

ISSN 2520-6141



# ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал



Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

**№ 2 (236) 2020 год**

**Рубрики номера:**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ  
Математика  
Физика

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ  
Моделирование процессов  
и управление в технических системах  
Обработка и передача информации

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ



Минск 2020

Учреждение образования  
«Белорусский государственный  
технологический университет»

# ТРУДЫ БГТУ

**Научный журнал**

*Издается с июля 1993 года*

**Серия 3**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

**№ 2 (236) 2020 год**

*Выходит два раза в год*

Минск 2020

**Учредитель** – учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

**Главный редактор журнала** – Войтов Игорь Витальевич, доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь

**Редакционная коллегия журнала:**

Дормешкин О. Б., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;  
Жарский И. М., кандидат химических наук, профессор (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;  
Кунтыш В. Б., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Прокопчук Н. Р., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор химических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Водопьянов П. А., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор философских наук, профессор, Республика Беларусь;  
Новикова И. В., доктор экономических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Долгова Т. А., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;  
Торчик В. И., доктор биологических наук, Республика Беларусь;  
Захарук Т., доктор педагогических наук, профессор, Республика Польша;  
Пайвинен Ристо, доктор наук, профессор, Финляндская Республика;  
Барчик Стэфан, доктор наук, профессор, Словацкая Республика;  
Жантасов К. Т., доктор технических наук, профессор, Республика Казахстан;  
Харша Ратнавир, доктор наук, профессор, Королевство Норвегия;  
Рангелова Е. М., доктор педагогических наук, профессор, Республика Болгария;  
Шкляр Бенцион, профессор, Государство Израиль;  
Хассель Л. Г., доктор наук, профессор, Королевство Швеция;  
Файгле В., доктор наук, профессор, Федеративная Республика Германия;  
Флорик Е. А., кандидат биологических наук, доцент (секретарь), Республика Беларусь.

**Редакционная коллегия серии:**

Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор (главный редактор серии), Республика Беларусь;  
Урбанович П. П., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора серии), Республика Беларусь;  
Вихренко В. С., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Колесников В. Л., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Асмыкович И. К., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;  
Калинин А. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Сайко А. П., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;  
Квасов Н. Т., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Минченко Л. И., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;  
Леваков А. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Мазаник С. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Щекин А. К., член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;  
Головко М. Ф., член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, Украина;  
Бартосевич Збигнев, доктор габилитованный, Республика Польша;  
Шкляр Бенцион, профессор, Государство Израиль;  
Аргиракис Панос, доктор наук, профессор, Греческая Республика;  
Орлюкас Антанас Феликсас, доктор наук, Литовская Республика;  
Горецкий Иржи, доктор габилитованный, Республика Польша;  
Соловьева И. Ф., кандидат физико-математических наук, доцент (ответственный секретарь), Республика Беларусь.

**Адрес редакции:** ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.  
Телефоны: главного редактора журнала – (+375 17) 226-14-32;  
главного редактора серии – (+375 17) 399-49-60.  
E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

Свидетельство о государственной регистрации средств массовой информации  
№ 1329 от 23.04.2010, выданное Министерством информации Республики Беларусь.  
*Журнал включен в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований»*

Educational institution  
“Belarusian State Technological University”

# PROCEEDINGS OF BSTU

**Scientific Journal**

*Published monthly since July 1993*

**Issue 3**

**PHYSICS  
AND MATHEMATICS.  
INFORMATICS**

**No. 2 (236) 2020**

*Published biannually*

Minsk 2020

**Publisher** – educational institution “Belarusian State Technological University”

**Editor-in-chief** – Voitau Ihar Vital’evich, DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus

**Editorial (Journal):**

Dormeshkin O. B., DSc (Engineering), Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;  
Zharskiy I. M., PhD (Chemistry), Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;  
Kuntyshev V. B., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;  
Prokopchuk N. R., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Chemistry), Professor, Republic of Belarus;  
Vodop’yanov P. A., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Philosophy), Professor, Republic of Belarus;  
Novikova I. V., DSc (Economics), Professor, Republic of Belarus;  
Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Dolgovala T. A., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;  
Torchik V. I., DSc (Biology), Republic of Belarus;  
Zakharuk T., DSc (Pedagogy), Professor, Republic of Poland;  
Paivinen Risto, DSc, Professor, Republic of Finland;  
Barcik Štefan, DSc, Professor, Slovak Republic;  
Zhantasov K. T., DSc (Engineering), Professor, Republic of Kazakhstan;  
Harsha Ratnaweera, DSc, Professor, Kingdom of Norway;  
Rangelova E. M., DSc (Pedagogy), Professor, Republic of Bulgaria;  
Shklyar Benzion, Professor, State of Israel;  
Hassel L. G., DSc, Professor, Kingdom of Sweden;  
Faigle W., DSc, Professor, Federal Republic of Germany;  
Flyurik E. A., PhD (Biology), Associate Professor (secretary), Republic of Belarus.

**Editorial (Issue):**

Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor (managing editor), Republic of Belarus;  
Urbanovich P. P., DSc (Engineering), Professor, (sub-editor), Republic of Belarus;  
Vikhrenko V. S., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Kolesnikov V. L., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;  
Asmikovich I. K., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;  
Kalinin A. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Sayko A. P., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;  
Kvasov N. T., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Minchenko L. I., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;  
Levakov A. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Mazanik S. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Shchekin A. K., Corresponding Member, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;  
Golovko M. F., Corresponding Member, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Ukraine;  
Bartosevich Zbigniew, DSc, Republic of Poland;  
Shklyar Benzion, Professor, State of Israel;  
Argyris Panos, DSc, Professor, Republic of Greece;  
Orlukas Antanas Feliksas, DSc, Republic of Lithuania;  
Gorezki Irshi, DSc, Republic of Poland;  
Solov’yeva I. F., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor (executive editor), Republic of Belarus.

**Contact:** 13a, Sverdlova str., 220006, Minsk.

Telephones: editor-in-chief (+375 17) 226-14-32;  
managing editor (+375 17) 399-49-60.

E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

---

## МАТЕМАТИКА

---

УДК 517.935.2+519.71

**В. М. Марченко, И. М. Борковская**

Белорусский государственный технологический университет

### **К ВОПРОСУ О СТАБИЛИЗАЦИИ ГИБРИДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ**

В статье рассматриваются некоторые проблемы стабилизации гибридных дифференциально-разностных (ГДР) систем при использовании регуляторов по типу обратной связи. Доказаны необходимые условия стабилизации указанных систем с помощью простейшего регулятора и регулятора с интегральными составляющими типа свертки. Представленные условия стабилизации являются теоретической основой исследования качественных свойств как многомерных, так и скалярных дифференциально-разностных систем. Проведена экспоненциальная оценка роста решений рассматриваемых систем, что является обоснованием возможности применения к ним преобразования Лапласа. Статья является продолжением и обобщением исследования стабилизации гибридных дифференциально-разностных систем, проведенного ранее для скалярного случая.

**Ключевые слова:** дифференциально-разностные системы, оценка роста решений, регуляторы по типу обратной связи, стабилизация.

**V. M. Marchenko, I. M. Borkovskaya**

Belarusian State Technological University

### **ON THE STABILIZATION OF HYBRID DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SYSTEMS**

The article discusses some problems of stabilization of hybrid differential-difference systems by using regulators as feedback. The necessary stabilization conditions for these systems are proved using the simplest regulator and a regulator with integral components such as convolution. The stabilization conditions presented are the theoretical basis for studying the qualitative properties of both multidimensional and scalar differential-difference systems. An exponential growth estimation for the solutions of the systems under consideration is carried out, which is the rationale for the possibility of applying the Laplace transform to them. The article is a continuation and generalization of the stabilization study of hybrid differential-difference systems, carried out earlier for the scalar case.

**Key words:** differential-difference systems, solutions growth estimation, feedback regulators, stabilization.

**Введение.** В настоящей статье рассматриваются некоторые вопросы стабилизации линейных гибридных дифференциально-разностных (ГДР) систем, описывающих процессы, природа которых носит неоднородный характер. Такие системы широко используются в автомобилестроении, авиастроении, робототехнике и других областях. При изучении реальных физических процессов наряду с динамическими (дифференциальными) появляются и алгебраические (функциональные) зависимости, приводящие к гибридным системам.

К качественной теории управления для данных систем относятся такие важные проблемы, как управляемость, наблюдаемость, двойственность и др. В работе [1] представлены некоторые задачи в теории управляемых динамических ГДР-систем. Исследованию разных классов гибридных систем посвящены, в частности, статьи [2–14]. При изучении гибридных систем фундаментальными остаются такие работы, как [15, 16].

Одной из важнейших проблем в теории управления динамических систем является проблема их устойчивости и стабилизации.

Вопросы стабилизации скалярных линейных стационарных гибридных дифференциально-разностных систем рассматривались авторами в работе [17]. Данная статья продолжает и обобщает исследования, проведенные ранее. Получены результаты для многомерного случая, проведена оценка роста решений дифференциально-разностных систем, что является теоретическим обоснованием возможности применения к этим системам преобразования Лапласа.

**Основная часть.** Рассмотрим гибридную дифференциально-разностную систему в симметрической относительно операторов дифференцирования и сдвига форме:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \quad (1)$$

$$x_2(t+h) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t), t \geq 0 \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(\tau) = \psi(\tau), \tau \in [0, h]. \quad (3)$$

Здесь  $x_1(t) \in R^n$ ,  $x_2(kh) \in R^{n_2}$ ,  $u(t) \in R^r$ ,  $h > 0$ ,  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$  — действительные постоянные матрицы соответствующих размеров;  $u = u(\cdot)$  — внешнее (кусочно-непрерывное) воздействие — управление;  $\psi(\cdot)$  — начальная кусочно-непрерывная  $n_2$ -вектор-функция.

Под решением системы (1), (2) будем понимать абсолютно непрерывную  $n_1$ -вектор-функцию  $x_1(\cdot)$  и кусочно-непрерывную  $n_2$ -вектор-функцию  $x_2(\cdot)$ , которые для всех  $t \geq 0$  удовлетворяют уравнению (2) и для почти всех  $t \geq 0$  удовлетворяют уравнению (1). Это решение начальной задачи (1)–(3) для каждого начального значения  $x_{10} \in R^n$  и кусочно-непрерывной  $n_2$ -вектор-функции  $\psi(\cdot)$  существует и единственно. Наряду с системой (1), (2) рассмотрим линейную обратную связь следующих типов:

– в виде простейшего регулятора

$$u(t) = Q_1x_1(t) + Q_2x_2(t), \quad (4)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  — постоянные матрицы. Такой регулятор не выводит замкнутую систему за пределы рассматриваемого класса;

– в виде регулятора с интегральными составляющими типа свертки

$$u(t) = Q_1x_1(t) + Q_2x_2(t) + \int_0^t Q_1(s)x_1(t-s)ds + \int_0^t Q_2(s)x_2(t+h-s)ds, \quad (5)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  — постоянные матрицы,  $Q_1(\cdot)$  и  $Q_2(\cdot)$  — матрицы-функции соответствующих размеров, причем элементы функциональных

матриц  $Q_1(\cdot)$  и  $Q_2(\cdot)$  являются кусочно-непрерывными функциями с конечным носителем  $H > 0$ ,  $Q_1(\cdot) \equiv 0$ ,  $Q_2(\cdot) \equiv 0$  для  $t > H$ .

Как и в работе [17], спектром системы (1), (2) назовем множество всех характеристических значений (основных и присоединенных) с учетом их кратностей, а соответствующие решения — спектральными решениями системы (1), (2). Невозмущенную систему (с выключенным управлением) назовем спектрально устойчивой, если все ее спектральные решения являются асимптотически устойчивыми.

Остается в силе [17] условие спектральной устойчивости невозмущенной системы (1), (2): для спектральной устойчивости невозмущенной системы (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы:

1) все основные собственные значения имели отрицательные действительные части;

2) все присоединенные собственные значения  $\lambda$  лежали в комплексной плоскости внутри единичного диска:  $|\lambda| < 1$ .

При исследовании ГДР-систем приходится применять к таким системам преобразование Лапласа, в связи с чем возникает необходимость в экспоненциальной оценке роста решений этих систем. Положим

$$x_2(t) = x_3(t-h), t \geq 0. \quad (6)$$

Тогда система запишется в виде ГДР-системы запаздывающего типа, более удобной для применения преобразования Лапласа:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_3(t-h) + B_1u(t), \quad (7)$$

$$x_3(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_3(t-h) + B_2u(t), t \geq 0 \quad (8)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10}, x_3(\tau) = \psi(\tau+h), \tau \in [-h, 0]. \quad (9)$$

Пусть  $T_t = \left[ \frac{t}{h} \right]$  — целая часть числа  $\frac{t}{h}$ ,

$\|d\| = \max_{1 \leq i \leq n} |d_i|$  — норма  $n$ -вектора  $d =$

$= [d_1, \dots, d_n]^T \in R^n$ ,  $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  — согласован-

ная с нормой  $\|d\|$  норма  $m \times n$ -матрицы  $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in R^{m \times n}$ , штрих « $\prime$ » означает транспонирование,  $\mathfrak{N} = \max \{ \|A_{11}\|, \|A_{12}\|, \|A_{21}\|, \|A_{22}\|, \|B_1\|, \|B_2\|, \|x_{10}\|, \sup_{\tau \in [0, h]} \|\psi(\tau)\| \}$ .

Предположим, что управление имеет не выше, чем экспоненциальный рост, т. е. существуют такие неотрицательные числа  $K$  и  $\alpha$ , что

$$\|u(t)\| \leq Ke^{\alpha t} \text{ для } t \geq 0. \quad (10)$$

**Утверждение 1.** Выберем число  $\beta > 0$  так, чтобы  $\beta > \alpha$  и  $e^{-\beta h} \kappa < 1$ . Имеет место следующая оценка:

$$\int_0^t e^{-\beta \tau} \|x_3(\tau - h)\| d\tau \leq M + N \int_0^t e^{-\beta \tau} \|x_1(\tau)\| d\tau, t \geq 0,$$

$$M = \frac{N}{\beta} + \frac{K \kappa e^{-\beta h} (K\beta + (\beta - \alpha)\kappa)}{\beta(\beta - \alpha)(1 - \kappa e^{-\beta h})}, N = \frac{\kappa e^{-\beta h}}{1 - \kappa e^{-\beta h}}.$$

**Доказательство.** В силу уравнения (8) для  $t \geq h$  имеем:

$$\begin{aligned} \int_h^t e^{-\beta \tau} \|x_3(\tau - h)\| d\tau &= \left\| \int_h^t e^{-\beta \tau} (A_{21}x_1(\tau - h) + \right. \\ &+ B_2u(\tau - h) + A_2x_3(\tau - h - h)) d\tau \Big\| \leq \\ &\leq \|A_{21}\| \int_h^t e^{-\beta \tau} \|x_1(\tau - h)\| d\tau + \\ &+ \|B_2\| \int_h^t e^{-\beta \tau} \|u(\tau - h)\| d\tau + \\ &+ \|A_{22}\| \int_h^t e^{-\beta \tau} \|x_3(\tau - 2h)\| d\tau \leq \dots \\ &\leq \|A_{21}\| \int_h^t e^{-\beta \tau} (\|x_1(\tau - h)\| + \|A_{22}\| \|x_1(\tau - 2h)\| + \dots + \\ &+ \|A_{22}\|^{T_\tau - 1} \|x_1(\tau - T_\tau h)\|) d\tau + \|B_2\| \int_h^t e^{-\beta \tau} (\|u(\tau - h)\| + \\ &+ \|A_{22}\| \|u(\tau - 2h)\| + \dots + \|A_{22}\|^{T_\tau - 1} \|u(\tau - T_\tau h)\|) d\tau + \\ &+ \int_h^t e^{-\beta \tau} \|A_{22}\|^{T_\tau} \|\psi(\tau - T_\tau h)\| d\tau \leq \int_h^t e^{-\beta \tau} (\kappa \|x_1(\tau - h)\| + \\ &+ \kappa^2 \|x_1(\tau - 2h)\| + \dots + \kappa^{T_\tau} \|x_1(\tau - T_\tau h)\|) d\tau + \\ &+ \int_h^t e^{-\beta \tau} (\kappa Ke^{\alpha(\tau - h)} + \kappa^2 Ke^{\alpha(\tau - 2h)} + \dots + \\ &+ \kappa^{T_\tau} Ke^{\alpha(\tau - T_\tau h)}) d\tau + \\ &+ \int_h^t e^{-\beta \tau} \kappa^{T_\tau} \kappa d\tau \leq \kappa e^{-\beta h} \int_0^{t-h} e^{-\beta \gamma} \|x_1(\gamma)\| d\gamma + \kappa^2 e^{-2\beta h} \times \\ &\times \int_0^{t-2h} e^{-\beta \gamma} \|x_1(\gamma)\| d\gamma + \dots + \kappa^{T_\tau} e^{-\beta T_\tau h} \int_0^{t-T_\tau h} e^{-\beta \gamma} \|x_1(\gamma)\| d\gamma + \\ &+ K \kappa e^{-\beta h} \int_0^{t-h} e^{-(\beta - \alpha)\gamma} d\gamma + K \kappa^2 e^{-2\beta h} \int_0^{t-2h} e^{-(\beta - \alpha)\gamma} d\gamma + \dots + \\ &+ K \kappa^{T_\tau} e^{-\beta T_\tau h} \int_0^{t-T_\tau h} e^{-(\beta - \alpha)\gamma} d\gamma + \kappa^2 \int_h^{2h} e^{-\beta \tau} d\tau + \kappa^3 \int_{2h}^{3h} e^{-\beta \tau} d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \kappa^{T_\tau} \int_{T_\tau h - h}^{T_\tau h} e^{-\beta \tau} d\tau + \kappa^{T_\tau + 1} \int_{T_\tau h}^t e^{-\beta \tau} d\tau = \oplus.$$

Расширяя при необходимости промежутки интегрирования и суммирования, с учетом формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии получаем:

$$\begin{aligned} \oplus &\leq (\kappa e^{-\beta h} + \kappa^2 e^{-2\beta h} + \dots + \kappa^{T_\tau} e^{-\beta T_\tau h} + \dots) \times \\ &\times \int_0^{t-h} e^{-\beta \gamma} \|x_1(\gamma)\| d\gamma + K (\kappa e^{-\beta h} + \kappa^2 e^{-2\beta h} + \dots + \kappa^{T_\tau} e^{-\beta T_\tau h} + \dots) \times \\ &\times \int_0^{t-h} e^{-(\beta - \alpha)\gamma} d\gamma + \frac{\kappa^2 e^{-\beta h}}{\beta} + \frac{\kappa^3 e^{-2\beta h}}{\beta} + \dots + \frac{\kappa^{T_\tau + 1} e^{-\beta T_\tau h}}{\beta} \leq \\ &\leq \frac{\kappa e^{-\beta h}}{1 - \kappa e^{-\beta h}} \int_0^{t-h} e^{-\beta \gamma} \|x_1(\gamma)\| d\gamma + \frac{K \kappa e^{-\beta h}}{(\beta - \alpha)(1 - \kappa e^{-\beta h})} + \\ &+ \frac{\kappa^2 e^{-\beta h}}{\beta(1 - \kappa e^{-\beta h})} = \frac{\kappa e^{-\beta h} (K\beta + (\beta - \alpha)\kappa)}{\beta(\beta - \alpha)(1 - \kappa e^{-\beta h})} + \\ &+ \frac{\kappa e^{-\beta h}}{1 - \kappa e^{-\beta h}} \int_0^{t-h} e^{-\beta \tau} \|x_1(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\beta \tau} \|x_3(\tau - h)\| d\tau &\leq \int_0^h e^{-\beta \tau} \|x_3(\tau - h)\| d\tau + \\ &+ \int_h^t e^{-\beta \tau} \|x_3(\tau - h)\| d\tau \leq \int_0^h e^{-\beta \tau} \|\psi(\tau)\| d\tau + \\ &+ \frac{\kappa e^{-\beta h} (K\beta + (\beta - \alpha)\kappa)}{\beta(\beta - \alpha)(1 - \kappa e^{-\beta h})} + \frac{\kappa e^{-\beta h}}{1 - \kappa e^{-\beta h}} \times \\ &\times \int_0^{t-h} e^{-\beta \tau} \|x_1(\tau)\| d\tau = \frac{N}{\beta} + \frac{\kappa e^{-\beta h} (K\beta + (\beta - \alpha)\kappa)}{\beta(\beta - \alpha)(1 - \kappa e^{-\beta h})} + \\ &+ \frac{\kappa e^{-\beta h}}{1 - \kappa e^{-\beta h}} \int_0^{t-h} e^{-\beta \tau} \|x_1(\tau)\| d\tau \leq M + N \int_0^t e^{-\beta \tau} \|x_1(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

**Лемма.** Пусть неотрицательные функции  $v(\cdot), p(\cdot)$  удовлетворяют соотношению

$$V(t) \leq c + \int_a^t p(\tau) V(\tau) d\tau \text{ для } t > 0, \text{ где } c \in R, c \geq 0.$$

Тогда имеет место неравенство

$$V(t) \leq ce^a \text{ при } t > 0.$$

**Теорема 1.** Для каждого решения  $x_1(\cdot), x_3(\cdot)$  системы (7), (8), порожденного начальными данными (9) и кусочно-непрерывным управлением,

имеющим не выше, чем экспоненциальный рост (10), найдутся такие положительные числа  $L$  и  $\mu$ , что

$$\|x_1(t)\| \leq L e^{\mu t}, \quad \|x_3(t)\| \leq L e^{\mu t}. \quad (11)$$

**Доказательство.**

$$\frac{d}{d\tau} (e^{-\beta\tau} x_1(\tau)) = -\beta e^{-\beta\tau} x_1(\tau) + e^{-\beta\tau} \dot{x}_1(\tau) = -\beta e^{-\beta\tau} \times \\ \times x_1(\tau) + e^{-\beta\tau} (A_{11} x_1(\tau) + A_{12} x_3(\tau - h) + B_1 u(\tau)),$$

откуда, интегрируя от 0 до  $t$  и оценивая по норме, с учетом неравенства (10) и утверждения 1 получаем:

$$e^{-\beta t} \|x_1(t)\| \leq \|x_{10}\| + \beta \int_0^t e^{-\beta\tau} \|x_1(\tau)\| d\tau + \\ + \|A_{11}\| \int_0^t e^{-\beta\tau} \|x_1(\tau)\| d\tau + \|B_1\| \int_0^t e^{-\beta\tau} \|u(\tau)\| d\tau + \|A_{12}\| \times \\ \times \int_0^t e^{-\beta\tau} \|x_3(\tau - h)\| d\tau \leq \aleph + (\beta + \aleph) \int_0^t e^{-\beta\tau} \|x_1(\tau)\| d\tau + \\ + K \aleph \int_0^t e^{-(\beta-\alpha)\tau} d\tau + \aleph M + \aleph N \int_0^t e^{-\beta\tau} \|x_1(\tau)\| d\tau \leq \\ \leq \aleph + \aleph M + \frac{K \aleph}{\beta - \alpha} + (\beta + \aleph + \aleph N) \int_0^t e^{-\beta\tau} \|x_1(\tau)\| d\tau.$$

Тогда в силу леммы

$$e^{-\beta t} \|x_1(t)\| \leq \aleph \left( 1 + M + \frac{K}{\beta - \alpha} \right) e^{\int_0^t (\beta + \aleph + \aleph N) d\tau},$$

откуда  $\|x_1(t)\| \leq L_1 e^{\mu_1 t}$ , и первое из неравенств (11) выполняется при

$$L = L_1 = \aleph + \aleph M + \frac{K \aleph}{\beta - \alpha}, \quad \mu = \mu_1 = 2\beta + \aleph + \aleph N.$$

Докажем справедливость второго неравенства в (11).

Выберем положительное число  $m$  так, чтобы  $m > \max\{1, \mu_1, \alpha\}$ ,  $\aleph e^{-(m-\mu_1)h} < 1$ ,  $\aleph e^{-(m-\alpha)h} < 1$ .

Умножая (8) на  $e^{-m t}$  и оценивая по норме, с учетом выражения для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии получаем:

$$e^{-m t} \|x_3(t)\| \leq e^{-m t} (\|A_{21}\| \|x_1(t)\| + \|A_{22}\| \|x_3(t-h)\| + \\ + \|B_2\| \|u(t)\|) \leq e^{-m t} \|A_{21}\| (\|x_1(t)\| + \|A_{22}\| \|x_1(t-h)\|) + \dots + \\ + \|A_{22}\|^{T_i} \|x_1(t-T_i h)\| + e^{-m t} \|B_2\| (\|u(t)\| + \\ + \|A_{22}\| \|u(t-h)\| + \dots + \|A_{22}\|^{T_i} \|u(t-T_i h)\|) + \\ + e^{-m t} \|A_{22}\|^{T_i+1} \|\Psi(t-T_i h)\| \leq \aleph L_1 (e^{-(m-\mu_1)t} +$$

$$+ \aleph e^{-(m-\mu_1)h} e^{-(m-\mu_1)(t-h)} + \dots + \\ + \aleph^{T_i} e^{-(m-\mu_1)T_i h} e^{-(m-\mu_1)(t-T_i h)}) + \\ + \aleph K (e^{-(m-\alpha)t} + \aleph e^{-(m-\alpha)h} e^{-(m-\alpha)(t-h)} + \dots + \\ + \aleph^{T_i} e^{-(m-\alpha)T_i h} e^{-(m-\alpha)(t-T_i h)}) + \aleph^2 (\aleph e^{-mh})^{T_i} \times \\ \times e^{-m(t-T_i h)} \leq \aleph L_1 (1 + \aleph e^{-(m-\mu_1)h} \cdot 1 + \dots + \\ + (\aleph e^{-(m-\mu_1)h})^{T_i} \cdot 1) + \\ + \aleph K (1 + \aleph e^{-(m-\alpha)h} \cdot 1 + \dots + (\aleph e^{-(m-\alpha)h})^{T_i} \cdot 1) + \\ + \aleph^2 \cdot 1 \cdot 1 \leq \frac{\aleph L_1}{1 - \aleph e^{-(m-\mu_1)h}} + \frac{\aleph K}{1 - \aleph e^{-(m-\alpha)h}} + \aleph^2,$$

откуда

$$\|x_3(t)\| \leq \left( \aleph^2 + \frac{\aleph L_1}{1 - \aleph e^{-(m-\mu_1)h}} + \frac{\aleph K}{1 - \aleph e^{-(m-\alpha)h}} \right) e^{m t}.$$

Таким образом, второе неравенство в (11) выполняется с

$$L = L_2 = \aleph^2 + \frac{\aleph L_1}{1 - \aleph e^{-(m-\mu_1)h}} + \frac{\aleph K}{1 - \aleph e^{-(m-\alpha)h}}, \quad \mu = m.$$

Тогда при  $L = \max\{L_1, L_2\}$ ,  $\mu = m$  соблюдаются оба неравенства (11), что завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 1 дает экспоненциальную оценку решений системы (7), (8) (а следовательно, и системы (1), (2)), что позволяет применять к этим системам преобразование Лапласа.

