \right] - \\ &\quad - \frac{\rho\omega^2}{8} (3+\mu) r^2 \cos^2 \alpha_1, \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ C_1 (1+\mu) + \frac{C_2}{r^2} (1-\mu) \right] - \\ &\quad - \frac{\rho\omega^2}{8} (1+3\mu) r^2 \cos^2 \alpha_1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий:  $\sigma_r = 0$  при  $r = a$ ,  $r = a$  и  $\sigma_r = 0$  при  $r = b$ .

Используя эти условия, получим

$$C_1 = \frac{1-\mu}{E} \frac{\rho\omega^2 a^2}{8} (3+\mu)(1+\beta^2) \cos^2 \alpha_1,$$

$$C_2 = \frac{1+\mu}{E} \frac{\rho\omega^2 a^4}{8} (3+\mu)\beta^2 \cos^2 \alpha_1.$$

После подстановки  $C_1$  и  $C_2$  в уравнения (9) с учетом (2) можно записать окончательные формулы для определения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  от радиальных сил инерции:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\rho\omega^2 a^2}{8} (3+\mu) \left( \beta^2 + 1 - \frac{\beta^2}{\lambda^2} - \lambda^2 \right) \times \\ &\quad \times \cos^2(\alpha \cos \theta), \\ \sigma_t &= \frac{\rho\omega^2 a^2}{8} (3+\mu) \left( \frac{\beta^2 + 1 + \frac{\beta^2}{\lambda^2}}{-\frac{1+3\mu}{3+\mu} \lambda^2} \right) \times \\ &\quad \times \cos^2(\alpha \cos \theta), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\text{где } \lambda = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}.$$

Силы  $dF_n$ , направленные по нормали к диску, будут его изгибать. Величина этих сил, приходящихся на единицу площади, будет равна

$$q = \frac{dF_n}{rd\theta \cdot dr} = \rho \cdot h\omega^2 r \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \frac{\rho \cdot h\omega^2 r}{2} \sin 2\alpha_1.$$

Эти силы будут распределены по диску, как показано на рис. 4. При  $r = a$

$$q_0 = \frac{\rho h\omega^2 a}{2} \sin 2(\alpha \cos \theta).$$

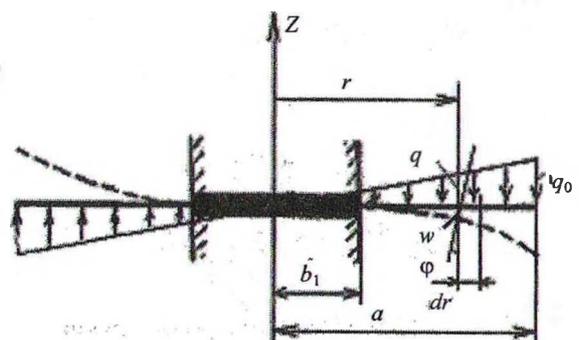


Рис. 4. Распределение нагрузки  $q$  по диску

Пильный диск зажат шайбами с радиусом  $b_1$ . Поэтому его можно рассматривать как кольцевую пластинку, жестко закрепленную по внутреннему контуру и не опертую по наружному. От нагрузки  $q$  пластина испытывает асимметричный изгиб. Следовательно, нормаль к пластине будет поворачиваться в двух плоскостях: в плоскости  $rOZ$  на угол  $\varphi$ , в плоскости  $tOZ$

на угол  $\psi$ , где  $t$  – касательная к окружности в точке с полярным углом  $\theta$ .

Напряжения от нагрузки  $q$  удобно определять через внутренние силовые факторы  $M_r$ ,  $M_t$  и  $M_{rt}$ , т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{12M_r}{h^3} z; \quad \sigma_t = \frac{12M_t}{h^3} z; \\ \tau_{rt} &= \tau_{tr} = \frac{12M_{rt}}{h^3} z, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \right], \\ M_t &= D \left[ \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right], \\ M_{rt} &= M_{tr} = -D(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad w - \text{перемещение по оси } Z.$$

Из условий равновесия

$$Q_r = D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w; \quad Q_\theta = D \frac{\partial}{r \partial \theta} \nabla^2 w,$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  – дифференциальный оператор.

В нашем случае при асимметричной нагрузке перемещение  $w$  можно записать в виде [3]

$$w = \left( C_1 r + C_2 r^3 + C_3 r^{-1} + C_4 r \ln \frac{r}{b_1} \right) \cos \theta. \quad (13)$$

Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  определяются из граничных условий: при  $r = b_1$   $w = 0$ ,  $\varphi = 0$ ; при  $r = a$   $M_r = 0$ ,  $Q_r = 0$ .

После определения  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , переходя к безразмерной переменной  $\lambda = \frac{r}{a}$ , по формулам (12) и (13) получим

$$w = \frac{q_0 a^4}{192D} \left( \lambda^5 + A\lambda + B\lambda^3 + \frac{C}{\lambda} + K\lambda \ln \lambda \right) \cos \theta;$$

$$M_r = \frac{q_0 a^2}{192} \left[ 4(5+\mu)\lambda^3 + 2(3+\mu)B\lambda + +2(1-\mu)C \frac{1}{\lambda^3} + (1+\mu) \frac{K}{\lambda} \right] \cos \theta;$$

$$M_t = \frac{q_0 a^2}{192} \left[ 4(5+\mu)\lambda^3 + 2(1+3\mu)B\lambda - -2(1-\mu)C \frac{1}{\lambda^3} + (1+\mu) \frac{K}{\lambda} \right] \cos \theta;$$

$$M_{rt} = \frac{(1-\mu)q_0 a^2}{192} \times \left( \frac{2C}{\lambda^3} - 4\lambda^3 - 2B\lambda - \frac{K}{\lambda} \right) \sin \theta;$$

$$A = \frac{(24+\mu)\beta_1^2}{2} - 3\beta_1^4 + \frac{0,5 + \ln \beta_1}{(\mu-1)\beta_1 - (1+\mu)} \times$$

$$\times \left[ \frac{32+19\mu+\mu^2}{2} + 4(\mu-1)\beta_1^5 - - \frac{(1-\mu)(24+\mu)\beta_1^3}{2} \right];$$

$$B = -\frac{24+\mu}{4};$$

$$C = \frac{\beta_1}{2[(\mu-1)\beta_1 - (1+\mu)]} \left[ \frac{(1+\mu)(24+\mu)\beta_1^2}{2} - -4(1+\mu)\beta_1^5 - \frac{32+19\mu+\mu^2}{2} \right];$$

$$K = \frac{-1}{(\mu-1)\beta_1 - (1+\mu)} \times$$

$$\times \left[ \frac{32+19\mu+\mu^2}{2} + 4(\mu-1)\beta_1^5 + + \frac{(1-\mu)(24+\mu)\beta_1^3}{2} \right],$$

$$\text{где } \beta_1 = \frac{b_1}{a}.$$

В произвольной точке напряжения, определяемые по формулам (10), от сил инерции, направленных по радиусу, и напряжения, определяемые по формулам (11),  $\vec{E}$  от сил, направленных по нормали к диску, будут складываться. На эти напряжения будут накладываться напряжения от сил резания.

#### Литература

1. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1963. – 540 с.
2. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Расчет пластин. – Киев: Будівельник, 1970. – 436 с.
3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.