Рассмотрим теперь необходимые условия стабилизации дифференциально-разностных систем.

**Теорема 2.** Если система является стабилизируемой регуляторами (4) или (5), то

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & e^{\lambda h} I_{n_2} - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n_1 + n_2, \quad (12)$$

$$\forall \lambda \in C, \text{Re } \lambda > 0.$$

**Доказательство.** Предположим противное: система (1), (2) стабилизируема (регулятором (4) или (5)), а условие (12) не выполняется, т. е. существуют в общем случае комплексные число  $\lambda^* \in C, \text{Re } \lambda^* > 0$ , и  $n_1$ - и  $n_2$ -вектор-строки  $c_1$  и  $c_2$  такие, что  $[c_1, c_2] \neq 0$ ,

$$[c_1, c_2] \begin{bmatrix} \lambda^* I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & e^{\lambda^* h} I_{n_2} - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (13)$$

Вдоль решений системы (1), (2) имеем:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_0^t c_1 e^{-\lambda^* \tau} (\dot{x}_1(\tau) - A_{11} x_1(\tau) - A_{12} x_2(\tau) - \\
 & - B_1 u(\tau)) d\tau + \int_0^t c_2 e^{-\lambda^* \tau} (x_2(\tau + h) - A_{21} x_1(\tau) - \\
 & - A_{22} x_2(\tau) - B_2 u(\tau)) d\tau = c_1 e^{-\lambda^* t} x_1(t) - c_1 x_{10} + \\
 & + \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_1 (\lambda^* I_{n_1} - A_{11}) x_1(\tau) d\tau - \\
 & - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_1 A_{12} x_2(\tau) d\tau - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_1 B_1 u(\tau) d\tau + \\
 & + \int_h^{t+h} e^{-\lambda^* s + \lambda^* h} c_2 x_2(s) ds - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_2 A_{21} x_1(\tau) d\tau - \\
 & - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_2 A_{22} x_2(\tau) d\tau - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_2 B_2 u(\tau) d\tau = -c_1 x_{10} + \\
 & + c_1 e^{-\lambda^* t} x_1(t) + \int_t^{t+h} e^{-\lambda^* s + \lambda^* h} c_2 x_2(s) ds - \int_0^h e^{-\lambda^* s + \lambda^* h} c_2 \times \\
 & \times x_2(s) ds + \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_1 (\lambda^* I_{n_1} - A_{11}) x_1(\tau) d\tau - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_1 \times \\
 & \times A_{12} x_2(\tau) d\tau - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_1 B_1 u(\tau) d\tau + \\
 & + \int_0^t e^{-\lambda^* s + \lambda^* h} c_2 x_2(s) ds - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_2 A_{21} x_1(\tau) d\tau - \\
 & - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_2 A_{22} x_2(\tau) d\tau - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_2 B_2 u(\tau) d\tau - c_1 x_{10} + \\
 & + c_1 e^{-\lambda^* t} x_1(t) + e^{-\lambda^* (t-h)} \int_0^h e^{-\lambda^* \tau} c_2 x_2(t + \tau) d\tau - \\
 & - e^{\lambda^* h} \int_0^h e^{-\lambda^* \tau} c_2 \psi(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_1 (\lambda^* I_{n_1} - \\
 & - A_{11}) x_1(\tau) d\tau - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_1 A_{12} x_2(\tau) d\tau - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_1 B_1 \times \\
 & \times u(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_2 (e^{\lambda^* h} I_{n_2} - A_{22}) x_2(\tau) d\tau - \\
 & - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_2 A_{21} x_1(\tau) d\tau - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} c_2 B_2 u(\tau) d\tau = c_1 e^{-\lambda^* t} x_1(t) + \\
 & + e^{-\lambda^* (t-h)} \int_0^h e^{-\lambda^* \tau} c_2 x_2(t + \tau) d\tau - c_1 x_{10} - e^{\lambda^* h} \int_0^h e^{-\lambda^* \tau} c_2 \times \\
 & \times \psi(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} (c_1 (\lambda^* I_{n_1} - A_{11}) - c_2 A_{21}) x_1(\tau) d\tau + \\
 & + \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} (c_2 (e^{\lambda^* h} I_{n_2} - A_{22}) - c_1 A_{12}) x_2(\tau) d\tau -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} (c_1 B_1 + c_2 B_2) u(\tau) d\tau = c_1 e^{-\lambda^* t} x_1(t) + \\
 & + e^{-\lambda^* (t-h)} \int_0^h e^{-\lambda^* \tau} c_2 x_2(t + \tau) d\tau - c_1 x_{10} - \\
 & - e^{\lambda^* h} \int_0^h e^{-\lambda^* \tau} c_2 \psi(\tau) d\tau + \\
 & + \int_0^t e^{-\lambda^* \tau} [c_1, c_2] \begin{bmatrix} \lambda^* I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & e^{\lambda^* h} I_{n_2} - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ u(\tau) \end{bmatrix} d\tau \stackrel{(13)}{=} c_1 e^{-\lambda^* t} x_1(t) + e^{-\lambda^* (t-h)} \times \\
 & \times \int_0^h e^{-\lambda^* \tau} c_2 x_2(t + \tau) d\tau - \\
 & - c_1 x_{10} - e^{\lambda^* h} \int_0^h e^{-\lambda^* \tau} c_2 \psi(\tau) d\tau \Rightarrow \\
 & c_1 e^{-\lambda^* t} x_1(t) + e^{-\lambda^* (t-h)} \int_0^h e^{-\lambda^* \tau} c_2 x_2(t + \tau) d\tau = \\
 & = c_1 x_{10} - e^{\lambda^* h} \int_0^h e^{-\lambda^* \tau} c_2 \psi(\tau) d\tau. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Поскольку по условию система (1), (2) стабилизируема, то найдется обратная связь – стабилизирующее управление (4), (или (5)), при котором замкнутая система (1), (2), (4) (или (1), (2), (5)) асимптотически устойчива, а значит,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t)\| = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t)\| = 0$ . Поэтому левая часть в равенстве (14) стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  в случае  $\text{Re} \lambda^* > 0$ , в то время как правую часть можно отграничить от нуля за счет выбора начальных данных. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы 2.

**Теорема 3.** Если система является стабилизируемой регуляторами (4) или (5), то

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_{n_2} - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n_2, \forall \lambda \in C, |\lambda| < 1. \quad (15)$$

**Доказательство.** Предположим противное: система (1), (2) стабилизируема (регулятором (4) или (5)), а условие (15) не выполняется, т. е. существуют в общем случае комплексные число  $\lambda^* \in C, |\lambda^*| \geq 1$ ,  $n_2$ -вектор-строка  $c_2$  такие, что  $c_2 \neq 0$ ,

$$c_2 \begin{bmatrix} \lambda^* I_{n_2} - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (16)$$

Поскольку система (1), (2) стабилизуема, то найдется линейная обратная связь, при которой все решения соответствующей замкнутой

системы со временем затухают. В силу уравнения (2) вдоль импульсных решений с учетом условия (16) имеем:

$$\begin{aligned} c_2 x_2(kh + h) &= c_2 (A_{22} x_2(kh) + B_2 u(kh)) = \\ &= \lambda^* c_2 x_2(kh) = \dots = (\lambda^*)^{k+1} c_2 \psi(0), \end{aligned}$$

поэтому

$$\|c_2 x_2(kh + h)\| = |\lambda^*|^{k+1} \|c_2 \psi(0)\|.$$

Как и при доказательстве теоремы 2, заключаем, что левая часть последнего равенства при неограниченном возрастании времени стремится к нулю, а правая нет (при подходящем выборе значения  $\psi(0)$ ). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.

В работе [17] показано, что необходимое условие стабилизации скалярных дифференциально-разностных систем с помощью регулятора с интегральными составляющими типа

свертки является одновременно и достаточным. Получены условия стабилизации системы простейшим регулятором. Приведен пример системы, для которой не существует простейшего регулятора, позволяющего ее стабилизировать, но находится регулятор с интегральными элементами.

**Заключение.** В работе проведена экспоненциальная оценка роста решений стационарных линейных гибридных дифференциально-разностных систем, таким образом, обоснована возможность применения к ним преобразования Лапласа. Доказаны необходимые условия стабилизации указанных систем линейной обратной связью в виде простейшего регулятора и регулятора с интегральными составляющими типа свертки. Результаты являются теоретическим обоснованием исследования качественных свойств как многомерных, так и скалярных дифференциально-разностных систем, которые описывают реальные системы управления.

### Список литературы

1. Марченко В. М. Некоторые нерешенные задачи в теории управляемых динамических ГДР систем // Труды БГТУ. 2006. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–6.
2. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 7–10.
3. Марченко В. М., Луазо Ж.-Ж. Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 728–740.
4. März R. Solvability of linear differential algebraic equations with properly stated leading terms // Results in Mathematics 45(2004). Basel: Birkhauser Verlag, 2004. P. 88–95.
5. Кириллова Ф. М., Стрельцов С. В. Необходимые условия оптимальности управлений в гибридных системах // Управляемые системы: сб. ст. Новосибирск, 1975. Вып. 14. С. 24–33.
6. Ахундов А. А. Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы: сб. ст. Новосибирск, 1975. Вып. 14. С. 4–10.
7. Марченко В. М., Поддубная О. Н. Представление решений управляемых гибридных систем // Проблемы управления и информатики. 2002. № 6. С. 17–25.
8. Marchenko V. M., Poddubnaya O. N., Zaczekiewicz Z. Hybrid control and observation systems in symmetric form // IEEE conf. «RoMoCo». Poznan, Poland, 2005. P. 137–143.
9. Marchenko V. M., Zaczekiewicz Z. Observability for linear differential-algebraic systems with delay // IEEE conf. «MMAR'2005». Blaziejewko, Poland, 2005. P. 299–303.
10. Луазо Ж.-Ж., Марченко В. М. Реализация в шкалах систем с запаздыванием // Доклады РАН. 2002. Т. 383, № 3. С. 305–308.
11. Марченко В. М., Поддубная О. Н. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями // Доклады РАН. 2005. Т. 404, № 4. С. 465–469.
12. De la Sen M. The reachability and observability of hybrid multirate sampling linear systems // Computers Math. Applic. 1996. Vol. 31, no. 1. P. 109–122.
13. Observability of linear hybrid systems / R.Vidal [et al.] // Hybrid systems: Computation and Control. 2003. Vol. 2623 of LNCS. P. 526–539.
14. Gertler J. J., Cruz J. B., Peshkin M. (Eds.) Hybrid Systems // Prepr. 13<sup>th</sup> World Congr. IFAC. 1996. Vol. J. P. 275–311, 473–476.
15. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
16. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. 269 с.
17. Марченко В. М., Борковская И. М. О стабилизации скалярных гибридных дифференциально-разностных систем // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2020. № 1. С. 5–13.

### References

1. Marchenko V. M. Some unsolved problems in the theory of controlled dynamic GDR systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2006, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–6 (In Russian).
2. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. Stability and stabilization of the linear hybrid discrete-continuous stationary systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 7–10 (In Russian).
3. Marchenko V. M., Loiseau J.-J. On the stability of hybrid difference-differential systems. *Differentsial'nyye uravneniya* [Differential Equations], 2009, vol. 45, no. 5, pp. 728–740 (In Russian).
4. März R. Solvability of linear differential algebraic equations with properly stated leading terms. *Results in Mathematics* 45(2004). Basel, Birkhauser Verlag, 2004. P. 88–95.
5. Kirillova F. M., Strel'tsov S. V. Necessary conditions for optimality of controls in hybrid systems. *Upravlyaemye sistemy* [Controlled systems]. Novosibirsk, 1975, issue 14, pp. 24–33 (In Russian).
6. Akhundov A. A. Controllability of the linear hybrid systems. *Upravlyaemye sistemy* [Controlled systems]. Novosibirsk, 1975, issue 14, pp. 4–10 (In Russian).
7. Marchenko V. M., Poddubnaya O. N. Representation of solutions of controlled hybrid systems. *Problemy upravleniya i informatiki* [Journal of Automation and Information Sciences], 2002, no. 6, pp. 17–25 (In Russian).
8. Marchenko V. M., Poddubnaya O. N., Zaczekiewicz Z. Hybrid control and observation systems in symmetric form. *IEEE conf. "RoMoCo"*. Poznan, 2005, pp. 137–143.
9. Marchenko V. M., Zaczekiewicz Z. Observability for linear differential-algebraic systems with delay. *IEEE conf. "MMAR'2005"*. Blazejewko, 2005, pp. 299–303.
10. Loiseau J.-J., Marchenko V. M. Realization in scales of systems with aftereffect. *Doklady RAN* [Doklady Mathematics], 2002, vol. 383, no. 3, pp. 305–308 (In Russian).
11. Marchenko V. M., Poddubnaya O. N. Representation of solutions and relative controllability of linear differential-algebraic systems with many delays. *Doklady RAN* [Doklady Mathematics], 2005, vol. 404, no. 4, pp. 465–469 (In Russian).
12. De la Sen M. The reachability and observability of hybrid multirate sampling linear systems. *Computers Math. Applic.*, 1996, vol. 31, no. 1, pp. 109–122.
13. Vidal R., Chiuso A., Soato S., Sastry S. Observability of linear hybrid systems. *Hybrid systems: Computation and Control*, 2003, vol. 2623 of LNCS, pp. 526–539.
14. Gertler J. J., Cruz J. B., Peshkin M. (Eds.) Hybrid Systems. *Prepr. 13<sup>th</sup> World Congr. IFAC*, 1996, vol. J, pp. 275–311, 473–476.
15. Bellman R., Cooke K. L. *Differentsial'no-raznostnyye uravneniya* [Differential-difference equations]. Moscow, Mir Publ., 1967. 548 p.
16. Wiener N., Paley R. *Preobrazovaniye Fur'ye v kompleksnoy oblasti* [Fourier transform in the complex domain]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 269 p.
17. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. On the stabilization of scalar hybrid differential-difference systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2020, no. 1, pp. 5–13 (In Russian).

### Информация об авторах

**Марченко Владимир Матвеевич** – доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: vladimir.marchenko@gmail.com

**Борковская Инна Мечиславовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: borkovskaia@gmail.com

### Information about the authors

**Marchenko Vladimir Matveevich** – DSc (Physics and Mathematics), Professor. E-mail: vladimir.marchenko@gmail.com

**Borkovskaya Inna Mechislavovna** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Поступила после доработки 10.04.2020

УДК 535.35+535.33+517.925+621.373.8

**V. A. Savva, S. Banjak**

Belarusian State Technological University

**ON SOLVING COHERENT DYNAMICS EQUATIONS WITH DISCRETE MATHEMATICS METHOD FOR QUANTUM SYSTEMS UNDER LASER EXCITATION**

Molecular coherent excitation calculations are performed using a simple model of quantum  $N + 1$ -levels systems. An exact solution of the corresponding system of differential equations is obtained without their integration. For this, the discrete Fourier transform is applied: the sought-for functions – probability amplitudes  $a_n(t)$  of a quantum system are represented with Fourier images  $F_n(\omega)$ , i.e. spectra that are described by some corresponding system of discrete orthogonal polynomials. Fourier spectra are calculated using the polynomials constructed. We find the required  $a_n(t)$  by calculating the final sum from 0 to  $N$ . Based on a one-to-one correspondence: polynomial characteristics vs equations coefficients, we find all the characteristics of quantum systems, the dynamics of which are described by the obtained solution. The construction of various polynomial systems of a discrete variable makes it possible to obtain solutions for quantum systems with various characteristics, including systems with non-equidistant arrangement of energy levels, which are typical for real molecules.

**Key words:** coherent laser excitation of quantum systems, Fourier spectra, discrete orthogonal polynomials in Fourier space, exact solutions of differential equations systems.

**Introduction.** One of the unique properties of laser radiation is its ability, acting on molecules, atoms, crystals, to translate them into a special state of quantum coherence, which differs sharply from classical states. New states are obtained by exciting the medium with ultrashort pulses. Media in a quantum coherent state can be used for a number of new technologies: quantum computing, quantum communication lines, reliable encryption of information, laser control of chemical reactions, to create selectively excited molecules in order to study their spectral properties and rates of intramolecular redistribution energy in them etc. One of the problems in the implementation of these technologies is the preservation of quantum coherence of the medium, since coherence is rapidly destroyed. Decoherence occurs during the interaction of a quantum system with the environment, including measuring setup. A lot of literature is devoted to theoretical and experimental investigation of media in states of quantum coherence, methods for their production, conservation and control of their characteristics [1–4]. Nevertheless, many unsolved problems remain, in particular, with obtaining exact solutions of quantum equations and developing analytical methods for constructing solutions that describe the process of coherent excitation of quantum systems under various conditions.

This paper describes a new approach to the construction of exact solutions of equations of a certain type, describing the indicated process occurring under the action of a constant amplitude laser pulse. It allows one to obtain an analytical solution for the dynamics of various quantum systems, including those having a non-equidistant arrangement of energy levels and when excited by radiation with a carrier

frequency that is not in exact resonance with the transition eigenfrequencies of the quantum system. In the work, the solution algorithm is illustrated with a simple example – a system with a few energy levels, but it allows a natural generalization. The method is “spectral”. It is based on the transition from the sought-after functions  $\{a_n(t)\}_0^N$  of time, the probability amplitudes of a  $N + 1$ -level quantum system to their Fourier images  $\{F_n(\omega)\}_0^N$ , Fourier spectra. In this case, the discrete Fourier transform is used, that is, the spectral space is discrete. This is natural, since the amplitudes are periodic functions of time when  $N < \infty$ . The paper considers systems with a uniform space, i.e. spectra are function of a discrete argument given on a uniform grid. This restriction is not fundamental. It is also shown that the Fourier spectra are expressed in terms of orthogonal polynomials; they are used to construct a solution of differential equations of the type under consideration. Polynomials are given in the Fourier space of the probability amplitudes of a quantum system. The algorithm for constructing the solution is simple. Constructing a certain sequence of discrete orthogonal polynomials corresponding to a quantum system, we construct spectra, calculate probability amplitudes, and find the distribution of the quantum system by energy levels. Further, using the connections between the characteristics of the polynomials and the coefficients of the differential equations, we find these coefficients and determine the characteristics of the excited quantum systems, for which a solution is obtained, that describes their coherent dynamics.

**The excited medium model and dynamic equations.** The model is a quantum system containing  $N + 1$  energy levels  $E_0, E_1, \dots, E_N$  ( $N$  is a natural number). Radiation  $\mathcal{E}_\ell \cos \omega_\ell \tau$  turned on at the moment  $\tau = 0$  has constant amplitude  $\mathcal{E}_\ell$  and frequency  $\omega_\ell$  and causes transitions between neighboring levels. Each transition  $E_{n-1} \rightleftharpoons E_n$  is characterized by its eigenfrequency  $\omega_n = (E_n - E_{n-1}) / \hbar$  and dipole moment  $\mu_{n-1,n} \equiv \mu_n$  describing the intensity of the interaction of the transition with radiation. The radiation frequency may not coincide with the eigenfrequency of the transition, so the transition may also have a frequency detuning  $\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_\ell$ . Thus, each  $n$ -th transition is described by quantities  $\mu_n, \omega_n, \Delta\omega_n$ .

The Schrödinger equation, which describes the dynamics of coherent excitation, for such problems is written not for the wave function, but for complex-valued probability amplitudes  $a_n(t)$  of detecting a system at a level  $n$  at a time  $\tau$  during excitation [5]. In dimensionless variables, such a system of equations has the form

$$-\frac{da_n}{dt} = f_{n+1} e^{-i\varepsilon_{n+1}t} a_{n+1} + f_n e^{i\varepsilon_n t} a_{n-1}; \quad (1)$$

$$a_n(t = 0) = \delta_{0,n}; \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

This widely used method of the semiclassical description of the process by equations (1) is called the resonance approximation, or the rotating field method [4–6]. In this model, the terms containing the frequencies  $\omega_n + \omega_\ell$  are omitted, which practically does not affect the dynamics. Here, the dimensionless function of dipole moments  $f_n$ ;  $f_1 = 1$  with respect to the moment of the first transition  $0 \leftrightarrow 1$  is introduced,  $\mu_n = \mu_1 f_n$ . It characterizes all the transitions of a quantum system interacting with radiation. The usage of the Rabi frequency  $\Omega_R = \mu_1 \mathcal{E}_\ell / 2\hbar$  of the first transition allows the introduction of dimensionless time  $t = \Omega_R \tau$  and frequency detunings  $\varepsilon_n = (\omega_n - \omega_\ell) / \Omega_R$  at the transitions. As a result, a quantum system is characterized by a parameter  $N$  – the number of transitions interacting with radiation and two sets of quantities  $f_n, \varepsilon_n$ ; they are the coefficients of equations (1); the number of equations (1) is  $N + 1$ . The experimentally measured quantities are the populations of energy levels  $\rho_n(t) = a_n^*(t) a(t)_n$  forming a discrete statistical distribution. Building a discrete distribution is the ultimate goal of calculations. The study of its dependence on the characteristics of the process, the properties of the quantum systems and radiation opens the way to controlling

the process of coherent excitation of molecules and atoms and to its technological use.

**Differential equation system solving.** The algorithm for solving the problem is simple and physically clear. We apply the discrete Fourier transform to equations (1), passing from the functions  $a_n(t)$  with the continuous argument to the discrete Fourier space of these functions, that is to their spectra  $F_n(\omega)$  – the functions of the discrete argument. Indeed,  $a_n(t)$  are time-periodic functions of time if  $N < \infty$ . The solution to the system of differential equations (1) is sought in the form

$$\begin{aligned} a_n(t) &= e^{i s_n t} \sum_{\omega=\omega_0}^{\omega_N} \tilde{F}_n(\omega) e^{i\omega t} = \\ &= e^{i s_n t} \sum_{x=0}^N F_n(x) e^{i r x t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Further simplest case – a uniform Fourier space is considered, i.e. Fourier frequencies are equidistant:  $\omega = r x$ ;  $x = 0, 1, \dots, N$ . Constants  $s_n$  and  $r$  in (2) will be defined below. We also assume that discrete Fourier spectra are as follows

$$F_n(x) = \sigma(x) \hat{p}_0 \hat{p}_n(x); \quad n, x = 0, 1, \dots, N, \quad (3)$$

i.e. they are expressed in terms of a certain sequence of discrete polynomials  $\{p_n(x)\}_{n=0}^N$  in this space, and they correspond, are adequate to the quantum systems under consideration as well as to the equations (1). The presence  $\hat{p}_0$  in (3) is due to the initial conditions for equations (1) – at the moment  $t = 0$  the systems are in the ground energy state. The polynomials are normalized and orthogonal

$$\sum_{x=0}^N \sigma(x) \hat{p}_m(x) \hat{p}_n(x) = \delta_{m,n} \quad (4)$$

with discrete weight function  $\sigma(x)$ .

The most important property of orthogonal polynomials is the three-term recurrence relation

$$\bar{f}_{n+1} \hat{p}_{n+1}(x) + \bar{f}_n \hat{p}_{n-1}(x) = (r x + s_n) \hat{p}_n(x) \quad (5)$$

which is satisfied by the polynomials of both continuous and discrete arguments [7–9]. Here it is written in an unconventional, but equivalent form, with normalization  $\bar{f}_1 = 1$ . To study or construct a sequence of orthogonal polynomials means to know not only their explicit form, but also the weight function and the recurrence relation. This information is available in the corresponding sources for polynomials. To date, a huge “zoo” of various orthogonal polynomials, classical and new ones, has been created [9]. Continuous polynomials are widely used in various fields of science and technologies, discrete polynomials are used much less often.

Earlier, we used some classical polynomials of continuous and discrete variables to construct analytic solutions of the equations describing coherent excitation of multilevel quantum systems [10–12]. A number of results were obtained, including interesting ones for physical applications. The classical discrete polynomials (Charlier, Kravchuk) turned out to be especially meaningful in comparison with the polynomials of a continuous argument. So, the solutions describing the excitation of both basic models of quantum physics – a harmonic oscillator and a two-level system, were constructed using Kravchuk polynomials. The dynamics of these systems is described by the same statistical (binomial) energy distribution (populations of energy levels) at any time while radiation is in effect, and with any detuning of the radiation frequency from the eigenfrequencies of the quantum system [12].

A “drawback” of using classical polynomials for the problem under discussion was that they led to solutions describing the excitation of quantum systems with equidistant energy levels. However, it is important to try to build exact solutions for the dynamics of more real models, since molecules and atoms, as a rule, have levels that are non-equidistant. In addition, radiation interacts with a finite number of transitions between levels. This, in particular, explains the motivation for the work presented here.

If well-known polynomials are used, then their weight function and the coefficients of the recurrence relation (5) are known. But it is possible to construct new discrete polynomials by defining, setting in advance, for example, a weight function, and, using the well-known procedure, and determine the coefficients of the recurrence relation [7–9]. Then the probability amplitudes are found by calculating the final sum (2). The desired solution is obtained without integration, using finite discrete mathematics. Thus, by setting a discrete set of Fourier frequencies and a weight function, we construct a sequence of polynomials, calculate the Fourier spectra according to formula (3) and find a solution of equations (1) according to formula (2). It can be seen that the probability amplitudes are spectrally bounded functions if  $N < \infty$ . The constructed solution describes the coherent dynamics of some  $N + 1$ -level quantum systems.

**Dynamical equations coefficients and quantum systems characteristics.** Now it is easy to determine the coefficients of equations (1), the solution of which is constructed, and to determine the characteristics of systems whose dynamics are described by this solution (see Example below). That is the assumption (3) can be confirmed. Substituting (2), (3) into the equations (1) gives:

$$\sum_{x=0}^N \sigma(x) \hat{p}_0 e^{irxt} \left\{ \begin{array}{l} e^{-i(\varepsilon_{n+1} - (s_{n+1} - s_n))t} f_{n+1} \hat{p}_{n+1}(x) \\ + e^{i(\varepsilon_n - (s_n - s_{n-1}))t} f_n \hat{p}_{n-1}(x) \\ - (rx + s_n) \hat{p}_n(x) \end{array} \right\} = 0. \quad (6)$$

Expression (6) is satisfied if

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= s_n - s_{n-1}; \quad \varepsilon_{n+1} = s_{n+1} - s_n; \\ f_{n+1} \hat{p}_{n+1}(x) + f_n \hat{p}_{n-1}(x) &= (rx + s_n) \hat{p}_n(x). \end{aligned} \quad (7)$$

A comparison of recurrence relations (5) and (7) proves that (2), (3) is a solution of equations (1) if the polynomials in (3) that determine the Fourier spectra are related to the coefficients of equations (1) as follows

$$f_n = \bar{f}_n; \quad \varepsilon_n = s_n - s_{n-1}, \quad (8)$$

where  $\bar{f}_n$ ,  $\varepsilon_n$  and  $r$  in (2) are the coefficients of the recurrence relation for polynomials. The one-to-one correspondence between the coefficients of the dynamical equations and the characteristics of the polynomials shows that the system of equations corresponds to a certain sequence of polynomials with its weight function and recurrence relation. This allows one to solve the inverse problem – based on polynomials one can construct a solution that describes the coherent excitation of the corresponding quantum systems, the dynamics of which are described by equations (1). Next example shows how this method works, using discrete orthogonal polynomials and without using integration of quantum dynamical equations (1).

**Example.** Here we use the well-known method for constructing a sequence of orthogonal polynomials based on a preset weight function [7–9]. Consider the simplest case – three-level quantum systems ( $N = 2$ ). Let the weight function of polynomials have the form

$$\sigma(x) = \{0.2; 0.3; 0.5\}; \quad \sum_{x=0}^{N=2} \sigma(x) = 1. \quad (9)$$

The weight function moments  $c_k = \sum_{x=0}^{N+1=3} x^k \sigma(x) = \{1; 1.3; 2.3; 4.3\}$  are special determinants elements that give rise to the sequence of three non-normalized orthogonal polynomials

$$\begin{aligned} p_0 &\equiv 1; \\ p_1(x) &= x - 1.3; \\ p_2(x) &= 0.61x^2 - 1.31x + 0.3. \end{aligned}$$

The squares of their norms are as follows:

$$d_0^2 = 1; \quad d_1^2 = 0.61; \quad d_2^2 = 0.0732;$$

these are exact results. The normalized polynomials have the following form  $\hat{p}_n(x) = p_n(x) / d_n$ . Next,

the coefficients of the recurrence relation (5) can be obtained

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{d_1}; \quad \bar{f}_2 = \frac{d_2}{d_1^4}; \\ s_0 &= -\frac{1.3}{d_1}; \quad s_1 = -\frac{0.517}{d_1^3}; \quad s_2 = -\frac{0.52}{d_1^3}. \end{aligned} \quad (10)$$

These exact data determine the parameters of quantum systems:

$$f_1 = 1; \quad f_2 = \frac{\sqrt{0.0732}}{0.3721} \approx 0.727,$$

i.e. the second transition interacts with radiation slightly. Frequency detunings at transitions are non-equal

$$\varepsilon_1 = s_1 - s_0 = +\frac{0.276}{d_1^3}; \quad \varepsilon_2 = s_2 - s_1 = -\frac{0.003}{d_1^3}. \quad (11)$$

The radiation frequency almost coincides with the eigenfrequency of the second transition and differs noticeably from the frequency of the first transition. The energy levels are located non-equidistantly, and the detunings have different signs.

**Equations solution and a discrete level distribution function of particles.** Using formulas (3) and (2), we calculate the Fourier spectra and probability amplitudes, i.e. obtain the solution of equations (1)

$$\begin{aligned} a_0 &= e^{i s_0 t} d_0^{-1} (0.20 + 0.30 e^{i r t} + 0.50 e^{i 2 r t}); \\ a_1 &= e^{i s_1 t} d_1^{-1} (-0.26 - 0.09 e^{i r t} + 0.35 e^{i 2 r t}); \\ a_2 &= e^{i s_2 t} d_2^{-1} (0.06 - 0.12 e^{i r t} + 0.06 e^{i 2 r t}). \end{aligned} \quad (12)$$

Energy level populations

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 0.38 + 0.42 \cos r t + 0.2 \cos 2 r t; \\ \rho_1 &= \frac{1}{0.61} (0.1982 - 0.0162 \cos r t - \\ &\quad - 0.1820 \cos 2 r t); \\ \rho_2 &= \frac{1}{0.0732} (0.0216 - 0.0288 \cos r t + \\ &\quad + 0.0072 \cos 2 r t), \end{aligned} \quad (13)$$

i.e. energy distribution discrete function can be presented in an equivalent, more convenient form

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 0.2 r^2 \cdot 0.61 (0.9 + 2.1 \varphi + 2 \varphi^2); \\ \rho_1 &= 0.2 r^2 (1 - \varphi) (1.901 + 1.82 \varphi); \\ \rho_2 &= 0.2 r^2 \cdot 0.6 (1 - \varphi)^2; \\ \varphi &= \cos r t. \end{aligned} \quad (14)$$

Figure shows time dependence of populations of energy levels.

**Three-level quantum systems, the dynamics of which are described by the solution (12) and distribution function (14).** Let us consider in more detail what the proposed and used algorithm gives, and the dynamics of which three-level systems it describes for a given weight function  $\sigma(x)$  (9) that does not contain parameters.

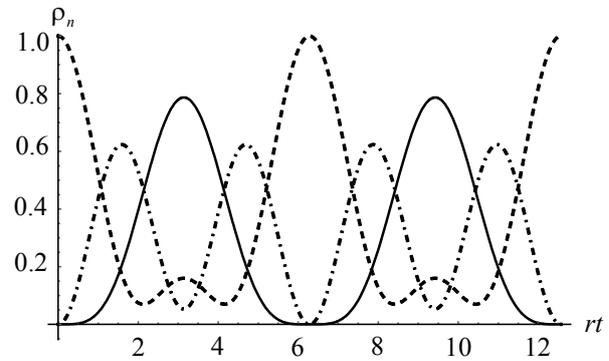


Figure. The dependence of the populations of a three-level quantum system on time:  $\rho_0, \rho_1, \rho_2$  – dashed, dot-dashed, solid lines

Let some system (#1) with dipole moments  $\mu_1^{(\#1)}$  and  $\mu_2^{(\#1)} = f_2 \mu_1^{(\#1)}$  and frequencies  $\omega_1^{(\#1)}$  and  $\omega_2^{(\#1)}$  of transitions be excited by radiation with amplitude  $\mathcal{E}_\ell^{(\#1)}$  and carrier frequency  $\omega_\ell^{(\#1)}$ . And let the dynamics of this system be described by the distribution function (14). We take radiation of a different amplitude  $\mathcal{E}_\ell^{(\#2)} = k \mathcal{E}_\ell^{(\#1)}$ , changed at  $k$  times. What should be the characteristics of a system (#2) so that its dynamics is identical to the dynamics of the system (#1)? The answer is obvious: the system (#2) must have  $\mu_1^{(\#2)} = \mu_1^{(\#1)} / k$ ,  $\mu_2^{(\#2)} = \mu_2^{(\#1)} / k$ . Indeed, then the Rabi frequency  $\Omega_R = \frac{\mu_1 \mathcal{E}_\ell}{2\pi \hbar}$  of the systems (#1) and (#2) will be the same, as well as the “proper” time  $r t = r \Omega_R \tau$  (where  $\tau$  is the time in seconds), and the process speeds are the same. The population  $\rho_2$  peaks occur at the same moment  $\tau_{\max}$  in both processes, when  $r \Omega_R \tau_{\max} = \pi$ . And the value

$$\rho_{2 \max} = 0.48 r^2 = \frac{0.48}{0.61} \approx 0.7869$$

will also be the same. There are infinitely many such systems. They have different  $\mu_1$ , each is excited by radiation of the corresponding amplitude, have the same Rabi frequencies, the same (identical) dynamics. An algorithm implemented with a given function  $\sigma(x)$  that does not contain free parameters “selects” many systems with identical dynamics.

In addition to dipole, power characteristics all systems and radiation have frequency characteristics. They form two dimensionless quantities

$$\frac{\omega_1 - \omega_\ell}{\Omega_R} = \varepsilon_1; \quad \frac{\omega_2 - \omega_\ell}{\Omega_R} = \varepsilon_2, \quad (15)$$

where  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  are constants. We will show now that the algorithm and solution (14) contain many systems whose dynamics are similar with the coefficient of similarity  $k$  to the dynamics of the system (#1). Systems (#2) have Rabi frequency  $\Omega_R^{(\#2)} = k\Omega_R^{(\#1)}$  changed several times due to changes in the field amplitude, but the dipole moments coincide with the moments of the system (#1). There are also infinitely many such systems, expression (14) is still their distribution function, and its plot in coordinates population – time is compressed ( $k > 1$ ) or stretched ( $k < 1$ ) compared to the plot in Figure. What are the characteristics of these systems with  $k$ -like dynamics? These are systems with modified natural frequencies  $\omega_1$  and  $\omega_2$ . Since  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  are constants, when the Rabi frequency changes, condition (15) can be fulfilled in this way. For example, for  $\varepsilon_1$  we obtain

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(\#1)} &= \frac{\omega_1^{(\#1)} - \omega_\ell}{\Omega_R^{(\#1)}} = \\ &= \varepsilon_1^{(\#2)} = \frac{\omega_1^{(\#2)} - \omega_\ell}{k\Omega_R^{(\#1)}}. \end{aligned}$$

This implies

$$\begin{aligned} \omega_1^{(\#2)} &= \omega_1^{(\#1)} + (k - 1)(\omega_1^{(\#1)} - \omega_\ell); \\ \omega_2^{(\#2)} &= \omega_2^{(\#1)} + (k - 1)(\omega_2^{(\#1)} - \omega_\ell). \end{aligned} \quad (16)$$

The second expression in (16) is obtained similarly. Systems (#2) with such a change in the transition frequencies have a  $k$ -like dynamics, regardless of which of the two methods the Rabi frequency has changed. The similarity coefficient can be any positive number  $0 < k < \infty$  if conditions (15) and (16) are satisfied. More complicated cases are possible when the systems have a  $k$ -like dynamics, and condition (15) is fulfilled while changing both the frequencies of the transitions and the frequency of the radiation.

Thus, the proposed and used algorithm leads to the consideration of quantum systems “dressed” by the radiation field, since the coefficients of equations (1) include physical parameters that characterize both the quantum system and electromagnetic radiation. The algorithm allows us to construct a solution, determine systems with similar dynamics, and shows that there are infinitely many such systems, their dynamics is described by solution (12) and distribution function (14). There is an extensive family containing quantum systems having different

dipole moments, level arrangements, excited by different frequencies and amplitudes of radiation, possessing similar (universal) coherent dynamics. The algorithm made it possible to discover the property of similarity of dynamics, to distinguish such families, to build a single analytical solution for their dynamics.

The algorithm can be generalized with using other discrete functions as a weight function or introducing additional parameters for  $\sigma(x)$ . In [13] for the first time an additional parameter  $a$  was introduced into the weight function. A corresponding analytical solution is constructed that describes the dynamics of a one-parameter family of quantum three-level systems with non-equidistant energy levels. In addition the family has three systems with equidistant energy levels when  $a = 0$  and  $a = \pm 1 / (2\sqrt{3})$  as well.

Obviously, it is possible to include quantum systems whose probability amplitudes have a non-uniform Fourier space, which corresponds to orthogonal polynomials with a non-uniform grid.

**Conclusion.** For the first time it has been shown that to solve the system of equations under consideration it is possible not to be limited to known polynomials, but to build “any” discrete orthogonal polynomials, which significantly expands the capabilities of the proposed algorithm that does not require integration, but use discrete mathematics.

An example of constructing a sequence of discrete polynomials is given, a solution is obtained for a number of three-level quantum systems and their characteristics are determined. This solution describes the dynamics of quantum systems with a non-equidistant arrangement of energy levels. Such a model is closer to real molecules.

For quantum systems with a large number of transitions interacting with radiation a computer algebra system, for example, “Mathematica” can be used.

It is shown that there are many quantum systems with  $k$ -like dynamics among all systems described by equations (1).

The solution of the equations of coherent dynamics of quantum systems by the method described above has required knowledge in several areas of mathematics: not only the theory of differential equations, but also the Fourier transform and Fourier spectra, orthogonal polynomials of a discrete variable defined in Fourier space, and their properties, statistical distribution functions, i.e. probability theory. This applies equally to scientific work and to education, university and even school.

An educated person is a carrier of fundamental deep and versatile knowledge about nature and culture.

### References

1. Shapiro M., Brumer P. Quantum Control of Molecular Processes. Weinheim, Wiley-VCH, 2012. 562 p.
2. Nielsen M. A., Chuang I. L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2010. 675 p.
3. Zewail A. H. Femtochemistry. The Nobel Prize in Chemistry. Nobelprize.org, 1999, pp. 274–307.
4. Shore B. W. The Theory of Coherent Atomic Excitation: in 2 vol. New York, Wiley-VCH, 1990. 2 vol.
5. Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum Mechanics. Non-relativistic Theory. Oxford, Pergamon Press Ltd., 1989, pp. 142–153.
6. Allen L., Eberly J. H. Optical Resonance and Two-Level Atoms. New York, Dover Publications, INC, 1987. 256 p.
7. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions. New York, McGraw-Hill, 1953. 326 p.
8. Nikiforov A. F., Suslov S. K., Uvarov V. B. Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable. Berlin; Heidelberg, Springer, 2012. 374 p.
9. Koekoek R., Lesky P. A., Swarttouw R. F. Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their  $q$ -Analogues. Heidelberg, Springer, 2010. 597 p.
10. Savva V. A., Zelenkov V. I., Mazurenko A. S. Analytical methods in the dynamics of multiphoton excitation of molecules by IR laser radiation. *Journal of Applied Spectroscopy*, 1993, vol. 58, pp. 187–200.
11. Savva V., Zelenkov V., Mazurenko A. Orthogonal polynomials in analytical method of solving differential equations describing dynamics of multilevel systems. *Integral Transforms and Special Functions*, 2000, vol. 10, no. 3–4, pp. 299–310.
12. Savva V. A., Zelenkov V. I., Khlus O. V. Kravchuk quantum oscillators and their dynamics in high-power laser field. *Development of the Mathematical Ideas of Mykhailo Kravchuk (Krawtchouk)*. Kyiv; New York, 2004, pp. 242–258.
13. Banjak S. Solving method without integration of some differential equation systems for coherent dynamics of quantum media excited by laser radiation. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 2019, vol. 22, no. 6, pp. 1051–1059.

### Information about the authors

**Savva Vadim Alexandrovich** – DSc (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: savva@belstu.by

**Banjak Sary** – PhD student, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bnjk\_sary@yahoo.com

*Received after revision 07.04.2020*

УДК 316.628:316.422

**Т. И. Адуло<sup>1</sup>, И. К. Асмыкович<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Институт философии Национальной академии наук Беларуси<sup>2</sup>Белорусский государственный технологический университет**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОМПЕТЕНТНОСТЬ ИНДИВИДА – НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ  
ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ ОБЩЕСТВА**

В противовес устоявшемуся технико-технологическому взгляду на математику эта дисциплина представлена в статье со стороны ее качественных характеристик. Показана способность математики оказывать активное влияние на социализацию личности и ее мировоззренческую адаптацию к социальным реалиям XXI в. Сделан вывод о необходимости повышения математической компетентности индивида и общества в целом как одном из важнейших условий реализации инновационного курса белорусского государства.

**Ключевые слова:** индивид, математика, математическая компетентность, математическая школа в Беларуси, гуманизация социума.

**T. I. Adulo<sup>1</sup>, I. K. Asmykovich<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Institute of Philosophy of the National Academy of Sciences of Belarus<sup>2</sup>Belarusian State Technological University**MATHEMATICAL COMPETENCE OF THE INDIVIDUAL IS THE NECESSARY CONDITION  
OF INNOVATIVE DEVELOPMENT OF SOCIETY**

In contrast with the common technical-technological view of mathematics, this discipline is presented in the article from the side of its quality characteristics. There was showed the ability of mathematics to influence actively the socialization of personality and their worldview adaptation to social realities of the XXI century. There was made the conclusion about the need to increase mathematical competence of the individual and society in general as one of the main conditions of implementation of the innovative course of the Belarusian state.

**Key words:** individual, mathematics, mathematical competence, mathematical school in Belarus, humanization of society.

**Введение.** В последнее время в научную среду, экономическую и политическую сферы все активнее входят такие понятия, как цифровая реальность, цифровая экономика, цифровой человек, цифровое общество. В Москве на базе Посольства Беларуси в России проходят ежегодные Белорусско-российские научно-практические конференции «Проектирование будущего и горизонты цифровой реальности». О чем это свидетельствует? Прежде всего, о радикальном изменении конфигурации самой социальности, о возрастании значимости математического знания, математического аппарата в решении экономических и антропологических проблем. Эта возросшая потребность в математике не коррелируется, к сожалению, с реальным интересом школьников, молодых людей к математическому знанию. В большей степени их интересует история, право, менеджмент. Как-то исподволь ослаб интерес к математике и у старшего поколения. А ведь в 60-х гг. прошлого века математика и физика были на первых местах по своему социальному статусу, фактически определяли стратегию научного и технологического развития страны, служили ее базой. Думается,

настало время более ответственно отнестись к математике как к той дисциплине, без опоры на которую может стать проблематичной реализация намеченной масштабной программы инновационного развития Беларуси.

**Основная часть.** Математику традиционно представляют в чисто технико-технологическом плане – чаще всего в виде востребованного обществом инструмента его практически-преобразовательной деятельности. Но эта точка зрения, мягко говоря, не соответствует историческим реалиям. Достаточно обратиться лишь к отдельным фактам, чтобы убедиться в ее ограниченности и неадекватности действительности. Скажем, древнегреческий мыслитель Пифагор занимался математическими расчетами. Следовательно, его можно было бы принять за «чистого математика», что нередко и случается. На самом деле, Пифагор был математиком лишь отчасти. Главным образом он – авторитетный древнегреческий философ, религиозный реформатор, основатель и жесткий руководитель религиозно-философского братства в Кротоне (Южная Италия). Для него за цифрами стояли не только и, скорее всего, не столько чисто количественные отношения

бытия. За ними скрывались накопленный древними египтянами и греками социальный опыт и преломленный в его сознании окружающий мир в виде «музыкально-числовой структуры космоса, символически выражаемой в “тетрактиде” (“четверице”), т. е. сумме первых четырех чисел  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ , содержащей основные музыкальные интервалы: октаву (2:1), квинту (3:2) и кварту (4:3)» [1, с. 495].

В схожем ключе рассуждал французский мыслитель Рене Декарт. Он отмечал: «И действительно, нет ничего более бессмысленного, чем заниматься голыми числами и воображаемыми фигурами... Когда же потом я подумал, откуда же повелось, что некогда первые создатели философии не хотели допускать к изучению мудрости кого-либо несведущего в математике, как будто эта дисциплина казалась им самой легкой из всех и совершенно необходимой для того, чтобы просветить и подготовить умы к освоению других, более возвышенных наук, я вполне утвердился в подозрении, что они знали некую математику, весьма отличную от общепринятой математики нашего времени» [2, с. 88–89].

На качественную сторону чисел нацеливал внимание исследователей Ф. Энгельс. «Число, – указывал он, – есть чистейшее количественное определение, какое мы только знаем. Но оно полно качественных различий. ...Ничто не выглядит проще, чем количественная единица, и ничто не оказывается многообразнее, чем эта единица, коль скоро мы начнем изучать ее в связи с соответствующей множественностью, с точки зрения различных способов происхождения ее из этой множественности» [3, с. 573–574]. В целом же качественную сторону чисел отстаивали прежде всего философы и «философствующие» математики.

И относительно «некой математики», отличной от «общепринятой математики», на что указывал Р. Декарт. Думается, что такой математики не существует в природе. Есть одна дисциплина под названием «математика». Речь идет об ином – о различной трактовке ее предмета, ее места и значимости в социуме в конкретные исторические эпохи, если мы ее рассматриваем в социальном аспекте и с диалектической позиции. А именно в таком ключе мы и попытаемся представить математику в данной статье.

Для начала – беглый исторический экскурс. В древности математические знания формировались в процессе освоения человеком мира и выступали в качестве важнейшего инструмента его преобразования. Как и другие формы знания, они представляли собой один из сегментов целостного человеческого знания о мире, т. е. философии. В дальнейшем математические знания выделились из лона философии в специфическую

самостоятельную дисциплину со своими, особыми объектом, предметом и методами исследования. Тем не менее философы не утратили интереса к математике, как и математики к философии. Это объяснимо: и философы, и математики в качестве объекта мыслительной деятельности берут, по большому счету, не что-то частное, локальное, ограниченное, а мир в целом, пытаясь постичь его сущность, для чего разрабатывают специальные методы. Примеров своеобразного синтеза философского и математического мышления множество, начиная с Пифагора, Платона, Аристотеля и заканчивая академиком В. А. Садовничим и А. А. Акаевым, под руководством которых в Институте математических исследований сложных систем МГУ имени М. В. Ломоносова не так давно был реализован фундаментальный социальный проект в области прогнозирования динамики развития мировой и российской экономик.

Много внимания философско-теоретическому осмыслению математики уделяли И. Кант, К. Маркс, Ф. Энгельс, не говоря уже о таких мыслителях-энциклопедистах, как И. Ньютон и Г. В. Лейбниц. Например, К. Маркс использовал математику не только в качестве важнейшего инструмента постижения сущности и раскрытия тайн капитализма. Не многие знают о том, что на протяжении многих десятилетий, вплоть до конца жизни, она стала для него особым объектом теоретического анализа, самостоятельным направлением научно-исследовательской работы. Рукописи К. Маркса по математике [4] составляют свыше тысячи страниц, а объектом изучения стали для него аналитическая геометрия, алгебра, математический анализ. В первую очередь К. Маркса интересовало дифференциальное исчисление. В его рукописях нашли отражение понятие производной функции, сущность дифференциала и история основных методов дифференциального исчисления, которую он разбил на три этапа – «мистическое дифференциальное исчисление» (Ньютон и Лейбниц), «рациональное дифференциальное исчисление» (Эйлер и Даламбер) и «чисто алгебраическое дифференциальное исчисление» (Лагранж) [4, с. 137–189]. Несомненно, математика потребовалась К. Марксу в первую очередь для разработки основ политической экономии. Что касается дифференциального исчисления, то, пожалуй, главной причиной интереса мыслителя к нему явилось желание разобраться в его методологических основаниях, поскольку сами математики в них совершенно запутались. И, кроме того, «переход от элементарной математики к математике переменных величин по самому своему существу должен был носить диалектический характер, а Маркс и Энгельс считали

своим долгом показать, как применяется материалистическая диалектика не только в общественных науках, но и в естествознании и математике» [4, с. 6].

Не меньший интерес к истории и теории математики проявлял Ф. Энгельс. Он увязывал процесс ее возникновения с практическими потребностями людей и в этой связи подверг аргументированной критической оценке позицию Е. Дюринга, который «вдохновенно воспел независимость чистой математики от эмпирического мира, ее априорность, ее оперирование продуктами свободного творчества и воображения ума» [5, с. 39]. Ф. Энгельс пришел к выводу о наличии двух противоположных точек зрения на математику, с одной стороны, как на чистую математику, возникшую из чистого мышления, именно ее отстаивал Е. Дюринг, а с другой – как на совершенно эмпирический продукт. Немецкий философ не разделял ни одну из представленных точек зрения. Он считал математику продуктом диалектической мысли, базирующейся на эмпирической базе. «Над всем нашим теоретическим мышлением, – подчеркивал он, – господствует с абсолютной силой тот факт, что наше субъективное мышление и объективный мир подчинены одним и тем же законам и что поэтому они и не могут противоречить друг другу в своих результатах, а должны согласоваться между собой» [3, с. 581]. И далее продолжал: «Тайна, окружающая еще в наше время те величины, которые применяются в исчислении бесконечно малых, – дифференциалы и бесконечно малые разных порядков, – является лучшим доказательством того, что все еще распространено представление, будто здесь мы имеем дело с чистыми “продуктами свободного творчества и воображения” человеческого духа, которым ничего не соответствует в объективном мире. И тем не менее справедливо как раз обратное» [3, с. 582].

Именно подчиненность субъективного мышления и объективного мира одним и тем же законам позволяет использовать математику для осмысления социальных процессов и эффективного воздействия на них. Правда, отмечая значимость математики для исследования социума (это касается в первую очередь использования ее инструментария при проведении эмпирических социологических исследований) и практического решения его отдельных проблем в виде разработки различных рода математических моделей прогнозирования экономических в целом и демографических в частности процессов, хотелось бы обратить внимание на то, что она, в конечном счете, выполняет хотя и важную, но все же не главную роль в постижении современной социальности. Об этом приходится, к сожалению, говорить, поскольку и ранее (примером

может служить деятельность уроженца Беларуси А. А. Богданова (А. А. Малиновского) по созданию метанауки в виде тектологии – всеобщей организационной науки), и сейчас предпринимаются попытки подменить философию с ее диалектическим методом своеобразным симбиозом технических дисциплин в виде синергетики, трибофатики, тринитарной теории.

В Беларуси математика имеет свою национальную историю. За условную точку отсчета ее истории можно принять открытие в 1579 г. по привилегии короля Польши Стефана Батория Виленского университета с философским и теологическим факультетами (официальное название – Академия и университет виленского Общества Иисуса (*Almae Academia et Universitas Vilmensis Societatis Jesu*)). В ту историческую эпоху город Вильно был столицей мощного европейского государства, называвшегося Великим княжеством Литовским, Русским и Жемойтским, неотъемлемой частью которого были и белорусские земли. Безусловно, математика как дисциплина в университете не преподавалась. Но на философском факультете изучалась логика, причем в течение всего первого курса. И хотя она выстраивалась в русле схоластицированного Аристотеля, тем не менее, способствовала формированию у слушателей логического мышления. Кстати, учебник логики теолога-полемиста этого учебного заведения Мартина Смиглевского был широко известен в Европе, активно использовался в иезуитских школах (даже в Сорбонне) и неоднократно переиздавался в Европе. В дальнейшем в Гродно, Полоцке, Витебске, Пинске и других городах Беларуси были учреждены иезуитские коллегии, в которых также изучался схоластицированный аристотелизм.

Освоение математики как дисциплины, а также целого ряда естественнонаучных дисциплин стало возможным в Виленском университете в более поздние эпохи, начиная со второй половины XVIII в., когда создались условия для постепенного преодоления схолистического мировоззрения, а конкретнее – после упразднения ордена иезуитов в 1773 г. Упомянем и о том, что выходцы из Беларуси имели возможность получать образование в европейских университетах, где естественнонаучным знаниям уделялось гораздо больше внимания, нежели в виленском учебном заведении. Именно там обучался белорусский первопечатник Франциск Скорина. После вхождения белорусских земель в состав Российской империи их выходцы обучались в Московском, Петербургском, Казанском и других университетах.

Математическая школа сформировалась в Беларуси только в XX в., хотя и до XX в. выходцы из белорусских земель оставили заметный след

в математике (в данном случае имеются в виду фундаментальные разработки в области математического анализа – дифференциальные уравнения и аналитические функции – члена-корреспондента Петербургской академии наук Софьи Васильевны Ковалевской). Основной базой подготовки математиков на протяжении многих десятилетий был (и до сих пор остается) Белорусский государственный университет. Именно из выпускников этого университета в дальнейшем были сформированы различные научно-исследовательские центры, в их числе существующие и в наше время Институт математики, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси и Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета.

Большую роль в формировании математической школы в Беларуси сыграли известные российские математики, направленные на работу в Белорусский государственный университет и Академию наук. В 1956 г. ленинградские математики Н. П. Еругин и В. И. Крылов переехали в Минск, стали действительными членами Академии наук Белорусской ССР. Н. П. Еругин создал и был первым руководителем Института математики АН БССР, длительное время руководил кафедрой дифференциальных уравнений Белорусского государственного университета. С 1965 г. под его руководством издавался всесоюзный журнал «Дифференциальные уравнения». Н. П. Еругин внес большой вклад в аналитическую теорию дифференциальных уравнений, решил ряд ее проблем. В. И. Крылов в течение 30 лет, начиная с 1957 г., заведовал лабораторией, на протяжении 15 лет являлся заместителем директора по научной работе Института математики АН БССР, а с ноября 1987 г. был советником при дирекции института.

В 1966 г. известный свердловский математик Е. А. Барбашин был избран академиком Академии наук Белорусской ССР, переехал на работу в Минск и пригласил в качестве сотрудников молодых математиков Р. Ф. Габасова и Ф. М. Кириллову. Они вместе создали и руководили в Институте математики и Белорусском государственном университете теперь всемирно известной школой по теории устойчивости и качественной теории оптимального управления.

В настоящее время основными направлениями деятельности в области математики являются следующие: алгебра, геометрия и теория чисел; дифференциальные уравнения и процессы управления; функциональный анализ; вычислительная и дискретная математика; вероятностно-статистический анализ и теория случайных процессов; математическая кибернетика;

компьютерное моделирование; обработка изображений и речевых сигналов; суперкомпьютерные и грид-технологии; биоинформатика и медицинская информатика; геоинформационные системы и информационно-космические технологии; цифровая картография и др. [6]. Как видим, работа белорусских ученых-математиков органично привязана к социальной практике – решению главных задач, стоящих перед страной: перевод в ближайшие годы народнохозяйственного комплекса на инновационный путь развития.

Не все так просто складывалось с математикой – важнейшим сегментом современного научного знания и культуры в Беларуси. Были весомые успехи и достижения, но были и неудачи, поражения. Особенно это касается 1990-х гг. В так называемый «период перестройки» белорусские математики, впрочем, как и другие научные школы в области естественных и технических наук, столкнулись с рядом серьезных проблем. Во-первых, многие структурные подразделения научно-исследовательских институтов работали в ту эпоху на «оборонку» великой страны, и вполне понятно, что после ее распада отпала надобность в такого рода исследованиях. Во-вторых, в условиях первоначального накопления капитала, а именно эту стадию в 1990-х гг. проходили постсоветские государства, об образовании, науке и культуре попросту забыли. Да и позже, когда рыночная форма хозяйственной деятельности более-менее сформировалась, образованию и науке стало ничуть не легче. С этим комплексом серьезных проблем столкнулась и Беларусь. С одной стороны, начиная с 90-х гг. прошлого века, в русле мировой тенденции в школах, техникумах и вузах стали создаваться компьютерные классы, активизировался процесс информационного обеспечения учащихся через интернет и т. д. С другой – материально-техническое и финансовое обеспечение учебных заведений в целом, особенно в «периферийных», постоянно ухудшалось. Происходило старение профессорско-преподавательских кадров. По причине низкой заработной платы из учебных заведений уходили молодые ученые-педагоги. Снижался интеллектуальный потенциал известных научных школ. Разрушалась сложившаяся на протяжении десятилетий в рамках СССР система переподготовки профессорско-преподавательских кадров в ведущих вузах России – МГУ имени М. В. Ломоносова, Ленинградском государственном университете и др.

Многие родители, учителя были настроены весьма критично по отношению к радикальным преобразованиям советской школы. Они считали, что под видом реформирования разрушалось то ценное, что было для нее характерно, – общедоступность, равенство, коллективизм,

трудова основа образования и др. Особое неприятие у родителей и учителей вызывало замещение и перенесение на национальную почву сословной западно-европейской системы образования, ведущей к социальному расслоению общества на так называемую «элиту» и «рядовых граждан». И в самом деле, в погоне за «демократизацией» образовательной системы как-то исподволь стали забывать о ее общедоступности. В этом плане известный российский философ В. М. Межуев совершенно оправданно заявлял: «Никто не спорит, что демократия в образовании ущемляется, пока существует запрет на доступ к той или иной информации, но еще хуже та “демократия”, которая ограничивает доступ к самому образованию» [7, с. 46].

Одной из острых проблем национальной системы образования стала ее коммерциализация, охватившая, главным образом, высшую школу. Наблюдался постоянный рост численности студентов, обучающихся за счет собственных средств. По состоянию на 1 октября 2004 г. в Республике Беларусь работали 12 вузов негосударственной формы собственности и 7 их филиалов, в которых в основном за счет собственных средств обучалось 58 812 человек [8].

Белорусские вузы вели подготовку студентов по весьма широкому спектру специальностей и в этом плане были способны обеспечить страну высококвалифицированными специалистами. Лишь по некоторым, так называемым «дефицитным» специальностям государство вынуждено было обращаться за помощью к российским или же зарубежным учебным заведениям, что и делало. Однако планы подготовки кадров по конкретным специальностям не всегда соответствовали реальным потребностям народного хозяйства. В результате возникала проблема трудоустройства выпускников. Кроме того, государство дополнительно расходовало средства на их переподготовку. Усугубляли ситуацию вузы негосударственной формы собственности, готовые специалистов по своему усмотрению.

Еще одна серьезная проблема, с которой столкнулось белорусское общество, – весьма активный неконтролируемый государством отток за рубеж специалистов высшей квалификации, самых способных выпускников вузов и даже школьников. Отдельные исследователи не видели в этом проблемы и даже рассматривали это как благо для Беларуси, поскольку, мол, на Западе наши ученые лишь разовьют свой интеллект и с этим багажом знаний вернутся назад. Но, как убеждала практика, наши талантливые ученые, деятели культуры глубоко пускали корни в Германии, США, Австралии, Канаде и домой возвращаться не собирались. Так же,

как и делиться с нами своими разработками и открытиями. Но на их подготовку государство в свое время затратило огромные средства. Поэтому возникал вопрос: надо ли готовить за счет наших граждан ученых для других государств? Не лучше ли эти средства направить на поддержку национальной науки – закупку нового оборудования, повышение заработной платы ученых и т. д. Ведь понятно: чтобы приостановить бегство из страны образованной молодежи, представляется важным обеспечить ее материально, создать условия для ее творческого роста, а также повысить в нашем государстве престиж интеллектуального труда.

Что можно сказать о современной ситуации в сфере образования и науки в Беларуси?

Если говорить в целом о национальной системе образования, то она представляет собой своего рода «долгострой» – затянувшийся чуть ли не на три десятка лет процесс реформирования советской системы науки, образования и подготовки научных кадров. Несмотря на столь активное реформирование данной сферы, пока в стране не выстроена *система* образования: дошкольные учреждения – школа – вузы – научно-исследовательские учреждения (институты, центры и т. д.) – производство (включая сферу управления).

На первый взгляд, картина может показаться позитивной. По количеству вузов и количеству выпускников из них мы давно превзошли советскую эпоху. Правда, количество принятых в вузы студентов в последние годы постоянно сокращается, но это связано с демографической ситуацией конца 1990-х гг. Если в 2011/2012 учебном году численность студентов в учреждениях высшего образования составляла 445,6 тыс. человек, то в 2017/2018 учебном году – 284,3 тыс. человек, т. е. на 161,3 тыс. меньше. В 2011 г. в учреждения высшего образования было принято 96,0 тыс. человек, в 2017 г. – только 61,8 тыс., т. е. на 34,2 тыс. меньше [9, с. 57–58]. Как позитивный факт отметим рост численности специалистов с дипломом магистра по профилю образования [10, с. 62]. Но вот по количеству исследователей произошло сокращение – не хватает средств. В 2010 г. численность персонала, занятого научными исследованиями и разработками в Республике Беларусь, составляла 31 712 человек, в 2017 г. – 26 483 человека, т. е. сократилась на 5299 человек; численность исследователей составляла соответственно 19 879 и 17 089 человек, т. е. сократилась на 2790 человек, в том числе в области естественных наук – на 233 человека, в области технических наук – на 2190 человек, в области медицинских наук – на 141 человека, в области сельскохозяйственных наук – на 206 человек, в области социально-экономических

и общественных наук – на 108 человек. И только в области гуманитарных наук численность исследователей увеличилась на 88 человек [10, с. 366]. А ведь наука – это не только важнейший компонент интеллектуального капитала, это его база.

Как негативную отметим устойчивую тенденцию снижения численности обучающихся в аспирантуре и докторантуре и выпускников этих учреждений.

В 2017 г. выпуск из аспирантуры составил 803 человека, в том числе в отрасли физико-математических наук – 46, химических – 12, биологических – 44, технических – 175, сельскохозяйственных – 34, экономических – 78, педагогических – 66, филологических – 51, юридических – 39 [10, с. 160]. Для сравнения: в 2005 г. выпуск из аспирантуры составил 1296 человек, в том числе в отрасли физико-математических наук – 69, химических – 31, биологических – 79, технических – 272, сельскохозяйственных – 56, экономических – 182, педагогических – 166, филологических – 96, юридических – 78 [11, с. 46].

В 2017 г. выпуск из докторантуры составил 60 человек, в их числе в отрасли физико-математических наук – 1, химических – 0, биологических – 6, технических – 9, сельскохозяйственных – 2, экономических – 3, педагогических – 3, филологических – 4, юридических – 3 [10, с. 162].

Нельзя не сказать о нехватке отечественных средств для создания отвечающей требованиям XXI в. экспериментальной базы фундаментальной науки. Научно-исследовательским институтам и учреждениям высшего образования приходится обращаться за помощью к другим государствам, создавать совместные научно-исследовательские центры. Но в таком случае полученные научные результаты тоже являются совместными. И учитывая нашу традиционную нерасторопность, эти результаты, скорее всего, будут внедрены в практику нашими партнерами. Отсюда же возникли проблемы «утечки молодых специалистов», старения преподавателей и исследователей, прекращения деятельности ряда известных отечественных научных школ.

В целом за тридцать последних лет система образования в Беларуси претерпела существенные изменения, и главным ориентиром ее преобразований стала так называемая Болонская система образования. Именно в этом направлении осуществлялась подгонка стандартов отечественной, т. е. бывшей советской, системы образования под европейские стандарты. В отличие от других постсоветских государств такого рода подгонка велась более-менее взвешенно и, главное, постепенно.

Реформирование средней и высшей школы не могло не отразиться и на учебном предмете

«Математика». Важно отметить то, что Образовательный стандарт начального образования, утвержденный Постановлением Министерства образования Республики Беларусь 26 декабря 2018 г., предусматривает направленность образовательного процесса при изучении учебного предмета «Математика» не только на «овладение системой математических знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности», но и на «интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых для полноценной жизни в современном обществе: ясности и точности мысли, критичности мышления, интуиции, логического мышления, алгоритмической культуры, пространственных представлений, способности к преодолению трудностей; ...воспитание культуры личности, отношения к математике как части общечеловеческой культуры, понимание значимости математики для научно-технического прогресса» [12]. При этом выделяются два этапа в освоении содержания учебного предмета «Математика», которые обусловлены возрастными особенностями учащихся V–VI и VII–IX классов, а также спецификой учебного предмета. В частности, в VII–IX классах акцент сделан на алгебраическом и геометрическом содержательных компонентах предмета «Математика», теоретических обобщениях и выводах, доказательствах, «обеспечивающих развитие у учащихся способности к самостоятельному усвоению новых знаний и умений (включая и организацию этого процесса), к эффективному решению различного рода жизненных задач» [12].

Результатом освоения содержания учебного предмета «Математика» при его изучении на базовом уровне является то, что учащийся «имеет представление: о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений окружающего мира; ...понимает, что математика является формой описания и методом научного познания окружающего мира; знает: определения, свойства, правила, формулы, законы, алгоритмы, теоремы планиметрии; ...умеет: точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи с применением математической терминологии и символики, правильно применять понятия, классифицировать математические объекты, проводить логические обоснования и доказательства математических утверждений; проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; владеет: ...умением применять общие способы интеллектуальной деятельности, характерные для математики и являющиеся основой познавательной культуры, значимой для различных

сфер деятельности; умением действовать в различных ситуациях, требующих математической грамотности» [12].

К сожалению, эти установки и требования, ориентированные на формирование интеллектуально развитого молодого человека, очень плохо связаны с реальным положением дел. Они совершенно не учитывают существенного падения уровня математического образования в средней школе, связанного как с резким углублением проблем средней школы, так и с всеобщим увлечением тестированием. Ведь сейчас в старших классах средней школы на уроках математики почти никто не рассматривает доказательства теорем и логические рассуждения, а учится технике решения конкретных задач для тестов, или, что еще хуже, умению угадать результат. А уж о том, как поставить задачу, что иногда сложнее, чем ее решить, так никто и не упоминает.

**Заключение.** При получении высшего технического образования все недостатки школь-

ного образования проявляются очень четко. Поэтому остро необходимы новые методические идеи в преподавании математики, в частности для хорошо успевающих студентов [13, 14]. И не следует ограничиваться только математикой. Математика – лишь одно из комплекса звеньев педагогического процесса. Пришло время осуществить системный анализ накопленного за последние три десятилетия педагогического опыта, как позитивного, так и негативного, как национального, так и зарубежного, в средней и высшей школе, а также последиplomного образования, сложившейся практики подготовки специалистов высшей квалификации, где тоже назрело немало нерешенных вопросов. Все звенья образовательного процесса следует привести в систему, которой, к сожалению, пока не сложилось. Эту проблему должны были решать, в первую очередь, специалисты из отрасли философии, а конкретнее, философии образования – новой дисциплины. Но эта дисциплина также пока находится на стадии становления.

### Список литературы

1. Лебедев А. В. Пифагор // *Философский энциклопедический словарь*. М., 1983. С. 494–495.
2. Декарт Р. *Сочинения*: в 2 т. Т. 1 / сост., ред., вступ. ст. В. В. Соколова. М.: Мысль, 1989. 654 с.
3. Энгельс Ф. *Диалектика природы* // *Сочинения*: в 50 т. / К. Маркс, Ф. Энгельс. М., 1961. Т. 20. С. 343–626.
4. Маркс К. *Математические рукописи*. М.: Наука, 1968. 640 с.
5. Энгельс Ф. *Анти-Дюринг* // *Сочинения*: в 50 т. / К. Маркс, Ф. Энгельс. М., 1961. Т. 20. С. 5–338.
6. Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси [Электронный ресурс]. URL: [http://nasb.gov.by/rus/about/otdeleniya-nauk/fmi\\_nauk.php](http://nasb.gov.by/rus/about/otdeleniya-nauk/fmi_nauk.php) (дата обращения: 23.09.2019).
7. Философия, культура, образование (материалы «Круглого стола») // *Вопросы философии*. 1999. № 3. С. 3–54.
8. Адуло Т. И. *Человек на рубеже тысячелетий: поиск духовных оснований бытия*. Минск: ИСПИ, 2003. 209 с.
9. *Наука и инновационная деятельность в Республике Беларусь. Статистический сборник*. Минск: Национальный статистический комитет Республики Беларусь, 2018. 134 с.
10. *Республика Беларусь. Статистический ежегодник*. 2018. Минск: Национальный статистический комитет Республики Беларусь, 2018. 489 с.
11. *Наука и инновационная деятельность в Республике Беларусь. Статистический сборник*. Минск: Национальный статистический комитет Республики Беларусь, 2011. 146 с.
12. *Образовательный стандарт начального образования* [Электронный ресурс]. URL: <https://www.adu.by/images/2019/01/obr-standarty-ob-sred-obrazovaniya.pdf> (дата обращения: 23.09.2019).
13. Асмыкович И. К., Борковская И. М., Пыжкова О. Н. *Методические статьи по преподаванию математики в университетах. Размышления о новых технологиях преподавания математики в университетах и их возможной эффективности*. Deutschland LAP: Lambert Academic Publishing, 2016. 57 с.
14. Асмыкович И. К. *Организация НИРС по математике для хорошо успевающих студентов* // *Науковий вісник Львівської академії. Сер. Педагогічні науки: зб. наук. пр.* / [редкол.: Т. С. Плачинда (гол. ред.) та ін.]. Кропивницький, 2018. Вып. 3. С. 234–239.

### References

1. Lebedev A. V. Pythagoras. *Filosofskiy entsiklopedicheskiy slovar'* [Philosophical Encyclopedic Dictionary]. Moscow, 1983, pp. 494–495 (In Russian).
2. Dekart R. *Sochineniya: v 2 t. T. 1* [Works: in 2 vol. Vol. 1]. Moscow, Mysl' Publ., 1989. 654 p.
3. Engel's F. *Dialectics of nature. Sochineniya: v 50 t.* [Works: in 50 vol.]. Moscow, 1961, vol. 20, pp. 343–626 (In Russian).

4. Marks K. *Matematicheskiye rukopisi* [Mathematical manuscripts]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 640 p.
5. Engel's F. Anti-Dühring. *Sochineniya: v 50 t.* [Works: in 50 vol.]. Moscow, 1961, vol. 20, pp. 5–338 (In Russian).
6. *Otdeleniye fiziki, matematiki i informatiki NAN Belarusi* [Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus]. Available at: [http://nasb.gov.by/rus/about/otdeleniya-nauk/fmi\\_nauk.php](http://nasb.gov.by/rus/about/otdeleniya-nauk/fmi_nauk.php) (accessed 23.09.2019).
7. Philosophy, culture, education (materials of the “Round table”). *Voprosy filosofii* [Questions of philosophy], 1999, no. 3, pp. 3–54 (In Russian).
8. Adulo T. I. *Chelovek na rubezhe tysyacheletiy: poisk dukhovnykh osnovaniy bytiya* [Man at the turn of the millennium: the search for the spiritual foundations of being]. Minsk, ISPI Publ., 2003. 209 p.
9. *Nauka i innovatsionnaya deyatel'nost' v Respublike Belarus'.* *Statisticheskiy sbornik* [Science and innovation in the Republic of Belarus. Statistical collection]. Minsk, Natsional'nyy statisticheskiy komitet Respubliki Belarus' Publ., 2018. 134 p.
10. *Respublika Belarus'.* *Statisticheskiy ezhegodnik. 2018* [Republic of Belarus. Statistical Yearbook. 2018]. Minsk, Natsional'nyy statisticheskiy komitet Respubliki Belarus' Publ., 2018. 489 p.
11. *Nauka i innovatsionnaya deyatel'nost' v Respublike Belarus'.* *Statisticheskiy sbornik* [Science and innovation in the Republic of Belarus. Statistical collection]. Minsk, Natsional'nyy statisticheskiy komitet Respubliki Belarus' Publ., 2011. 134 p.
12. *Obrazovatel'nyy standart nachal'nogo obrazovaniya* [Educational standard of primary education]. Available at: <https://www.adu.by/images/2019/01/obr-standarty-ob-sred-obrazovaniya.pdf> (accessed 23.09.2019).
13. Asmykovich I. K., Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. *Metodicheskiye stat'i po prepodavaniiyu matematiki v universitetakh. Razmyshleniya o novykh tekhnologiyakh prepodavaniya matematiki v universitetakh i ikh vozmozhnoy effektivnosti* [Methodical articles on teaching mathematics in universities. Reflections on new technologies for teaching mathematics at universities and their possible effectiveness]. Deutschland LAP, Lambert Academic Publishing, 2016. 57 p.
14. Asmykovich I. K. Organization of scientific research work in mathematics for well-performing students. *Naukoviy visnik L'otnoy akademii* [Science Bulletin of Llotnoi Academy]. Series of Pedagogical Science. Kropivnitsky, 2018, issue 3, pp. 234–239 (In Russian).

#### Информация об авторах

**Адуло Тадеуш Иванович** – доктор философских наук, профессор, заведующий Центром социально-философских и антропологических исследований. Институт философии Национальной академии наук Беларуси (220072, г. Минск, ул. Сурганова, 1, корп. 2, Республика Беларусь). E-mail: [tadoul@mail.ru](mailto:tadoul@mail.ru)

**Асмыкович Иван Кузьмич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [asmik@tut.by](mailto:asmik@tut.by)

#### Information about the authors

**Adulo Tadeush Ivanovich** – DSc (Philosophy), Professor, Head of the Center of Social-Philosophical and Anthropological Research. Institute of Philosophy of the National Academy of Sciences of Belarus (1, building 2, Sarganova str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [tadoul@mail.ru](mailto:tadoul@mail.ru)

**Asmykovich Ivan Kuzmich** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [asmik@tut.by](mailto:asmik@tut.by)

Поступила после доработки 16.03.2020

УДК 517.977

**В. В. Крахотко<sup>1</sup>, Г. П. Размыслович<sup>1</sup>, В. В. Игнатенко<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный университет<sup>2</sup>Белорусский государственный технологический университет***H*-УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

В работе рассматривается проблема *H*-управляемости, полной *H*-управляемости и полной управляемости по отношению к выходу системы. Основным объектом исследования выступают дескрипторные динамические системы и динамические системы с запаздыванием по управлению. Показано, что траектории рассматриваемых динамических систем являются решениями специально сконструированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых известны критерии управляемости. Необходимые и достаточные условия различных видов управляемости описаны в терминах определяющих уравнений, которые построены на начальных системах.

**Ключевые слова:** линейные дифференциальные системы, дифференциально-алгебраические системы, управляемость динамических систем.

**V. V. Krakhotko<sup>1</sup>, G. P. Razmyslovich<sup>1</sup>, V. V. Ignatenko<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State University<sup>2</sup>Belarusian State Technological University***H*-CONTROLLABILITY OF DYNAMICAL SYSTEMS**

The report considers the problem of *H*-controllability, full *H*-controllability and complete controllability with respect to the system output. The main objects of study are descriptor dynamical systems and dynamical systems with control delay. It is shown that the trajectories of the considered dynamical systems are solutions of specially designed systems of ordinary differential equations for which controllability criteria are known. Necessary and sufficient conditions for various types of controllability are described in terms of defining equations that are built on initial systems.

**Key words:** linear differential systems, differential-algebraic systems, controllability of dynamical systems.

**Введение.** В теории оптимального управления очень важную роль играет получение параметрических критериев различных видов управляемости (условной, относительной, полной и т. д.) для различных видов динамических систем. В последнее время очень большое внимание уделяется исследованию управляемости дескрипторных систем, когда матрица при операторе дифференцирования вырождена.

**Основная часть.** Рассмотрим систему управления

$$A_0 \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0,$$

где  $x \in R^n$ ,  $u \in R^r$ ,  $A_0, A, B$  – постоянные матрицы соответствующих размеров,  $x_0 \in R^n$ ,  $\det A_0 = 0$ .

Пусть система (1) удовлетворяет условию совместности [1]. Тогда ее решение может быть представлено в виде

$$x(t) = e^{A_0^d A t} A_0 A_0^d q + \int_0^t e^{A_0^d A(t-s)} A_0^d B u(s) ds + \\ + (E_n - A_0 A_0^d) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (A_0 A^d)^i B u^{(i)}(t), \quad (2)$$

$$x(0) = x_0 = A_0 A_0^d q + (E_n - A_0 A_0^d) \times \\ \times \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (A_0 A^d)^i A^d B u^{(i)}(0), \quad (3)$$

где  $A_0^d$  и  $A^d$  – обратные матрицы Драйзина к матрицам  $A_0$  и  $A$  соответственно; число  $k$  – индекс матрицы  $A_0$ ,  $q \in R^n$ ,  $u^{(i)}(0) \in R^r$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ .

Здесь мы предполагаем, что управление  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , – это достаточно гладкая  $r$ -мерная вектор-функция. В данном случае можно показать, что решение (2) системы (1) является выходом системы

$$\dot{Y} = \hat{A}Y + \hat{B}v, \quad x = CY \quad (4)$$

с начальным условием

$$Y(0) = Y_0 = (q, u^i(0), i = 1, 2, \dots, k),$$

где  $Y = (y, u^1, \dots, u^k)$ ,  $v = u^{(k)}$ ,  $\hat{A} = (\hat{A}_{pq})$ ,  $\hat{B} = (\hat{B}_{p1})$ ,  $p = 1, \dots, k+1$ ,  $q = 1, \dots, k+1$  представляют собой блочные матрицы. Кроме того,

$$\hat{A}_{11} = A_0^d A, \hat{A}_{12} = A_0^d B;$$

$$\hat{A}_{23} = \hat{A}_{34} = \dots = \hat{A}_{kk+1} = E_r, \hat{A}_{ij} = 0,$$

для всех остальных индексов  $p$  и  $q$

$$\hat{B}_{k+1,1} = E^r, \hat{B} = 0, i = 1, \dots, k,$$

$$C = [A_0 A_0^d, (E_n - A_0 A_0^d) A^d B, \dots,$$

$$(-1)^{k-1} (E_n - A_0 A_0^d) (A_0 A^d)^{k-1} A^d B].$$

Мы полагаем, что

$$\Omega_0 = \{z \in R^n \mid z = A_0 A_0^d q + (E_n - A_0 A_0^d) \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (A_0 A^d)^i A^d B u^{(i)}(0), q \in R^n,$$

$$u^{(i)}(0) \in R^r, i = \overline{0, k-1}\}.$$

Пусть  $H$  – постоянная  $n \times n$ -матрицы.

**Определение 1.** Система (1) называется  $H$ -управляемой, если для каждого  $x_0(\cdot) \in \Omega_0$  существует момент времени  $t_1 < +\infty$  и гладкое управление  $u(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , такие, что  $x(0) = x_0$  и  $Hx(t_1) = 0$ .

**Определение 2.** Система (1) называется полностью  $H$ -управляемой, если для каждого  $x_0(\cdot) \in \Omega_0$  существует момент времени  $t_1 < +\infty$  и гладкое управление  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , такие, что решение  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , системы (1) обладает свойством  $x(0) = x_0$  и  $Hx(t) \equiv 0, t \geq t_1$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Система (1)  $H$ -управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \left( H A_0 A_0^d, (-1)^j H (E_n - A_0 A_0^d) \times \right.$$

$$\left. \times (A_0 A^d)^j A^d B, j = \overline{0, k-1}; \right.$$

$$H (A_0^d A)^i A_0^d B, i = \overline{0, n-1} \Big) = \text{rank} \left( (-1)^j H \times \right.$$

$$\left. \times (E_n - A_0 A_0^d) (A_0 A_0^d)^j B, j = \overline{0, k-1}; \right.$$

$$\left. H (A_0^d A)^i A_0^d B, i = \overline{0, n-1} \right).$$

**Теорема 2.** Система (1) полностью  $H$ -управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \left( L, \bar{H} (A_0^d A)^i A_0^d B, j = \overline{0, k-1} \right) =$$

$$= \text{rank} (L, \bar{H}),$$

где

$$L = \begin{bmatrix} H_1 & \dots & H_k \\ HA_0^d B & \dots & H_{k-1} \\ H(A_0^d A)B & \dots & H_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ H(A_0^d A)^{n+k-2} A_0^d B \dots H(A_0^d A)^{n-1} A_0^d B \end{bmatrix},$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} HA_0^d A_0 \\ HA_0^d A \\ H(A_0^d A)^2 \\ \dots \\ H(A_0^d A)^{n+k-1} \end{bmatrix},$$

$$H_{j+1} = (-1)^j H (E_n - A_0 A_0^d) (A_0 A^d)^j A^d B,$$

$$i = \overline{0, k-1}.$$

Доказательства теорем 1 и 2 легко вытекают из представления системы (1) в виде (4) с использованием результатов [2].

Рассмотрим системы (1) и (4). Введем соответствия

$$x(t) \rightarrow X_t, u(t) \rightarrow U_t, y(t) \rightarrow Y_t,$$

$$u^i(t) \rightarrow U_t^i, p \rightarrow \Delta. \quad (5)$$

Здесь  $X_t, Y_t$  и  $U_t, U_t^i$  – матрицы размеров  $n \times r$  и  $r \times r$  соответственно;  $p \equiv \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования, а  $\Delta$  – оператор сдвига

$$\left( \Delta^i X_t = X_{t+i}; \Delta^i U_t = U_{t+i}; \Delta^i U_t^j = U_{t+i}^j \right).$$

Используя уравнение (4) и соответствия (5), мы переходим к следующим рекуррентным соотношениям:

$$Y_{t+1} = A_0^d A Y_t + A_0^d B U_t^1, U_{t+1}^i = U_t^{i+1}, j = \overline{0, k-1},$$

$$U_{t+1}^k = U_{t+k}, X_t = C [Y_t, U_t^1, \dots, U_t^k], t \geq 0, \quad (6)$$

при условии, что

$$Y_t \equiv 0, t = 0, \dots, k-1, U_t \equiv 0, t \neq k,$$

$$U_k = E_r.$$

Вышеприведенные соотношения (6) называются *определяющими уравнениями* для системы управления (1).

Через  $X_i^*$  мы обозначим решение определяющих уравнений (6) с условиями

$$Y_1 = E_n \text{ и } U_i \equiv 0, t \geq 0.$$

Тогда теоремы 1 и 2 можно сформулировать в терминах решений определяющих уравнений.

**Теорема 1\*.** Система (1) является H-управляемой тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \text{rank}(HX_1^*, \dots, HX_i^*, \dots, HX_{n+k}^*) = \\ = \text{rank}(HX_i^*, i = \overline{1, n+k}). \end{aligned}$$

**Теорема 2\*.** Система (1) полностью H-управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}(L, \bar{H}X_i, i = \overline{1, n+k}) = \text{rank}(L\bar{H}),$$

где

$$L = \begin{bmatrix} HX_k & \dots & HX_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ HX_{n+2k-1} & \dots & HX_{n+k} \end{bmatrix},$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} HX_1^* \\ \dots \\ HX_{n+k}^* \end{bmatrix}.$$

Полученные результаты могут быть перенесены на дискретные системы и системы с запаздыванием [3, 4].

Например, рассмотрим систему управления вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_2u(t-h) + \\ + \int_0^h B(s)u(t-s)ds, t \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

с начальным условием

$$x_0 = x(0), u_0(\cdot) = \{u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0)\},$$

где  $x \in R^n$ ,  $u \in R^r$ ;  $A, B_1, B_2$  – постоянные матрицы соответствующих размеров;  $B(t)$  –  $n \times r$ -матрица-функция;  $x_0$  –  $n$ -вектор;  $\varphi(t)$  – кусочно-непрерывная  $n$ -векторная функция.

**Определение 3.** Система (7) называется полностью H-управляемой для любого вектора  $x_0 \in R^n$  и любой кусочно-непрерывной функции  $\varphi(t), t \in [-h, 0)$ , если существуют момент времени  $t_1, 0 < t_1 < +\infty$ , и управление  $u(t)$ ,

$t \in [0, t_1 - h], u(t) \equiv 0, t \geq t_1 - h$ , такие, что траектория  $x(t), t \geq 0$ , системы (7) удовлетворяет условиям

$$x(0) = x_0, Hx(t) \equiv 0, t \geq t_1.$$

Предположим, что в любой момент времени  $t, t \geq 0$ , состояние  $x(t)$  системы (7) неизвестно, а управление  $u(t), t \geq 0$ , выбирается из условия, что выход

$$y(t) = Hx(t), t \geq 0, y_0 = y(0) \quad (8)$$

системы (7) известен.

**Определение 4.** Система (7) называется полностью управляемой по отношению к выходу (8), если для любого  $m$ -вектора  $y_0$  и любой кусочно-непрерывной функции  $\varphi(t), t \in [-h, 0)$ , существуют момент времени  $t_1, 0 < t_1 < +\infty$ , и управление  $u(t), t \in [0, t_1 - h], u(t) \equiv 0, t \geq t_1 - h$ , такие, что траектория  $y(t) \equiv 0, t \geq t_1$ .

**Теорема 3.** Система (7) является полностью H-управляемой тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}(\tilde{H}A^i B_h, i = \overline{0, k-1}) = \text{rank}(\tilde{H}), \quad (9)$$

где

$$B_h = B_1 + e^{-Ah} B_2 + \int_0^h e^{-As} B(s) ds, t \geq 0,$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} HA^i \\ i = \overline{0, k-1} \end{bmatrix},$$

здесь  $k$  – степень минимального многочлена матрицы  $A$ .

**Доказательство.** Пусть

$$x(t) = p(t) + \int_0^h M(s)u(t-s)ds, t \geq 0, \quad (10)$$

где  $p(t)$  – некоторая  $n$ -векторная функция, а  $M(t), t \in [0, h]$  – некоторая  $n \times r$ -матрица. Тогда из (7) следует, что

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) + M(0)u(t) - M(h)u(t-h) + \\ + \int_0^h M'(s)u(t-s)ds = Ap(t) + \\ + \int_0^h AM(s)u(t-s)ds + B_1u(t) + \\ + B_2u(t-h) + \int_0^h B(s)u(t-s)ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь предположим, что  $n \times r$ -матричная функция  $M(s)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dM(s)}{ds} = AM(s) + B(s), s \in [0, h] \quad (12)$$

с начальным условием

$$M(h) = -B_2. \tag{13}$$

Исходя из (12) и (13), имеем

$$M(s) = -e^{A(s-h)}B_2 + \int_0^s e^{A(s-\tau)}B(\tau)d\tau.$$

Итак, на основании равенства (11) получим, что  $n$ -векторная функция  $p(t), t \geq 0$ , удовлетворяет системе управления вида

$$\dot{p}(t) = Ap(t) + (B_1 + e^{-Ah}B_2 + \int_0^h e^{-As}B(s)ds)u(t) \tag{14}$$

с начальным условием

$$p(0) = x_0 + \int_0^h (-e^{-A(s+h)}B_2 + \int_h^s e^{-A(s+\tau)}B(\tau)d\tau)\varphi(s)ds.$$

Ясно, что система (7) является полностью  $H$ -управляемой тогда и только тогда, когда система (14) также является полностью  $H$ -управляемой. Из результатов работы [2] следует, что система (14) является полностью  $H$ -управляемой тогда и только тогда, когда выполняется равенство (9). Теорема доказана.

**Теорема 4.** Система (7) (имеется в виду, что  $B(s) \equiv 0, s \in [0, h]$ ) управляема по выходу (8) тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}(\tilde{H}A^i B_h^*, i = \overline{0, k-1}) = \text{rank}(\bar{H}, H_{B_1}, H_{B_2}, \tilde{H}A^i B_h^*, i = \overline{0, k-1}),$$

где

$$H_{B_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & HB_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & HB_i & \dots & HA^{k-3}B_i \\ HB_i & HAB_i & \dots & HA^{k-2}B_i \end{bmatrix}, i = 1, 2;$$

$$B_h^* = B_1 + e^{-Ah}B_2.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

**Заключение.** В статье показано, что траектории дескрипторных систем являются решениями специально сконструированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых известны критерии управляемости. Получены параметрические критерии  $H$ -управляемости, полной  $H$ -управляемости и полной управляемости по отношению к выходу системы, записанные в терминах решений определяющих уравнений.

### Список литературы

1. Campbell S. L., Meyer C. D., Rose N. J. Applications of the drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients // SIAM J. Appl. Math. 1976. Vol. 31, № 3. P. 411–425.
2. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. К проблеме полной управляемости динамических систем // Дифференциальные уравнения. 1979. Вып. 15, т. 9. С. 1707–1709.
3. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. Полная управляемость на подпространство линейных систем с запаздыванием по управлению // Вестник БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2009. № 3. С. 130–132.
4. Игнатенко В. В., Крахотко В. В., Размыслович Г. П. К управляемости линейных систем дескрипторными регуляторами // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 1. С. 5–7.

### References

1. Campbell S. L., Meyer C. D., Rose N. J. Applications of the drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients. *SIAM J. Appl. Math.*, 1976, vol. 31, no. 3, pp. 411–425.
2. Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. On remark on complete controllability dynamic systems. *Differentsial'nyye uravneniya* [Differential equation], 1979, issue 15, vol. 9, pp. 1707–1709 (In Russian).
3. Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. Complete controllability on the subspas of linear systems with delay in control. *Vestnik BGU* [Bulletin of BSU], series 1, Physics. Mathematics. Informatics, 2009, no. 3, pp. 130–132 (In Russian).
4. Ignatenko V. V., Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. On controllability of linear systems by descriptor regulators. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 1, pp. 5–7 (In Russian).

### Информация об авторах

**Крахотко Валерий Васильевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры методов оптимального управления. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: krakhotko@bsu.by

**Размыслович Георгий Прокофьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный университет (220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4, Республика Беларусь). E-mail: razmysl@bsu.by

**Игнатенко Василий Васильевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ihnatsenko@tut.by

### Information about the authors

**Krakhotko Valeriy Vasil'yevich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Optimal Control Methods. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: krakhotko@bsu.by

**Razmyslovich Georgiy Prokof'yevich** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: razmysl@bsu.by

**Ignatenko Vasiliy Vasil'yevich** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ihnatsenko@tut.by

*Поступила после доработки 03.01.2020*

УДК 621.928.1

**А. М. Волк**

Белорусский государственный технологический университет

**ТОНКОДИСПЕРСНАЯ СЕПАРАЦИЯ ЖИДКОСТИ**

Процессы сепарации газожидкостных потоков имеют важное значение при массообмене, выпарке, ректификации, мокрой очистке газа, промышленной подготовке добываемого природного газа. Разделения многофазных систем выступают составной частью многих технологических процессов в химической, пищевой, нефтехимической, микробиологической, энергетической и других отраслях промышленности. В этих процессах определяющим фактором является движение частиц в сплошной газовой среде.

В данной работе исследована гидродинамика закрученного газового потока в сепараторах элементного типа, рассмотрены действующие на жидкую сферическую частицу силы. Составлена математическая модель процесса сепарации в газожидкостных потоках, позволяющая определить минимальный размер улавливаемых капель с учетом изменения конструктивных, технологических и реологических параметров. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании сепараторов.

**Ключевые слова:** сепарация, закрученный газожидкостный поток, действующие силы, математическая модель, минимальный размер.

**A. M. Volk**

Belarusian State Technological University

**LIQUID SEPARATION**

The separation of gas-liquid flows is important for mass transfer, recovery, distillation, wet gas purification, field preparation of produced natural gas. Separations of multiphase systems are an integral part of many technological processes in the chemical, food, petrochemical, microbiological, energy and other industries. In these processes, the determining factor is the movement of particles in a continuous gas medium.

In this work, the hydrodynamics of a swirling gas flow in elementary separators is investigated, the forces acting on a liquid spherical particle are considered. A mathematical model of the separation process in gas-liquid flows has been compiled, which allows to determine the minimum size of trapped drops, taking into account changes in structural, technological and rheological parameters. The obtained results can be used in the design of separators.

**Key words:** separation, swirling gas-liquid flow, acting forces, mathematical model, minimum size.

**Введение.** Массообменные аппараты широко применяются в химической и нефтехимической промышленности. Одной из основных проблем этих аппаратов является капельный унос жидкой фазы. Межтарельчатый унос снижает эффективность массопередачи, а унос между аппаратами нарушает работу технологических установок в целом. Задача предотвращения уноса капель жидкости с газовым потоком актуальна также при выпарке, ректификации, мокрой очистке газов, промышленной подготовке добываемого природного газа [1].

Проблемы уноса могут быть успешно решены при использовании центробежных сепарационных устройств. Основным силовым фактором в них является инерционная центробежная сила, значительно превышающая силу тяжести, что предопределяет их высокую эффективность. К тому же они компактны и менее металлоемки [2].

На рис. 1 схематично представлены некоторые конструкции аппаратов элементного типа,

разработанные в Белорусском государственном технологическом университете [3].

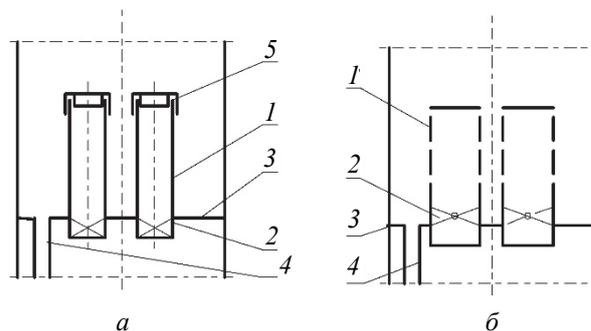


Рис. 1. Центробежные сепараторы элементного типа:

- а* – сепарационные элементы с отводом жидкости через зазор в верхней части; *б* – сепарационные элементы с отводом жидкости через щели сетчатого патрубка;  
 1 – патрубок; 2 – многолопастный завихритель;  
 3 – тарелка; 4 – сливная труба;  
 5 – отбойный колпачок

Центробежные сепарирующие устройства включают центробежные патрубки, установленные на общей тарелке. В нижней части они снабжены завихрителем газового потока, в верхней – устройством для отделения жидкой фазы. Центробежные сепарационные элементы работают в режиме восходящего прямотока. Завихрители чаще всего выполняются лопастными или в виде тангенциальных прорезей. Устройства для отделения жидкостей – колпачок, боковые прорези, сетчатая поверхность.

В теоретических работах излагаются вопросы движения частиц в закрученном газовом потоке без учета изменения скорости газа по радиусу элемента и других факторов, влияющих на эффективность сепарации [4].

В [5] дан более глубокий анализ сил, действующих на каплю при движении ее в закрученном газовом потоке, однако решение уравнений выполнено применительно к процессам массообмена только для крупных капель ( $>0,3$  мм).

Процессы тонкой сепарации исследованы недостаточно. Возникает необходимость расширить диапазон размеров исследуемых частиц при различных геометрических размерах сепаратора для газожидкостных потоков с различными свойствами, выполнить расчет траектории капель малого размера.

Для исследования процессов разделения многофазных потоков необходимо математическое моделирование движения закрученного газового потока как внутри непроницаемого цилиндра, так и при оттоке газа на проницаемых поверхностях. Следует также исследовать движение жидких частиц в потоке газа.

**Математическая модель и результаты расчетов.** Принимаем, что частицы имеют сферическую форму радиусом  $a$ , плотностью  $\rho_{ж}$  и массой  $m$ . Скорость частицы обозначим через  $V$ , а скорость газового потока – через  $W$ .

Для исследования гидродинамики установившегося движения закрученного газового потока внутри цилиндра радиусом  $R$  рассмотрим уравнения Навье – Стокса и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  [6–8]. Для осесимметричных потоков принимаем  $\partial W / d\varphi = 0$ . При движении закрученных потоков внутри цилиндра радиальная составляющая скорости  $W_r$  незначительна и, как правило, в расчетах не учитывается. Поэтому можно принять  $W_r = 0$ . Для газовых потоков также не учитывается сила тяжести. Тогда из уравнения неразрывности следует, что

$$\frac{\partial W_z}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Это означает, что профиль осевой составляющей скорости не изменяется по длине цилиндра.

Принятые условия соответствуют коротким трубам и подтверждаются экспериментальными исследованиями [9]. В связи с этим уравнения Навье – Стокса преобразуются к виду [10]

$$\frac{dP}{dr} = \rho \frac{W_\varphi^2}{r}, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 W_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_\varphi}{\partial r} - \frac{W_\varphi}{r^2} = 0. \quad (3)$$

За граничные условия принимаем

$$W_\varphi = 0 \text{ при } r = R, \quad (4)$$

$$\bar{W}_\varphi = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R W_\varphi \cdot 2\pi r dr = 2 \int_0^1 W_\varphi \tilde{r} d\tilde{r}, \quad (5)$$

где  $\tilde{r} = r / R$ .

С учетом граничных условий и непрерывности профиля получим

$$W_\varphi = \begin{cases} \frac{3}{4} \bar{W}_\varphi \frac{1 + \tilde{r}_{\max}}{\tilde{r}_{\max}^2} \tilde{r}, & 0 \leq \tilde{r} < \tilde{r}_{\max}, \\ \frac{3}{4} \frac{\bar{W}_\varphi}{1 - \tilde{r}_{\max}} \left( \frac{1}{\tilde{r}} \right), & \tilde{r}_{\max} \leq \tilde{r} \leq 1, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\tilde{r}_{\max}$  – значение  $r$ , соответствующее максимуму  $W_\varphi$ .

Подставляя (6) в выражение (2) и интегрируя последнее, находим разность давлений, действующих на стенку цилиндра, создаваемых закрученным газовым потоком:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \rho \int_0^1 \frac{W_\varphi^2}{\tilde{r}} d\tilde{r} = \\ &= \frac{9}{16} \left( 1 + \frac{1}{\tilde{r}_{\max}} + \frac{1}{2\tilde{r}_{\max}^2} + 2 \ln \tilde{r}_{\max} - \frac{\tilde{r}_{\max}^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Для случая проницаемой поверхности, когда максимум расположен достаточно близко к стенке цилиндра, т. е.  $\tilde{r}_{\max} \cong 1$ :

$$W_\varphi = \frac{3}{2} \bar{W}_\varphi \tilde{r}, \quad \Delta P = \frac{9}{8} \rho \bar{W}_\varphi^2. \quad (8)$$

Касательная составляющая  $\bar{W}_\varphi$  средней скорости  $\bar{W}$  газового потока зависит от ее среднерасходной составляющей  $\bar{W}_z$  в элементе и угла закрутки  $\beta$  потока статическим закручивателем [6]. Можно принять, что

$$\bar{W}_\varphi = \bar{W}_z \operatorname{tg} k \beta, \quad (9)$$

где  $k$  – коэффициент, учитывающий отклонение угла закрутки потока от угла наклона лопастей завихрителя.

Анализ экспериментальных данных для центробежных элементов с лопастным завихрителем, имеющим угол наклона лопастей к горизонту в пределах 30–45°, дает значение  $k = 0,83$  [6].

Рассмотрим осевую составляющую закрученного газового потока в проницаемом цилиндрическом элементе. Уравнение неразрывности имеет решение  $W_r r = \text{const}$ . При скорости оттока на проницаемой поверхности  $W_0$  радиальная скорость будет  $W_r = W_0 R / r$ , градиент давления пропорционален перепаду давления по длине  $\partial P / dz = -(P_1 - P_2) / L$  и уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 W_z}{dr^2} - \frac{1}{r} \left( \frac{W_0 R}{v} - 1 \right) \frac{dW_z}{dr} = -\frac{1}{\mu} \frac{P_1 - P_2}{L}. \quad (10)$$

В качестве граничных условий зададим нулевую скорость на поверхности и среднюю расходную скорость по поперечному сечению:

$$W_z|_{r=R} = 0; \quad \bar{W}_z = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R W_z \cdot 2\pi r dr = 2 \int_0^1 W_z \tilde{r} d\tilde{r}. \quad (11)$$

Обозначив  $\alpha = W_0 R / v$ , непосредственным интегрированием получим

$$W_z = \bar{W}_z (1 - \tilde{r}^\alpha) + \frac{(P_1 - P_2)R}{4\rho L W_0} \left( 1 - 2\tilde{r}^2 - \frac{3}{2}\tilde{r}^\alpha \right).$$

С учетом касательных напряжений  $\tau$  на проницаемой поверхности [10]

$$\tau|_{r=R} = -\rho \bar{W}_z W_0 = -\frac{P_1 - P_2}{2L} R \quad (12)$$

получается следующая зависимость для осевой составляющей закрученного газового потока в проницаемом цилиндре:

$$W_z = \bar{W}_z \left( \frac{1}{2} + \tilde{r}^2 - \frac{3}{2}\tilde{r}^\alpha \right). \quad (13)$$

Скорость оттока сплошной среды определяется свойствами проницаемой поверхности и перепадом давления на ней [11]. При турбулентном режиме движения среды через отверстия в стенке на основании уравнения Бернулли получаем квадратичный закон [12]:

$$W = \gamma \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}. \quad (14)$$

Коэффициент расхода  $\gamma$  зависит от свойств проницаемой поверхности. И. Е. Идельчиком [13] при обработке экспериментальных данных получена формула зависимости коэффициента расхода  $\gamma$  от относительной площади  $\bar{f}$  отверстий:

$$\gamma^{-2} = \frac{\left( 0,707\sqrt{1-\bar{f}} + 1 + \bar{f} \right)^2}{\bar{f}^2}. \quad (15)$$

Изменение средней осевой составляющей скорости газового потока в проницаемом элементе описывается уравнением

$$d\bar{W}_z = -\frac{2\pi R \bar{W}_z dz}{\pi R^2} = -\frac{2\bar{W}_z}{R} dz. \quad (16)$$

В основном потоке, вне пограничного слоя, или в непроницаемом элементе принимая составляющую  $\tilde{r}^\alpha$ , равной нулю, получим

$$W_z = \bar{W}_z \left( \frac{1}{2} + \tilde{r}^2 \right). \quad (17)$$

Данная зависимость согласуется с результатами, описанными в работе [14].

Одной из задач исследования процесса разделения газожидкостных потоков в центробежных элементах является определение траектории движения капель сепарируемой жидкой фазы.

Рассмотрим движение одиночной частицы диаметром  $a$  и массой  $m$  в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Ось  $Oz$  направлена вертикально вверх по оси сепарационного элемента.

Масса частицы будет:

$$m = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi a^3. \quad (18)$$

Пусть  $V_r, V_\varphi, V_z$  – радиальная, касательная и осевая составляющие скорости движущейся частицы соответственно.

Уравнения движения одиночной частицы имеют вид

$$\begin{cases} m \left( \frac{dV_r}{dt} - \frac{V_\varphi^2}{r} \right) = F_r, \\ m \left( \frac{dV_\varphi}{dt} + 2 \frac{V_\varphi V_r}{r} \right) = F_\varphi, \\ m \frac{dV_z}{dt} = F_g + F_z. \end{cases} \quad (19)$$

В составленную систему уравнений входит сила тяжести

$$\vec{F}_g = mg \quad (20)$$

и составляющие  $F_r, F_\varphi, F_z$  силы гидродинамического воздействия

$$\vec{F} = \zeta \cdot \frac{1}{2} \rho |\vec{W} - \vec{v}| (|\vec{W} - \vec{v}|) \pi a^2. \quad (21)$$

Остальные силы как минимум на порядок меньше, и ими можно пренебречь [15, 16].

Коэффициент сопротивления сферической частицы зависит от числа Рейнольдса [17]:

$$\text{Re}_a = \frac{2a|\vec{W} - \vec{V}|}{\nu} \quad (22)$$

При движении частицы в вязкой среде наблюдаются ламинарный, переходный турбулентный и турбулентный режимы обтекания частицы. Коэффициент сопротивления соответственно определяется следующими зависимостями:

$$\zeta = \begin{cases} 24\text{Re}_a^{-1}, & \text{Re}_a < 2, \\ 18,5\text{Re}_a^{-0,6}, & 2 \leq \text{Re}_a \leq 500, \\ 0,44, & \text{Re}_a > 500. \end{cases} \quad (23)$$

#### Расчет траектории движения частицы.

Полученный анализ сил позволил рассчитать траекторию движения жидких частиц в газовом потоке и оценить эффективность сепарации.

Система дифференциальных уравнений (19) решалась с использованием стандартных операторов системы компьютерной математики Mathcad. Составленная программа позволяла учесть как геометрические параметры сепараторов, так и гидродинамические факторы процесса.

Расчетные данные выводились в виде графиков и таблиц.

При решении дифференциальных уравнений определялся минимальный диаметр капель, которые могут достигнуть стенки сепарационного элемента в зависимости от диаметра элемента  $D$ , длины элемента  $L$ , угла наклона лопастей завихрителя  $\beta$ , средней расходной скорости газа в элементе  $\bar{W}_z$ , вязкости газа  $\mu$ , плотности газа  $\rho_r$  и жидкости  $\rho_{ж}$ . При выполнении расчетов были приняты следующие значения:  $D = 0,1 - 0,5$  м;  $L = 0,3 - 1,0$  м;  $\beta = 30^\circ$ ;  $\rho_r = 0,6$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 0,000013$  Нс/м<sup>2</sup>;  $\rho_{ж} = 1200$  кг/м<sup>3</sup>.

Результаты решения уравнений (1) представлены на рис. 2, 3.

**Заключение.** Исследовано влияние геометрических параметров сепарационного элемента и физико-химических свойств жидкости и газа на минимальный диаметр улавливаемых капель. Согласно рис. 2, диаметр и длина сепарационного элемента оказывают наиболее сильное воздействие на размер капель, достигающих стенки патрубка. Из рис. 3 следует, что угол наклона лопастей и вязкость газового потока также влияют на размер осаждаемых капель, в то время как скорость газа в элементах, плотность газа и жидкости оказывают незначительное влияние.

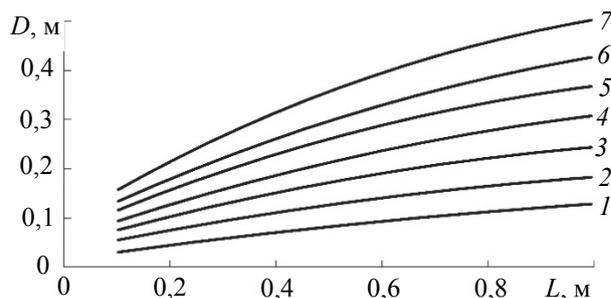


Рис. 2. Зависимость минимального диаметра улавливаемых капель от геометрических размеров сепарационного элемента:

1 – 3 мкм; 2 – 5 мкм; 3 – 7 мкм; 4 – 9 мкм; 5 – 11 мкм; 6 – 13 мкм; 7 – 25 мкм

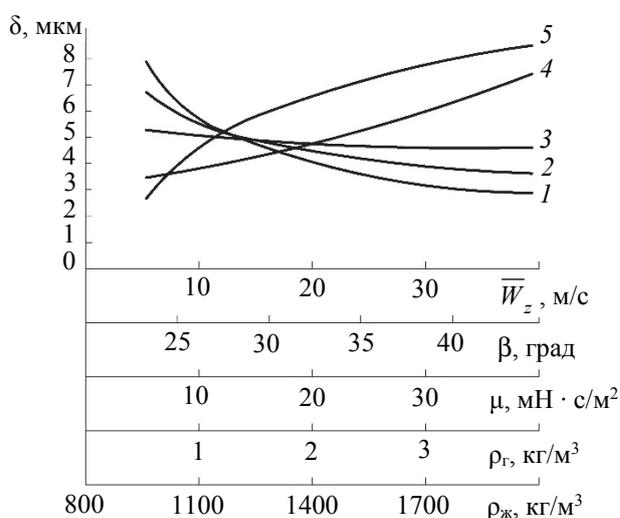


Рис. 3. Зависимость минимального диаметра улавливаемых капель от различных параметров:

1 –  $\bar{W}_z$ ; 2 –  $\rho_{ж}$ ; 3 –  $\rho_r$ ; 4 –  $\beta$ ; 5 –  $\mu$

Полученные результаты могут быть использованы для исследования процессов разделения двухфазных потоков в вихревых аппаратах.

**Обозначения.**  $a$  – диаметр частицы, м;  $R$  – радиус цилиндра, м;  $D$  – диаметр цилиндра, м;  $L$  – длина цилиндрического элемента, м;  $F_\phi, F_r, F_z$  – составляющие силы гидродинамического воздействия, Н;  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $m$  – масса частицы, кг;  $\tilde{r} = r/R$  – безразмерная радиальная координата;  $\text{Re}$  – число Рейнольдса;  $t$  – время, с;  $V_\phi, V_z, V_r$  – тангенциальная, осевая и радиальная составляющие скорости движущейся частицы соответственно, м/с;  $W_\phi, W_z, W_r$  – тангенциальная, осевая и радиальная составляющие скорости газового потока соответственно, м/с;  $\bar{W}_z$  – средняя скорость газа, м/с;  $\bar{W}_\phi$  – касательная составляющая средней скорости газа, м/с;  $\Delta P$  – перепад давления, Па/м;  $\gamma$  – коэффициент расхода;  $\bar{f}$  – относительная площадь отверстий проницаемого элемента;  $\beta$  – угол;  $k$  – коэффициент;  $\pi = 3,14159\dots$  – отношение длины

окружности к диаметру;  $\zeta$  – коэффициент сопротивления;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,  $\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ ;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\rho_r$  – плотность по-

тока газа,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность частицы жидкости,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\tau$  – касательные напряжения,  $\text{Н}/\text{м}^2$ ;  $\varphi, r, z$  – цилиндрическая система координат.

### Список литературы

1. Трифонов В. П. Сепарация газа и сокращение потерь нефти. Казань: Фен, 2002. 408 с.
2. Шкоропад Д. Е., Новиков О. П. Центрифуги и сепараторы для химических производств. М.: Химия, 1987. 256 с.
3. Левданский Э. И., Левданский А. Э. Высокоэффективные проточные процессы и аппараты. Минск: БГТУ, 2001. 234 с.
4. Ушаков С. Г., Зверев Н. И. Инерционная сепарация пыли. М.: Энергия, 1974. 168 с.
5. Медников Е. М. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981. 176 с.
6. Марков В. А., Волк А. М., Ершов А. И. Исследование оттока жидкости через отверстия прямоточно-центробежного элемента // Инженерно-физический журнал. 1991. Т. 61, № 1. С. 82–87.
7. Волк А. М., Терешко Е. В. Анализ сил, действующих на твердую частицу в сплошном потоке // Труды БГТУ. 2015. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 10–14.
8. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред: в 2 ч. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 360 с.
9. Кутепов А. М., Латкин А. С. Вихревые процессы для модификации дисперсных систем. М.: Наука, 1992. 250 с.
10. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
11. Сергеев С. П., Дильман В. В., Генкин В. С. Описание движения потока в канале с проницаемыми стенками // Теоретические основы химической технологии. 1971. Т. 5, № 4. С. 583–585.
12. Гельперин Н. И. Основные процессы и аппараты химической технологии: в 2 кн. М.: Химия, 1981. 812 с. (Серия «Процессы и аппараты химической и нефтехимической технологии».)
13. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975. 560 с.
14. Щукин В. К., Халатов А. А. Теплообмен, массообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах. М.: Машиностроение, 1982. 199 с.
15. Медников Е. М. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981. 176 с.
16. Горбис З. Р., Спокойный Ф. Е. Качественный анализ уравнений осредненного движения твердых частиц в турбулентном потоке // Теоретические основы химической технологии. 1978. Т. 12, № 5. С. 729–734.
17. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 536 с.

### References

1. Trifonov V. P. *Separatsiya gaza i sokrashcheniye poter' nefiti* [Gas separation and reduction of oil losses]. Kazan, Fen Publ., 2002. 408 p.
2. Shkoropad D. E., Novikov O. P. *Tsentrifugi i separatory dlya khimicheskikh proizvodstv* [Centrifuges and separators for chemical production]. Moscow, Khimiya Publ., 1987. 256 p.
3. Levdansky E. I., Levdansky A. E. *Vysokoeffektivnyye protochnyye protsessy i apparaty* [Highly efficient flow processes and apparatuses]. Minsk, BGTU Publ., 2001. 234 p.
4. Ushakov S. G., Zverev N. I. *Inertsionnaya separatsiya pyli* [Inertial dust separation]. Moscow, Energiya Publ., 1974. 168 p.
5. Mednikov E. M. *Turbulentnyy perenos i osazhdeniye aerorozley* [Turbulent transport and deposition of aerosols]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 176 p.
6. Markov V. A., Volk A. M., Ershov A. I. Investigation of the outflow of fluid through the openings of a straight-flow centrifugal element. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal* [Engineering Physics Journal], 1991, vol. 61, no. 1, pp. 82–87 (In Russian).
7. Volk A. M., Tereshko E. V. Analysis of forces acting on a solid particle in a continuous stream. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2015, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 10–14 (In Russian).
8. Nigmatullin R. I. *Dinamika mnogofaznykh sred: v 2 chastyakh* [Dynamics of multiphase media: in 2 parts]. Moscow, Nauka Publ., 1987. Part 1. 464 p. Part 2. 360 p.
9. Kutepov A. M., Latkin A. S. *Vikhrevyye protsessy dlya modifikatsii dispersnykh sistem* [Vortex processes for the modification of disperse systems]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 250 p.
10. Goldshtik M. A. *Vikhrevyye potoki* [Vortex flows]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1981. 366 p.

11. Sergeev S. P., Dil'man V. V., Genkin V. S. Description of flow in a channel with permeable walls. *Teoreticheskiye osnovy khimicheskoy tekhnologii* [Theoretical Foundations of Chemical Technology], 1971, vol. 5, no. 4, pp. 583–585 (In Russian).

12. Gel'perin N. I. *Osnovnyye protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii: v 2 knigakh* [The main processes and apparatuses of chemical technology: in 2 books]. Moscow, Khimiya Publ., 1981. 812 p. (Series “Processes and Apparatuses of Chemical and Petrochemical Technology”.)

13. Idel'chik I. E. *Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam* [Handbook of hydraulic resistance]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1975. 560 p.

14. Shchukin V. K., Khalatov A. A. *Teploobmen, massoobmen i gidrodinamika zakruchennykh potokov v osesimmetrichnykh kanalakh* [Heat transfer, mass transfer and hydrodynamics of swirling flows in axisymmetric channels]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1982. 199 p.

15. Mednikov E. M. *Turbulentnyy perenos i osazhdeniye aerorozley* [Turbulent transport and deposition of aerosols]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 176 p.

16. Gorbis Z. R., Spokoynyy F. E. Qualitative analysis of the equations of averaged motion of solid particles in a turbulent flow. *Teoreticheskiye osnovy khimicheskoy tekhnologii* [Theoretical Foundations of Chemical Technology], 1978, vol. 12, no. 5, pp. 729–734 (In Russian).

17. Sou S. *Gidrodinamika mnogofaznykh sistem* [Hydrodynamics of multiphase systems]. Moscow, Mir Publ., 1971. 536 p.

#### **Информация об авторе**

**Волк Анатолий Матвеевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: volk@belstu.by

#### **Information about the author**

**Volk Anatoliy Matveevich** – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: volk@belstu.by

*Поступила после доработки 16.03.2020*

УДК 517.977

**А. А. Якименко**

Белорусский государственный технологический университет

**К ВОПРОСУ О МОДАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В СЛАБОЦИКЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ**

В статье рассматривается решение задачи модального управления для одной трехмерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию в слабоциклическом случае. Дается определение задачи модального управления для исследуемой системы. При решении этой задачи применяются линейные регуляторы по типу обратной связи, содержащие как линейную, так и интегральную части. Эти регуляторы используют информацию как о текущем состоянии системы, так и векторы состояний и их производные в предыдущие моменты времени. Регуляторы получены в явной форме как элементарные функции параметров исходной системы и ее вектора состояния. Указан вид характеристического квазиполинома замкнутой этим регулятором исходной системы нейтрального типа.

**Ключевые слова:** системы нейтрального типа, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

**A. A. Yakimenka**

Belarusian State Technological University

**TO THE QUESTION OF MODAL CONTROL FOR ONE THREE-DIMENSIONAL NEUTRAL TYPE SYSTEM IN WEAKLY CYCLIC CASE**

The paper deals with the solution of the modal control problem for a three-dimensional stationary dynamic system with a delayed argument of a neutral type with one input and one state delay in weakly cyclic case. The definition of the problem of modal control for the studied system is given. To solve this problem, linear feedback regulators are used that contain both linear and integral parts. These regulators use information about the current state of the system, as well as state vectors and their derivatives at previous times. Regulators are obtained in explicit form as elementary functions of the parameters of the original system and its state vector. The characteristic quasi-polynomial of the initial neutral type system closed by this regulator is given.

**Key words:** neutral type systems, modal control, regulators, feedback control, lag.

**Введение.** Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа решение задачи модального управления значительно сложнее. В статье производится обобщение результатов, полученных в [1], на одну трехмерную систему нейтрального типа в слабоциклическом случае.

**Основная часть.** Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \\ &+ A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A_i, i=0, 1, 2$  – постоянные  $3 \times 3$ -матрицы;  $h > 0$  – постоянное запаздывание;  $b$  – ненулевой  $3$ -вектор. Не ограничивая общности, считаем  $b' = [0, 0, 1]$  («'» означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$\begin{aligned} u(t) &= q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^M q'_{ij} x^{(i)}(t-jh) + \\ &+ \int_{-h}^0 g'(s) x(t+s) ds, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $q_{00}, q_{ij}$  –  $3$ -векторы;  $g(s), s \in [-h, 0]$  – непрерывная  $3$ -вектор-функция;

$$x^{(i)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t), \quad x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

Характеристическое уравнение системы (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \det \left[ A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 \right] &\equiv \\ &\equiv \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \tilde{\alpha}_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где числа  $\tilde{\alpha}_{ij}$  вычисляются как функции матриц  $A_i$ ,  $i=0, 1, 2$ , в частности  $\tilde{\alpha}_{00} = \det A_0$ ,  $\tilde{\alpha}_{30} = 1$ ,  $\tilde{\alpha}_{33} = \det A_2$ .

**Определение 1.** Система (1) будет модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел  $\alpha_{ij}$ ,  $i=0, 1, 2, 3$ ,  $j=0, 1, 2, 3$ ,  $\alpha_{30} = 1$ , найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет следующий вид (ср. с (3)):

$$\det [A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 + bU(\lambda)] \equiv \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0,$$

где  $U(\lambda)$  – регулятор (2) в частотной области.

Рассмотрим еще одно определение модальной управляемости.

**Определение 2.** Система (1) будет модально управляема регулятором вида (2), если для любых наперед заданных чисел  $\alpha_{ij}$ ,  $i=0, 1, 2$ ,  $j=0, 1, 2$ ,  $\alpha_{20} = 1$ ,  $\alpha_{3j}$ ,  $j=0, 1, 2$ , найдется регулятор (2) такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) имеет следующий вид:

$$\det [A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h} - \lambda I_3 + bU(\lambda)] \equiv \left( \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} \right) \times (\alpha_{30} + \alpha_{31} e^{-\lambda h} + \alpha_{32} \lambda e^{-\lambda h} + \lambda) = 0.$$

Можно показать, что определения 1 и 2 эквивалентны.

Введем  $3 \times 3$ -матрицы:

$$A(\lambda) = A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + A_2 \lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda) = [A^2(\lambda)b, A(\lambda)b, b], \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим слабоциклический случай:

$$\det W(\lambda) = c(\gamma_0 + e^{-\lambda h}), (c \neq 0).$$

Пусть матрица  $A(\lambda)$  имеет следующий вид:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2 \lambda e^{-\lambda h} & c(\gamma_0 + e^{-\lambda h}) & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 1 \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 1 \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где  $\beta_i$ ,  $i=0, 1, 2$ ,  $c, \gamma_0$  – некоторые действительные числа;  $a_{ij}(\lambda)$ ,  $i=1, 2, 3$ ,  $j=1, 2, 3$  – квазиполиномы:

$$a_{ij}(\lambda) = a_{ij0} + a_{ij1} e^{-\lambda h} + a_{ij2} \lambda e^{-\lambda h},$$

здесь  $a_{ijk} \in \mathbb{R}$ ;  $k=0, 1, 2$ .

Сделаем в системе (1) замену переменной по правилу

$$x = T_1(\lambda)y,$$

где

$$T_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{11}(\lambda) + \eta_1(\lambda) & -a_{12}(\lambda) + \eta_2(\lambda) & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда система (1) с новой переменной в частотной области примет вид

$$\lambda y = \tilde{A}(\lambda)y + bU(\lambda)y, \quad (4)$$

где

$$\tilde{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0 \\ \eta_1(\lambda) & \eta_2(\lambda) & 1 \\ b_{31}(\lambda) & b_{32}(\lambda) & b_{33}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$b_{31}(\lambda) = a_{31}(\lambda) + a_{11}(\lambda)a_{21}(\lambda) - a_{11}(\lambda)\eta_1(\lambda) - a_{21}(\lambda)a_{33}(\lambda) + a_{22}(\lambda)\eta_1(\lambda) + a_{33}(\lambda)\eta_1(\lambda) - \eta_1(\lambda)\eta_2(\lambda),$$

$$b_{32}(\lambda) = a_{32}(\lambda) + a_{12}(\lambda)a_{21}(\lambda) - a_{12}(\lambda)\eta_1(\lambda) - a_{22}(\lambda)a_{33}(\lambda) + a_{22}(\lambda)\eta_2(\lambda) + a_{33}(\lambda)\eta_2(\lambda) - \eta_2^2(\lambda),$$

$$b_{33}(\lambda) = a_{22}(\lambda) + a_{33}(\lambda) - \eta_2(\lambda),$$

$\eta_1(\lambda)$ ,  $\eta_2(\lambda)$  – функции, определяемые далее.

Регулятор вида (2) в частотной области будем искать в виде

$$U_1(\lambda)y = (-b_{31}(\lambda), -b_{32}(\lambda), \eta_3(\lambda) - b_{33}(\lambda))y. \quad (5)$$

Тогда матрица  $\tilde{A}(\lambda)$  системы (4), замкнутой этим регулятором, примет вид

$$\tilde{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & 0 \\ \eta_1(\lambda) & \eta_2(\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & \eta_3(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Возможны два случая:

- i)  $\beta_2 \gamma_0 + 1 = 0$ ,
- ii)  $\beta_2 \gamma_0 + 1 \neq 0$ .

**Теорема 1.** В случае i) система (1) модально управляема регулятором вида (2) тогда и только тогда, когда  $\beta_0 - \beta_1 \gamma_0 \neq 0$ .

Пусть функции  $\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda)$  в (6) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta_1(\lambda) = & \frac{1}{c} \left( \beta_2 \frac{\alpha_{21}\beta_2 + \beta_2^2 + \alpha_{22}}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} \lambda^3 e^{-\lambda h} + \beta_2 \times \right. \\ & \times \frac{\alpha_{11}\beta_2 + 2\beta_1\beta_2 - \alpha_{22}\beta_0 + \alpha_{12} + \alpha_{10}\beta_2^2 + \alpha_{21}\beta_1 + \beta_0\beta_2^2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} \lambda^2 e^{-\lambda h} + \\ & + \beta_2 \frac{\alpha_{11}\beta_1 + 2\beta_0\beta_1\beta_2 + \beta_1^2 + \alpha_{10}\beta_0\beta_2^2 + 2\alpha_{10}\beta_1\beta_2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} + \\ & + \frac{\alpha_{00}\beta_2^2 + \alpha_{01}\beta_2 + \alpha_{02} - \alpha_{12}\beta_0 + \beta_0^2\beta_2^2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} \lambda e^{-\lambda h} + \\ & + \beta_2 \frac{\beta_0\beta_1^2 + \alpha_{10}\beta_0\beta_1\beta_2 - \alpha_{02}\beta_0 + \beta_0^2\beta_1\beta_2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} + \\ & + \frac{\alpha_{00}\beta_1\beta_2 + \alpha_{01}\beta_1 + \alpha_{10}\beta_1^2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} e^{-\lambda h} + \\ & \left. + (\alpha_{00} + \beta_0^2 + \beta_0\alpha_{10})\beta_2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2(\lambda) = & \frac{\alpha_{21}\beta_2 + \beta_2^2 + \alpha_{22}}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} \lambda^2 e^{-\lambda h} + \\ & + \frac{\alpha_{11}\beta_2 + \beta_0\beta_2^2 + \alpha_{10}\beta_2^2 + \alpha_{12} + \beta_1\beta_2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} \lambda e^{-\lambda h} + \\ & + \frac{\beta_0\beta_1\beta_2 + \alpha_{10}\beta_0\beta_2^2 + \beta_0^2\beta_2^2 + \alpha_{00}\beta_2^2}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} + \\ & + \frac{\alpha_{10}\beta_2 + \alpha_{10}\beta_1\beta_2 + \alpha_{02}}{\beta_0\beta_2 + \beta_1} e^{-\lambda h} - \beta_0 - \alpha_{10}. \end{aligned}$$

Пусть  $\eta_3(\lambda)$  в регуляторе (5) имеет вид

$$\eta_3(\lambda) = -\alpha_{30} - \alpha_{31}e^{-j\lambda h} - \alpha_{32}\lambda e^{-j\lambda h}.$$

Нетрудно проверить, что регулятор (5) решает задачу модального управления для системы (4), а регулятор

$$U(\lambda)x = U_1(\lambda)T^{-1}(\lambda)x$$

решает задачу модального управления для системы (1).

Рассмотрим случай ii). Введем обозначения:

$$\xi = \frac{\beta_0 - \beta_1\gamma_0}{1 + \beta_2\gamma_0}, \quad \delta_1 = \gamma_0 + e^{-\xi h}. \quad (7)$$

**Теорема 2.** Для того, чтобы система (1) в случае ii) была модально управляема регулятором вида (2), необходимо и достаточно выполнения условия  $\delta_1 \neq 0$ .

Пусть функции  $\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda)$  в (6) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta_1(\lambda) = & \frac{1}{c} \left( \left( \frac{-\beta_2 - \alpha_{21} + \alpha_{22}\gamma_0}{1 + \beta_2\gamma_0} \beta_2 - \alpha_{22} \right) \lambda^2 e^{-\lambda h} + \right. \\ & + \left( - \frac{(\beta_2 + \alpha_{21} - \alpha_{22}\gamma_0)(\beta_0\beta_2 + \beta_1)}{1 + \beta_2\gamma_0} - \alpha_{12} - \right. \\ & - \frac{\alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0 - \alpha_{12}\beta_2\gamma_0^2 + \alpha_{22}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 - \alpha_{21}\beta_0\beta_2\gamma_0}{(1 + \beta_2\gamma_0)^2} - \\ & - \frac{\alpha_{11}\beta_2\gamma_0 + \beta_0\beta_2 + \alpha_{10}\beta_2 + \beta_1 - \alpha_{12}\gamma_0}{(1 + \beta_2\gamma_0)^2} \beta_2 - \\ & \left. \left. - \frac{-\alpha_{21}\beta_1\gamma_0 + \alpha_{11} + \alpha_{22}\beta_1\gamma_0^2}{(1 + \beta_2\gamma_0)^2} \beta_2 \right) \lambda e^{-\lambda h} - \right. \\ & - \frac{\beta_2 + \alpha_{21} - \alpha_{22}\gamma_0}{1 + \beta_2\gamma_0} \beta_0\beta_1 e^{-\lambda h} - \frac{\beta_2 + \alpha_{21} - \alpha_{22}\gamma_0}{1 + \beta_2\gamma_0} \beta_0^2 - \\ & - \frac{3\alpha_{00}\beta_2^2\gamma_0^2 + \alpha_{12}\beta_0\gamma_0^2 - \alpha_{21}\beta_0^2\gamma_0 - \alpha_{11}\beta_0\gamma_0 + \alpha_{22}\beta_0\beta_1\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\ & - \frac{3\alpha_{00}\beta_2\gamma_0 - \beta_0\beta_1\gamma_0 + \alpha_{22}\beta_2^2\gamma_0^2 - \alpha_{21}\beta_0\beta_1\gamma_0 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\ & - \frac{-\alpha_{22}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^4 + \alpha_{21}\beta_1^2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\ & - \frac{\alpha_{00} - \beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^2 + \alpha_{01}e^{-\xi h} + 2\alpha_{10}\beta_0\beta_2\gamma_0}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\ & - \frac{-2\alpha_{11}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 + 2\alpha_{12}\beta_0\beta_2\gamma_0^3 + \alpha_{21}\beta_0\beta_1\gamma_0^2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\ & - \frac{-\alpha_{22}\beta_0\beta_1\gamma_0^3 + \alpha_{10}\beta_0 + \beta_0^2 + \beta_0^2\beta_2\gamma_0}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\ & - \frac{-2\alpha_{02}\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^4 + \alpha_{02}\beta_2^2\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\ & - \frac{-\alpha_{02}\gamma_0 e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^3 e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\ & \left. - \frac{\alpha_{10}\beta_1 e^{-\xi h} + \alpha_{00}\beta_2 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\alpha_{01}\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h} - \alpha_{11}\beta_0\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h} - \alpha_{11}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\
& \frac{\alpha_{00}\beta_2^3\gamma_0^2 e^{-\xi h} + \alpha_{01}\beta_2^2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\
& \frac{\alpha_{00}\beta_2^3\gamma_0^3 + 2\alpha_{00}\beta_2^2\gamma_0 e^{-\xi h} + \alpha_{10}\beta_1\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\
& \frac{-\alpha_{11}\beta_0\beta_2^3\gamma_0^3 + \alpha_{22}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^3 - \alpha_{21}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\
& \frac{-\alpha_{11}\beta_1\gamma_0 e^{-\xi h} - \alpha_{22}\beta_1^2\gamma_0^3 e^{-\xi h} + \alpha_{10}\beta_0\beta_2^3\gamma_0^2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\
& \frac{\alpha_{10}\beta_0\beta_2 e^{-\xi h} + \alpha_{12}\beta_1\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\
& \frac{\beta_0^2\beta_2 e^{-\xi h} - \beta_1^2\gamma_0 e^{-\xi h} + \beta_0\beta_1 e^{-\xi h} - \alpha_{22}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\
& \frac{\alpha_{21}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^3 + \alpha_{12}\beta_1\beta_2\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\
& \frac{\alpha_{22}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h} - \alpha_{21}\beta_0^2\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h} - \alpha_{11}\beta_1\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\
& \frac{-\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0 + \alpha_{10}\beta_0\beta_2^2\gamma_0 e^{-\xi h} - \alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \\
& \left( \frac{-\alpha_{12}\beta_2\gamma_0^2 + \alpha_{22}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 - \alpha_{21}\beta_0\beta_2\gamma_0 + \alpha_{11}\beta_2\gamma_0 + \beta_0\beta_2}{(1 + \beta_2\gamma_0)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_{10}\beta_2 + \beta_1 - \alpha_{12}\gamma_0 - \alpha_{21}\beta_1\gamma_0 + \alpha_{11} + \alpha_{22}\beta_1\gamma_0^2}{(1 + \beta_2\gamma_0)^2} \right) \beta_1 e^{-\lambda h} - \\
& \left( \frac{\alpha_{10}\beta_2^2\gamma_0 - \alpha_{12}\beta_2\gamma_0^2 + \alpha_{22}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 - \alpha_{21}\beta_0\beta_2\gamma_0}{(1 + \beta_2\gamma_0)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_{11}\beta_2\gamma_0 + \beta_0\beta_2 + \alpha_{10}\beta_2 + \beta_1}{(1 + \beta_2\gamma_0)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{-\alpha_{12}\gamma_0 - \alpha_{21}\beta_1\gamma_0 + \alpha_{11} + \alpha_{22}\beta_1\gamma_0^2}{(1 + \beta_2\gamma_0)^2} \right) \beta_0 - \\
& \left( \frac{\alpha_{02}\gamma_0 + 2\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0 + \alpha_{02}e^{-\xi h} - \beta_0^2\beta_2 + 2\alpha_{02}\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_{02}\beta_2^2\gamma_0^3 - \beta_1^2\beta_2\gamma_0^2 - \alpha_{12}\beta_0\beta_2^3\gamma_0^3}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_{12}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^4 + \alpha_{10}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_{12}\beta_1\beta_2\gamma_0^3 - \alpha_{12}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h} + \alpha_{21}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^2 e^{-\xi h} + \alpha_{21}\beta_0^2\beta_2\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} + \right. \\
& \left. + \frac{3\alpha_{02}\beta_2\gamma_0 e^{-\xi h} + 3\alpha_{02}\beta_2^2\gamma_0^2 e^{-\xi h} + \alpha_{02}\beta_2^3\gamma_0^3 e^{-\xi h}}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \right. \\
& \left. - \frac{2\alpha_{21}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^2 + 2\alpha_{22}\beta_0\beta_1\beta_2\gamma_0^3 - \alpha_{11}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^3 + \alpha_{11}\beta_0\beta_2\gamma_0}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} - \right. \\
& \left. - \frac{\alpha_{10}\beta_1\beta_2\gamma_0 - \alpha_{11}\beta_1\beta_2\gamma_0^2 - \alpha_{01}\beta_2\gamma_0 - \alpha_{00}\beta_2^3\gamma_0^2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} + \right. \\
& \left. + \frac{-\alpha_{10}\beta_0\beta_2^2\gamma_0 - \alpha_{11}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^2 - \alpha_{10}\beta_0\beta_2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_{01}\beta_2^3\gamma_0^3 + 2\alpha_{01}\beta_2^2\gamma_0^2 - 2\alpha_{00}\beta_2^2\gamma_0 - \alpha_{00}\beta_2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^3} \right) e^{-\lambda h} - \\
& \left( \frac{\alpha_{11}\beta_0\beta_1\gamma_0 - \alpha_{10}\beta_0^2\beta_2 - \alpha_{02}\beta_1\gamma_0^2 - \alpha_{12}\beta_0\beta_1\gamma_0^2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^4} + \right. \\
& \left. + \frac{-\alpha_{00}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^2 - \alpha_{11}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^3 - \beta_0^3\beta_2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^4} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_{01}\beta_1\gamma_0 - \alpha_{22}\beta_1^2\gamma_0^4 + \alpha_{21}\beta_1^2\gamma_0^3 - \alpha_{00}\beta_0\beta_2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^4} + \right. \\
& \left. + \frac{-\alpha_{22}\beta_0\beta_1^2\beta_2\gamma_0^4 + \alpha_{11}\beta_0^2\beta_2^2\gamma_0^2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^4} + \right. \\
& \left. + \frac{-\alpha_{11}\beta_1^2\gamma_0^2 + 2\alpha_{11}\beta_0\beta_1^2\gamma_0 + \alpha_{10}\beta_1^2\gamma_0}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^4} + \right. \\
& \left. + \frac{-\alpha_{10}\beta_0\beta_1 + \alpha_{12}\beta_1^2\gamma_0^3 - \alpha_{00}\beta_1 - \beta_1^2\gamma_0^2 + \alpha_{10}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^4} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_{21}\beta_0^2\beta_1\gamma_0 + \alpha_{01}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^3 - \alpha_{22}\beta_0^2\beta_1\gamma_0^2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^4} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_{12}\beta_1^2\beta_2\gamma_0^4 + 2\alpha_{01}\beta_1\beta_2\gamma_0^2 - 2\alpha_{00}\beta_1\beta_2\gamma_0}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^4} + \right. \\
& \left. + \frac{-\alpha_{02}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 - 2\alpha_{02}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^3 - 2\alpha_{21}\beta_0\beta_1^2\gamma_0^2}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^4} + \right. \\
& \left. + \frac{2\alpha_{22}\beta_0\beta_1^2\gamma_0^3 - 2\alpha_{02}\beta_1\beta_2\gamma_0^3 - \alpha_{02}\beta_1\beta_2^2\gamma_0^4}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^4} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_{01}\beta_0\beta_2\gamma_0 + 2\alpha_{01}\beta_0\beta_2^2\gamma_0^2 + 2\beta_0^2\beta_1\beta_2\gamma_0}{\delta_1(1 + \beta_2\gamma_0)^4} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{-\beta_0 \beta_1^2 \beta_2 \gamma_0^2 - \alpha_{02} \beta_0 \beta_2^3 \gamma_0^4 - \alpha_{11} \beta_0 \beta_1 \beta_2^2 \gamma_0^3}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^4} + \frac{\alpha_{11} \beta_0 \gamma_0 - 2\alpha_{02} \beta_2 \gamma_0^3 + \alpha_{12} \beta_1 \gamma_0^3}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^3} \\ & + \frac{-2\alpha_{21} \beta_0^2 \beta_1 \beta_2 \gamma_0^2 + 2\alpha_{22} \beta_0^2 \beta_1 \beta_2 \gamma_0^3 + \alpha_{10} \beta_0 \beta_1 \beta_2^2 \gamma_0^2}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^4} + \frac{2\alpha_{01} \beta_2 \gamma_0^2 - \alpha_{02} \beta_2^2 \gamma_0^4 - 2\alpha_{00} \beta_2 \gamma_0 + 2\beta_0 \beta_1 \gamma_0}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^3} \\ & + \frac{\alpha_{12} \beta_0 \beta_1 \beta_2^2 \gamma_0^4 + \alpha_{21} \beta_0 \beta_1^2 \beta_2 \gamma_0^3}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^4} + \frac{\alpha_{10} \beta_1 \gamma_0 - \alpha_{22} \beta_1^2 \gamma_0^4 - \alpha_{22} \beta_0^2 \gamma_0^2}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^3} \\ & + \frac{-\alpha_{12} \beta_0^2 \beta_2^2 \gamma_0^3 - \alpha_{12} \beta_0^2 \beta_2 \gamma_0^2 + \alpha_{21} \beta_0^2 \beta_2 \gamma_0}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^4} + \frac{\alpha_{21} \beta_1^2 \gamma_0^2 - \alpha_{00} + \alpha_{01} \gamma_0 - \alpha_{02} \gamma_0^2 + \alpha_{10} \beta_1 \beta_2 \gamma_0^2}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^3} \\ & + \frac{-\alpha_{22} \beta_0^3 \beta_2 \gamma_0^2 + \alpha_{11} \beta_0^2 \beta_2 \gamma_0 - \alpha_{10} \beta_0^2 \beta_2^2 \gamma_0}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^4} + \frac{-\alpha_{11} \beta_1 \beta_2 \gamma_0^3 + \alpha_{12} \beta_1 \beta_2 \gamma_0^4 - \alpha_{10} \beta_0 \beta_2 \gamma_0 + \alpha_{11} \beta_0 \beta_2 \gamma_0^2}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^3} \\ & + \frac{-\alpha_{00} \beta_0 \beta_2^3 \gamma_0^2 + \alpha_{01} \beta_0 \beta_2^3 \gamma_0^3 - 2\alpha_{00} \beta_0 \beta_2^2 \gamma_0}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^4} \left) \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi} \right), \\ & \eta_2(\lambda) = \frac{-\beta_2 + \alpha_{22} \gamma_0 - \alpha_{21} - \beta_2^2 \gamma_0 - \alpha_{21} \beta_2 \gamma_0 + \alpha_{22} \beta_2 \gamma_0^2}{(1 + \beta_2 \gamma_0)^2} \lambda e^{-\lambda h} + \\ & + \frac{-2\beta_0 \beta_2 - \beta_0 \beta_2^2 \gamma_0 - \beta_1 + \alpha_{21} \beta_1 \gamma_0 + \alpha_{12} \beta_2 \gamma_0^2 + \alpha_{22} \beta_0 \gamma_0}{(1 + \beta_2 \gamma_0)^2} e^{-\lambda h} + \\ & + \frac{-\alpha_{22} \beta_1 \gamma_0^2 + \alpha_{12} \gamma_0 - \alpha_{11} - \alpha_{21} \beta_0 - \alpha_{10} \beta_2^2 \gamma_0 - \alpha_{10} \beta_2 - \alpha_{11} \beta_2 \gamma_0}{(1 + \beta_2 \gamma_0)^2} e^{-\lambda h} + \\ & + \frac{-\alpha_{10} \beta_2^2 \gamma_0^2 - \beta_0 \beta_2^2 \gamma_0^2 - 2\beta_0 \beta_2 \gamma_0 - \alpha_{10} - 2\alpha_{10} \beta_2 \gamma_0 - \beta_0}{(1 + \beta_2 \gamma_0)^2} + \\ & + \left( \frac{-\alpha_{00} \beta_2^2 \gamma_0^2 - \alpha_{12} \beta_0 \gamma_0^2 + \alpha_{01} \beta_2^2 \gamma_0^3 + \alpha_{21} \beta_0^2 \gamma_0}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^3} + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{12} \beta_0 \beta_2 \gamma_0^3 - 2\alpha_{21} \beta_0 \beta_1 \gamma_0^2 + 2\alpha_{22} \beta_0 \beta_1 \gamma_0^3 - \alpha_{10} \beta_0 - \beta_0^2 - \beta_1^2 \gamma_0^2}{\delta_1 (1 + \beta_2 \gamma_0)^3} \right) \times \\ & \times \frac{e^{-\xi h} - e^{-\lambda h}}{\lambda - \xi}. \end{aligned}$$

Пусть  $\eta_3(\lambda)$  в регуляторе (5) имеет вид

$$\eta_3(\lambda) = -\alpha_{30} - \alpha_{31} e^{-j\lambda h} - \alpha_{32} \lambda e^{-j\lambda h}.$$

Нетрудно проверить, что регулятор (5) решает задачу модального управления для системы (4), а регулятор

$$U(\lambda)x = U_1(\lambda)T^{-1}(\lambda)x$$

решает задачу модального управления для системы (1).

**Закключение.** Таким образом, полученные регуляторы решают задачу модального управления для рассматриваемой системы в слабоциклическом случае.

**Список литературы**

1. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.

**References**

1. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).

**Информация об авторе**

**Якименко Андрей Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

**Information about the author**

**Yakimenka Andrei Aliaksandravich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила после доработки 30.03.2020

УДК 512.815.6

**Н. П. Можей**

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

**ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Исследование линейных групп Ли сопряжено, с одной стороны, с более общей задачей изучения произвольных линейных групп, с другой стороны, линейные группы Ли тесно связаны с алгебраическими группами. Цель работы – описание с точностью до сопряженности подалгебр алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ . Определены основные понятия: линейная алгебра Ли, разделяющая алгебра Ли, разделяющая оболочка, автосопряжение, специальное автосопряжение, подалгебра Леви – Картана, линейный нильрадикал, подалгебра Мальцева. Приведен алгоритм классификации разделяющих алгебр Ли с данным линейным нильрадикалом, а именно: сначала строится нормализатор нильпотентной подалгебры, далее фиксируется некоторая подалгебра Мальцева нормализатора и строится разделяющая алгебра Ли, потом, с точностью до сопряженности, описываются подалгебры алгебры Мальцева, являющиеся редуцируемыми, и выписываются разделяющие подалгебры. Затем решается задача классификации неразделяющих линейных алгебр Ли с данной разделяющей оболочкой. С применением этих алгоритмов проведено в явном виде описание линейных алгебр Ли на четырехмерном пространстве. Алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

**Ключевые слова:** нильпотентный эндоморфизм, линейная группа Ли, алгебра Ли, разделяющая алгебра Ли.

**N. P. Mozhey**

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**LINEAR LIE ALGEBRAS IN FOUR-DIMENSIONAL SPACE**

The study of linear Lie groups is connected, on the one hand, with the more general problem of studying arbitrary linear groups, on the other hand, linear Lie groups are closely connected with algebraic groups. The purpose of the work is a description up to conjugacy of subalgebras of a Lie algebra  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ . The basic concepts are defined – linear Lie algebra, dividing Lie algebra, dividing cover, auto-conjugation, special auto-conjugation, Levi – Cartan subalgebra, linear nilradical, Maltsev’s subalgebra. The classification algorithm for dividing Lie algebras with a given linear nilradical is presented, namely: first, the normalizer of the nilpotent subalgebra is constructed, then a certain Maltsev’s subalgebra of normalizer is fixed and a dividing Lie algebra is constructed, then, up to conjugacy, the subalgebras of the Maltsev’s algebra that are reductive are described and written out dividing subalgebras. Then the problem of classifying non-dividing linear Lie algebras with a given dividing cover is solved. Using these algorithms, an explicit description of linear Lie algebras on four-dimensional space is carried out. The algorithms described in the work can be computerized and used to solve similar problems in large dimensions.

**Key words:** nilpotent endomorphism, linear Lie group, Lie algebra, dividing Lie algebra.

**Введение.** Исследование линейных групп Ли сопряжено с более общей задачей изучения произвольных линейных групп, о таких группах см., например, [1, 2]. Линейные группы Ли также тесно связаны с алгебраическими группами над полями  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ . Подалгебры алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ , состоящие из нильпотентных эндоморфизмов, описаны автором в работе [3]. Целью данной работы является описание любых подалгебр алгебр Ли  $\mathfrak{gl}(4, P)$ , где  $P = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , с точностью до сопряженности.

**Основная часть.** Пусть  $V$  – фиксированное конечномерное векторное пространство над полем нулевой характеристики. Напомним, что подалгебры алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(V)$  называются *линейными алгебрами Ли*. Линейная алгебра Ли называется *разделяющей*, если она содержит полупростую

и нильпотентную компоненты каждого своего элемента [4]. *Разделяющей оболочкой* линейной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  называется минимальная разделяющая линейная алгебра Ли, содержащая  $\mathfrak{g}$ , она обозначается как  $e(\mathfrak{g})$  [4].

Группа  $GL(V)$  действует на алгебре Ли  $\mathfrak{gl}(V)$  при помощи ее автоморфизмов:

$$\varphi \cdot x = \varphi \cdot x \cdot \varphi^{-1},$$

где  $\varphi \in GL(V)$  и  $x \in \mathfrak{gl}(V)$ . Если  $n$  – нильпотентный эндоморфизм пространства  $V$ , то

$$(\exp \operatorname{ad} n)(x) = (\exp n) \cdot x \cdot (\exp(-n)) = (\exp n) \cdot x$$

для всех  $x \in \mathfrak{gl}(V)$ . Если  $\mathfrak{g}$  – линейная алгебра Ли (т. е.  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ ), то элементы группы

$$A(\mathfrak{g}) = \{\varphi \in GL(V) \mid \varphi \cdot \mathfrak{g} = \mathfrak{g}\}$$

назовем *автосопряжениями* линейной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Если  $\tau$  – радикал алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , то автосопряжения вида  $\exp t$  ( $t \in [\mathfrak{g}, \tau]$ ) называются *специальными*. Они образуют подгруппу группы  $A(\mathfrak{g})$ .

Пусть  $\mathfrak{s}$  – подалгебра Леви алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{h}$  – подалгебра Картана алгебры Ли  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ . Подалгебра  $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$  называется *подалгеброй Леви – Картана* алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\mathfrak{g}$  – линейная разделяющая алгебра Ли;  $M$  – множество подалгебр алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , редутивных в  $\mathfrak{gl}(V)$  и дополнительных в  $\mathfrak{g}$  к идеалу  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$ , и  $Q$  – множество подалгебр Леви – Картана алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Тогда:

(i) Существует взаимно однозначное соответствие между множествами  $M$  и  $Q$ .

Если  $\mathfrak{m} \in M$ ;  $\mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$  ( $\mathfrak{s} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ ) и  $\mathfrak{t}$  – центр алгебры Ли  $\mathfrak{m}$ , то

$$\mathfrak{h} = Z_{Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})}(\mathfrak{t}) -$$

подалгебра Картана алгебры Ли  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$  и  $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h} \in Q$ .

Если  $\mathfrak{q} \in Q$ ;  $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$  и  $\varphi(\mathfrak{h})$  – множество полупростых эндоморфизмов, лежащих в  $\mathfrak{h}$ , то  $\mathfrak{s} \oplus \varphi(\mathfrak{h}) \in M$ .

(ii) Группа специальных автосопряжений алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  действует на множестве  $M$  транзитивно.

Действительно, в случае (i) пусть  $\mathfrak{m} \in M$  и  $\mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$ , где  $\mathfrak{s}$  – подалгебра Леви алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{t}$  – максимальный элемент множества коммутативных подалгебр радикала  $\tau$  алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , состоящих из полупростых эндоморфизмов. Ясно, что  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \subset \tau$ , так как

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{g}] \oplus Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{s}, \tau] \oplus Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s});$$

$$\tau = [\mathfrak{s}, \tau] \oplus (Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \cap \tau) \text{ и}$$

$$\dim Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \dim(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \cap \tau) \text{ и } \mathfrak{t} \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}).$$

Поэтому  $\mathfrak{t}$  – максимальный элемент множества коммутативных подалгебр алгебры Ли  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ , состоящих из полупростых эндоморфизмов. Подалгебра  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$  является разделяющей и  $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h} \in Q$ .

Обратно, пусть  $\mathfrak{q} \in Q$  и  $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ , где  $\mathfrak{s}$  – подалгебра Леви алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{h}$  – подалгебра Картана алгебры Ли  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ . Подалгебра  $\mathfrak{h}$  является разделяющей [4] и  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{h} + [Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}), Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})]$ . Если  $\varphi(\mathfrak{h})$  – множество полупростых эндоморфизмов, лежащих в  $\mathfrak{h}$ , то  $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \varphi(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{n}_V(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}))$ . Из того, что  $\tau = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \oplus [\mathfrak{s}, \tau] = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) + \mathfrak{n}$  и  $\mathfrak{n}_V(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})) \subset \mathfrak{n}$ , следует, что  $\tau = \varphi(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{n}$ . Итак,  $\varphi(\mathfrak{h})$  – максимальный элемент множества коммутативных подалгебр радикала  $\tau$  алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , состоящих из полупростых эндоморфизмов, и  $[\mathfrak{s}, \varphi(\mathfrak{h})] = \{0\}$ . Поэтому  $\mathfrak{s} \oplus \varphi(\mathfrak{h}) \in M$ . Построенное соответствие будет взаимно однозначным.

В случае (ii) группа специальных автосопряжений алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  действует на множестве  $Q$  транзитивно [4].

Напомним, что идеал  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$  называется *линейным нильрадикалом* разделяющей алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , а элементы множества  $M$  – *подалгебрами Мальцева* разделяющей алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\mathfrak{g}$  – линейная разделяющая алгебра Ли;  $\mathfrak{n}$  – ее линейный нильрадикал и  $\mathfrak{m}$  – ее подалгебра Мальцева. Тогда:

(i) Если  $\mathfrak{a}$  – подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , редутивная в  $\mathfrak{gl}(V)$ , то существует специальное автосопряжение алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , переводящее  $\mathfrak{a}$  в некоторую подалгебру в  $\mathfrak{m}$ .

(ii)  $\mathfrak{m}$  является максимальным элементом множества подалгебр алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , редутивных в  $\mathfrak{gl}(V)$ .

Действительно, рассмотрим случай (i). Пусть  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ , тогда  $\mathfrak{b}$  – разделяющая подалгебра [4]. Пересечение  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}$  является нильпотентным идеалом алгебры Ли  $\mathfrak{a}$ , состоящим из нильпотентных эндоморфизмов. Из редутивности  $\mathfrak{a}$  в  $\mathfrak{gl}(V)$  следует  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n} = \{0\}$  и  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ . Поэтому отображение проектирования  $\mathfrak{a}$  на  $\mathfrak{m}$  параллельно  $\mathfrak{n}$  задает изоморфизм алгебр Ли  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{a}' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{b}$ . Пусть  $x$  – элемент центра редутивной алгебры Ли  $\mathfrak{a}$  и  $x = y + z$ , где  $y \in \mathfrak{m}$  и  $z \in \mathfrak{n}$ . Тогда  $x$  – полупростой эндоморфизм; и если мы докажем, что  $y$  также является полупростым эндоморфизмом, то тем самым мы докажем редутивность подалгебры  $\mathfrak{a}'$  в  $\mathfrak{gl}(V)$ . Действительно, элемент  $x$  и, следовательно, элемент  $y$  лежат в радикале алгебры Ли  $\mathfrak{b}$ , который является разделяющей подалгеброй. Подалгебра  $\mathfrak{m}$  также является разделяющей [4]. Поэтому нильпотентная компонента элемента  $y$  лежит в  $\mathfrak{n}_V(\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$ . Итак,  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{a}'$  – подалгебры Мальцева разделяющей алгебры Ли  $\mathfrak{b}$ . Следовательно,  $\mathfrak{a}$  переводится в  $\mathfrak{a}'$  при помощи некоторого специального автосопряжения алгебры Ли  $\mathfrak{b}$ , которое автоматически является специальным автосопряжением алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ .

Утверждение (ii) является непосредственным следствием утверждения (i).

**Лемма 3.** Если  $\mathfrak{h}$  – подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , содержащая ее коммутант  $\mathcal{D}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , то подалгебры  $\mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  и  $\mathfrak{h} + \mathfrak{n}$  являются разделяющими.

Действительно, пусть  $x \in \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  и  $x = s + n$  – разложение Жордана эндоморфизма  $x$ . Мы доказали, что существует такое специальное автосопряжение  $f$  алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , что  $f.s \in \mathfrak{m}$ . Из того, что  $f.s \in s + \mathcal{D}\mathfrak{g} \subset s + \mathfrak{h}$ , следует  $s \in \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ . Поэтому подалгебра  $\mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  является разделяющей.

Пусть  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$  и  $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}'$ . Из того, что  $\mathfrak{h}$  является идеалом алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , следует, что  $\mathfrak{m}'$  является идеалом алгебры Ли  $\mathfrak{m}$ . Если  $\mathfrak{t}$  – центр алгебры Ли  $\mathfrak{m}$ , то  $\mathfrak{m}' \cap \mathfrak{t}$  является радикалом алгебры Ли  $\mathfrak{m}'$ , состоящим из полупростых

эндоморфизмов. Поэтому подалгебры  $m'$  и  $h' = m' \oplus n$  являются разделяющими.

**Лемма 4.** Пусть  $g$  – линейная разделяющая алгебра Ли,  $n$  – ее линейный нильрадикал и  $m$  – ее подалгебра Мальцева. Если подалгебры  $m_1$  и  $m_2$  алгебры Ли  $m$  сопряжены при помощи группы  $A(g)$ , то они сопряжены посредством группы  $A(g, m) = A(g) \cap A(m)$ .

Действительно, пусть  $\varphi \in A(g)$  и  $\varphi \cdot m_1 = m_2$ . Тогда  $m_2 \subset \varphi \cdot m$ . Ранее было показано, что существует такое  $x \in n$ , что  $(\exp x) \cdot (\varphi \cdot m) = m$ . Поскольку  $(\exp x) \cdot m_2 = \exp ad_x(m_2) \subset m_2 \oplus n$ , то  $(\exp x) \cdot m_2 \subset (m_2 \oplus n) \cap m = m_2$ . Следовательно,  $(\exp x) \cdot \varphi \in A(g, m)$  и  $((\exp x) \cdot \varphi) \cdot m_1 = m_2$ .

Зафиксируем некоторую линейную алгебру Ли  $n$ , состоящую из нильпотентных эндоморфизмов. Нормализатор  $N(n)$  подалгебры  $n$  в  $gl(V)$  является разделяющей подалгеброй. Зафиксируем некоторую подалгебру Мальцева  $\bar{m}$  алгебры Ли  $N(n)$  и положим  $\bar{g} = \bar{m} \oplus n$ . Ясно, что  $\bar{g}$  является разделяющей алгеброй Ли,  $n$  – ее линейный нильрадикалом и  $\bar{m}$  – ее подалгеброй Мальцева. Все разделяющие алгебры Ли указанного вида сопряжены алгебре Ли  $\bar{g}$ , так как специальные автосопряжения алгебры Ли  $N(n)$  сохраняют идеал  $n$ .

**Утверждение 1.** (i) Любая разделяющая алгебра Ли  $g$  с линейным нильрадикалом  $n$  сопряжена некоторой разделяющей алгебре Ли  $g$  с подалгеброй Мальцева  $m = g \cap \bar{m}$ .

(ii) Пусть  $m_1$  и  $m_2$  – подалгебры алгебры Ли  $\bar{m}$ , редуцируемые в  $gl(V)$ . Тогда для того, чтобы алгебра Ли  $g_1 = m_1 \oplus n$  была сопряжена алгебре Ли  $g_2 = m_2 \oplus n$ , необходимо и достаточно, чтобы подалгебра  $m_1$  переводилась в подалгебру  $m_2$  при помощи группы  $A(\bar{g}, \bar{m})$ .

Рассмотрим случай (i). Пусть  $g'$  – разделяющая алгебра Ли с линейным нильрадикалом  $n$  и подалгеброй Мальцева  $m'$ . Тогда существует такое специальное самосопряжение  $f$  алгебры Ли  $N(n)$ , что  $f \cdot m' \subset \bar{m}$ . Из того, что  $f \cdot n = n$ , следует, что  $g = f \cdot g' \subset \bar{g}$  и  $m = f \cdot m' = g \cap \bar{m}$ .

В случае (ii) пусть  $\varphi \in GL(V)$  и  $\varphi \cdot g_1 = g_2$ , тогда  $\varphi \cdot n = n$  и найдется такое  $\psi \in A(g_2)$ , что  $\psi \cdot (\varphi \cdot m_1) = m_2$ . Ясно, что  $\psi \cdot \varphi \in A(N(n), n)$ ,  $(\psi \cdot \varphi) \cdot g_1 = g_2$  и  $(\psi \cdot \varphi) \cdot m_1 = m_2$ . Повторяя рассуждения, приведенные выше, выбираем такое  $x \in n_V(N(n))$ , что  $((\exp x) \cdot \psi \cdot \varphi) \cdot \bar{m} = \bar{m}$ , и замечаем, что  $(\exp x) \cdot m_2 = m_2$ ,  $(\exp x) \cdot n = n$ ,  $(\exp x) \cdot \psi \cdot \varphi \in A(\bar{g}, \bar{m})$  и  $((\exp x) \cdot \psi \cdot \varphi) \cdot m_1 = m_2$ .

Итак, алгоритм классификации разделяющих алгебр Ли с данным линейным нильрадикалом  $n$  выглядит следующим образом:

- строится нормализатор  $N(n)$  подалгебры  $n$  в  $gl(V)$ ;
- фиксируется некоторая подалгебра Мальцева  $\bar{m}$  алгебры Ли  $N(n)$  и строится разделяющая алгебра Ли  $\bar{g} = \bar{m} \oplus n$ ;

– с точностью до сопряженности относительно группы  $A(\bar{g}, \bar{m})$  описываются подалгебры  $m_\alpha$  алгебры Ли  $\bar{m}$ , редуцируемые в  $gl(V)$ , и выписываются разделяющие подалгебры  $g_\alpha = m_\alpha \oplus n$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $g$  – линейная разделяющая алгебра Ли;  $n$  – ее линейный нильрадикал;  $m$  – ее подалгебра Мальцева и  $h$  – некоторая подалгебра алгебры Ли  $g$ . Тогда для того, чтобы  $e(h) = g$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1.  $Dg \subset h$ ; 2.  $h + m = g$ ; 3.  $h + n = g$ .

Действительно, покажем необходимость. Если  $g = e(h)$ , то выполняется условие 1, а подалгебры  $h + m$  и  $h + n$  являются разделяющими. Поэтому выполняются условия 2 и 3.

Достаточность. Предположим, что выполнены условия 1–3. Пусть  $n'$  – линейный нильрадикал алгебры Ли  $e(h)$ . Ясно, что  $e(h) \subset g$  и  $e(h) + n = g$ . Поэтому  $m' \subset g$ ;  $[n', m] \subset Dg \cap n \subset e(h) \cap n \subset n'$  (так как  $e(h) \cap n$  является нильпотентным идеалом в  $e(h)$ , состоящим из нильпотентных эндоморфизмов) и  $[n', g] = [n' \cdot e(h)] + [n', n] \subset n'$ . Следовательно,  $n' \subset n$  и  $n' = e(h) \cap n$ . Пусть  $m'$  – подалгебра Мальцева алгебры Ли  $e(h)$ , тогда  $\dim m' = \dim m$  и  $m' \cap n = \{0\}$  (поскольку  $m' \cap n$  является нильпотентным идеалом в  $m'$ , состоящим из нильпотентных эндоморфизмов). Следовательно,  $m'$  является подалгеброй Мальцева алгебры Ли  $g$ . Пусть  $x$  – такой нильпотентный эндоморфизм из  $Dg$ , что  $(\exp x) \cdot m' = m$ . Тогда  $x \in h$ ,  $(\exp x) \cdot e(h) = e(h)$  и  $m \subset e(h)$ . Из условия 2 следует, что  $g = e(h) + m = e(h)$ .

Пусть  $\alpha = g / Dg$  и  $p : g \rightarrow \alpha$  – каноническая сюръекция. Группа  $A(g)$  естественным образом действует в пространстве  $\alpha$ . При этом ограничение этого действия на подгруппу специальных автосопряжений алгебры Ли  $g$  тривиально.

**Следствие.** (i) Существует взаимно однозначное соответствие между множеством подалгебр  $h$  алгебры Ли  $g$ , для которых  $e(h) = g$ , и множеством подпространств  $U$  пространства  $\alpha$ , для которых  $U + p(m) = \alpha$  и  $U + p(n) = \alpha$ . При этом соответствию  $h \mapsto p(h)$ ;  $U \mapsto p^{-1}(U)$ .

(ii) Если  $h_1$  и  $h_2$  – такие подалгебры алгебры Ли  $g$ , что  $e(h_1) = g$  и  $e(h_2) = g$ , то подалгебры  $h_1$  и  $h_2$  сопряжены друг другу тогда и только тогда, когда соответствующие им подпространства  $p(h_1)$  и  $p(h_2)$  сопряжены друг другу относительно действия группы  $A(g, m)$ .

Действительно, первое утверждение очевидно. Если  $\varphi \in GL(V)$  и  $\varphi \cdot h_1 = h_2$ , то  $\varphi \in A(g)$ . Осталось заметить, что  $\varphi = (\exp(-x)) \cdot \psi$  для некоторого нильпотентного эндоморфизма  $x \in Dg \subset h_1 \cap h_2$  (такого, что  $(\exp x) \cdot (\varphi \cdot m) = m$ ) и  $\psi \in A(g, m)$ .

Итак, задача классификации неразделяющих линейных алгебр Ли с разделяющей оболочкой  $g$

сводится к классификации подпространств  $U \subset \mathfrak{a}$ , таких, что  $U \neq \mathfrak{a}$ ,  $U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$  и  $U + p(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$ , с точностью до сопряженности относительно действия группы  $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$ .

**Замечание.** Если  $\mathfrak{t}$  – центр алгебры Ли  $\mathfrak{m}$ , то  $p(\mathfrak{m}) = p(\mathfrak{t})$ . Из этого, в частности, следует, что  $\mathfrak{a} = p(\mathfrak{t}) \oplus p(\mathfrak{n})$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $\mathfrak{g}$  – линейная алгебра Ли,  $L$  – множество подалгебр алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , редуцируемых в  $\mathfrak{gl}(V)$ , и  $M$  – множество максимальных элементов в множестве  $L$ . Тогда группа специальных автосопряжений алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  действует на множестве  $M$  транзитивно.

Действительно, пусть  $\mathfrak{m}$  – подалгебра Мальцева разделяющей алгебры Ли  $e(\mathfrak{g})$ ;  $\mathfrak{s} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$  и  $\mathfrak{t}$  – центр алгебры Ли  $\mathfrak{m}$ , тогда  $\mathfrak{s} \subset [e(\mathfrak{g}), e(\mathfrak{g})] \subset \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{t})$  и  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{t}$  является радикалом алгебры Ли  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}$ , состоящим из полупростых эндоморфизмов. Следовательно,  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} \in L$ . Если  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}' \in M$  и  $\mathfrak{m}_1$  – подалгебра Мальцева алгебры Ли  $e(\mathfrak{g})$ , содержащая  $\mathfrak{m}'$ , то из равенств  $e(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ ,  $e(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}_1$  и  $\dim \mathfrak{m} = \dim \mathfrak{m}_1$  следует  $\dim(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}) = \dim(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}_1)$  и  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}_1 \in M$  (так как  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}_1$  и  $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}_1$ ). Обратно, если  $\mathfrak{m}' \in M$  и  $\mathfrak{m}$  – подалгебра Мальцева алгебры Ли  $e(\mathfrak{g})$ , содержащая  $\mathfrak{m}'$ , то  $\mathfrak{m}' = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}$ .

Пусть  $\mathfrak{s}$  – подалгебра Леви и  $\mathfrak{r}$  – радикал алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , тогда  $e(\mathfrak{r})$  является разрешимым идеалом алгебры Ли  $e(\mathfrak{g})$  и  $e(\mathfrak{g}) = e(\mathfrak{s} \oplus e(\mathfrak{r})) = \mathfrak{s} \oplus e(\mathfrak{r})$ , т. е.  $e(\mathfrak{r})$  является радикалом алгебры Ли  $e(\mathfrak{g})$ . Следовательно, нильпотентные радикалы алгебр Ли  $\mathfrak{g}$  и  $e(\mathfrak{g})$  совпадают. Осталось заметить, что группа специальных автосопряжений алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  совпадает с группой специальных автосопряжений алгебры Ли  $e(\mathfrak{g})$ , которая транзитивно действует на множестве подалгебр Мальцева алгебры Ли  $e(\mathfrak{g})$ .

Проиллюстрируем вышесказанное на примере. Пусть  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$  – подалгебра, состоящая из нильпотентных элементов:

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -y & x & z \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

В качестве примера приведем классификацию подалгебр в  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ , для которых линейный нильрадикал разделяющей оболочки совпадает с  $\mathfrak{n}$ . Имеем

$$N(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2u+v & w & p & q \\ 0 & x+u & y & r \\ 0 & z & -x+u & s \\ 0 & 0 & 0 & -v \end{pmatrix} \mid x, y, z, u, v, w, p, q, r, s \in \mathbb{C} \right\}.$$

Как нетрудно проверить, подалгебра

$$\bar{\mathfrak{m}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2u+v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+u & y & 0 \\ 0 & z & -x+u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v \end{pmatrix} \mid x, y, z, u, v \in \mathbb{C} \right\}$$

редуктивна в  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$  и дополнительна в  $N(\mathfrak{n})$  к  $\mathfrak{n}_V(N(\mathfrak{n}))$ . Таким образом, она является подалгеброй Мальцева алгебры Ли  $N(\mathfrak{n})$ . При этом алгебра Ли  $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$  имеет вид

$$\bar{\mathfrak{g}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2u+v & -w & p & q \\ 0 & x+u & y & p \\ 0 & z & -x+u & w \\ 0 & 0 & 0 & -v \end{pmatrix} \mid x, y, z, u, v, w, p, q \in \mathbb{C} \right\}.$$

Группа  $A(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{m}})$  изоморфна  $GL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$  и

$$A(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{m}}) = \left\{ \begin{pmatrix} \det(A) \cdot a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid A \in GL(2, \mathbb{C}), a \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Алгебра Ли  $\bar{\mathfrak{m}}$  изоморфна  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^2$ . Группа  $A(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{m}})$  действует сопряжением элементами из  $GL(2, \mathbb{C})$  на компоненту  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  и тривиальна на  $\mathbb{C}^2$ .

Описывая все подалгебры  $\mathfrak{m} \subset \bar{\mathfrak{m}}$ , редуцируемые в  $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$ , получаем, что искомые разделяющие подалгебры  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$  сопряжены одной и только одной из следующих:

$$1. \begin{pmatrix} 0 & -x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} x & -y & z & u \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} (2+\lambda)x & -y & z & u \\ 0 & x & 0 & z \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda x \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} (2\lambda + \mu)x & -y & z & u \\ 0 & (1 + \lambda)x & 0 & z \\ 0 & 0 & (-1 + \lambda)x & y \\ 0 & 0 & 0 & -\mu x \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} \lambda x + (2 + \mu)y & -z & u & v \\ 0 & x + y & 0 & u \\ 0 & 0 & -x + y & z \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda x - \mu y \end{pmatrix}.$$

$$6. \begin{pmatrix} 2\lambda x + y & -z & u & v \\ 0 & (1 + \lambda)x & 0 & u \\ 0 & 0 & (-1 + \lambda)x & z \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{pmatrix}.$$

$$7. \begin{pmatrix} 2x + y & -z & u & v \\ 0 & x & 0 & u \\ 0 & 0 & x & z \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{pmatrix}.$$

$$8. \begin{pmatrix} 2y + z & -u & v & w \\ 0 & x + y & 0 & v \\ 0 & 0 & -x + y & u \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{pmatrix}.$$

$$9. \begin{pmatrix} 0 & -u & v & w \\ 0 & x & y & v \\ 0 & z & -x & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$10. \begin{pmatrix} (2 + \lambda)u & -v & w & p \\ 0 & x + u & y & w \\ 0 & z & -x + u & v \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda u \end{pmatrix}.$$

$$11. \begin{pmatrix} u & -v & w & p \\ 0 & x & y & w \\ 0 & z & -x & v \\ 0 & 0 & 0 & -u \end{pmatrix}.$$

$$12. \begin{pmatrix} 2u + v & -w & p & q \\ 0 & x + u & y & p \\ 0 & z & -x + u & w \\ 0 & 0 & 0 & -v \end{pmatrix}.$$

**Замечание.** Отношение сопряженности подалгебр является отношением эквивалентности на множестве параметров  $\lambda$  и  $\mu$ . Это отношение эквивалентности имеет вид: для подалгебры под номером 4 –  $(\lambda, \mu) \sim (-\lambda, -\mu)$ , под номером 5 –  $(\lambda, \mu) \sim (-\lambda, \mu)$ , под номером 6 –  $\lambda \sim -\lambda$ .

Перейдем к классификации неразделяющих подалгебр  $\mathfrak{h}$  с данной разделяющей оболочкой  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$  из перечисленных выше. Для этого требуется описать такие собственные подпространства  $U$  в  $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} / \mathcal{D}\mathfrak{g}$ , что  $U + p(\mathfrak{n}) = U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$ , с точностью до группы  $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$  (следствие утверждения 2).

Заметим, что для подалгебры под номером 1 имеем  $p(\mathfrak{m}) = 0$ , а для подалгебр под номерами 2, 6–12 выполняется условие  $\mathfrak{n} \subset \mathcal{D}\mathfrak{g}$ , т. е.  $p(\mathfrak{n}) = 0$ . Таким образом, для подалгебр с указанными номерами не существует неразделяющих подалгебр с данной разделяющей оболочкой.

В качестве примера рассмотрим разделяющую подалгебру под номером 3. Если  $\lambda \neq -1$ , то  $\mathfrak{n} \subset \mathcal{D}\mathfrak{g}$  и  $p(\mathfrak{n}) = 0$ . Следовательно, достаточно ограничиться случаем, когда  $\lambda = -1$ . Тогда

$$\mathcal{D}\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C} \right\}$$

и выберем в  $\mathfrak{a}$  базис  $\{v_1, v_2, v_3\}$ , где

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = \begin{pmatrix} x & -z & y & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & x & z \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} + \mathcal{D}\mathfrak{g},$$

$$x, y, z \in \mathbb{C}.$$

Тогда  $p(\mathfrak{m}) = \langle v_1 \rangle$ ,  $p(\mathfrak{n}) = \langle v_2, v_3 \rangle$ .

Нетрудно проверить, что

$$A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m}) = \left\{ \begin{pmatrix} (\det(A) \cdot a & {}^t B & d \\ 0 & A & C \\ 0 & 0 & a^{-1}) \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} A \in GL(2, \mathbb{C}), a \in \mathbb{C}^*, \\ B, C \in \mathbb{C}^2, d \in \mathbb{C} \end{array} \right\}.$$

В выбранном базисе  $\{v_1, v_2, v_3\}$  пространства  $\mathfrak{a}$  действие группы  $A(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$  индуцирует следующую группу преобразований:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cdot A \end{pmatrix} \middle| A \in GL(2, \mathbb{C}), a \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Условие  $U + p(m) = a$  означает, что  $\dim U = 2$ , а условие  $U + p(n) = a$  влечет  $\dim U \cap p(n) = 1$ .

При действии группы  $A(\mathfrak{g}, m)$  всякое такое подпространство  $U$  сопряжено подпространству вида  $\langle v_2, v_1 + v_3 \rangle$ . Соответствующая подалгебра  $\mathfrak{h} = p^{-1}(U)$ :

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x & y & z \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Случаи 4 и 5 рассматриваются аналогично.

Окончательно получаем, что все искомые неразделяющие подалгебры  $\mathfrak{h}$  сопряжены одной и только одной из следующих подалгебр:

$$3.1. \begin{pmatrix} x & -x & y & z \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

$$4.1. \begin{pmatrix} (1+\lambda)x & -x & y & z \\ 0 & (1+\lambda)x & 0 & y \\ 0 & 0 & (-1+\lambda)x & x \\ 0 & 0 & 0 & (-1+\lambda)x \end{pmatrix}.$$

$$5.1. \begin{pmatrix} (1+\lambda)x+y & -y & z & u \\ 0 & (1+\lambda)x+y & 0 & z \\ 0 & 0 & (\lambda-1)x+y & y \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)x+y \end{pmatrix}.$$

$$5.2. \begin{pmatrix} x+y & -y & z & u \\ 0 & x+y & 0 & z \\ 0 & 0 & x-y & y \\ 0 & 0 & 0 & x-y \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены все оставшиеся случаи и получена классификация подалгебр в  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ .

**Заключение.** Приведен алгоритм классификации разделяющих алгебр Ли с данным линейным нильрадикалом, а именно: сначала строится нормализатор нильпотентной подалгебры, далее фиксируется некоторая подалгебра Мальцева нормализатора и строится разделяющая алгебра Ли, потом, с точностью до сопряженности, описываются подалгебры алгебры Мальцева, являющиеся редуцируемыми, и выписываются разделяющие подалгебры. Затем решается задача классификации неразделяющих линейных алгебр Ли с данной разделяющей оболочкой. С применением этих алгоритмов описаны с точностью до сопряженности подалгебры алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ . Алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

### Список литературы

1. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. Супруненко Д. А. Группы матриц. М.: Наука, 1979. 351 с.
3. Можей Н. П. Линейные алгебры Ли, состоящие из нильпотентных эндоморфизмов // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2020. № 1. С. 20–25.
4. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972–1978. Гл. I–VIII.

### References

1. Merzlyakov Yu. I. *Ratsional'nyye gruppy* [Rational groups]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 464 p.
2. Suprunenko D. A. *Gruppy matrits* [Matrix groups]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 351 p.
3. Mozhey N. P. Linear Lie algebras consisting of nilpotent endomorphisms. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2020, no. 1, pp. 20–25 (In Russian).
4. Burbaki N. *Gruppy i algebrы Li* [Groups and Lie algebras]. Moscow, Mir Publ., 1972–1978. Ch. I–VIII.

### Информация об авторе

**Можей Наталья Павловна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

### Information about the author

**Mozhey Natalya Pavlovna** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 09.03.2020

УДК 531.19; 538.911

**И. И. Наркевич, Е. В. Фарафонтова, А. А. Кулеш, А. А. Рогач**  
Белорусский государственный технологический университет

## **РЕШЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ СРЕДНИХ СИЛ И РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМАХ, СОДЕРЖАЩИХ КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ НАНОЧАСТИЦЫ**

В работе используется ранее полученная замкнутая система статистических уравнений и формул, определяющая структурные и термодинамические характеристики неоднородных, в частности, гетерогенных молекулярных систем. Она получена в рамках двухуровневого статистического метода, который является симбиозом метода коррелятивных функций Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ), метода условных коррелятивных функций Ротта и метода термодинамических функционалов плотности.

В двухуровневом статистическом методе описание равновесных свойств осуществляется с помощью потенциалов средних сил, которые вследствие неоднородности молекулярных систем являются функционалами искомого поля плотности. Это поле задается полем чисел заполнения молекулами микроячеек, которые принадлежат координационным сферам ГЦК решетки, используемой при описании свойств простых молекулярных систем. При статистическом описании гетерогенных систем, содержащих наночастицы, центры координационных сфер совпадают с центром сферической кристаллической наночастицы, находящейся в термодинамическом равновесии с окружающей ее флюидной средой (жидкой либо газовой).

В данной работе с помощью ранее разработанной модернизированной компьютерной программы решена полная система преобразованных интегральных и алгебраических уравнений для гетерогенной системы, содержащей кристаллическую наночастицу внутри флюидной среды. По результатам расчетов построены изотермы свободной энергии однородной молекулярной системы в широкой области молекулярных объемов, включающей области существования кристаллического, жидкого и газообразного состояний вещества. С их помощью численно-геометрическим методом решена задача по определению термодинамических параметров фазовых переходов кристалл – газ, кристалл – жидкость и жидкость – газ при соответствующих температурах. Построенная фазовая диаграмма простых веществ позволит приступить к расчетам по определению полей плотности в межфазных областях гетерогенных систем и в задачах адсорбции на плоских и сферических поверхностях.

**Ключевые слова:** двухуровневый статистический метод, потенциал средних сил, гетерогенная система, наночастица, фазовый переход, фазовая диаграмма.

**I. I. Narkevich, E. V. Farafontova, A. A. Kulesh, A. A. Rogach**  
Belarusian State Technological University

## **SOLUTION OF THE MODIFIED INTEGRAL EQUATION FOR POTENTIALS OF AVERAGE FORCES AND CALCULATION OF PHASE TRANSITION PARAMETERS IN HETEROGENEOUS SYSTEMS CONTAINING CRYSTALLINE NANOPARTICLES**

The paper uses a closed system of statistical equations and formulas that determines the structural and thermodynamic characteristics of heterogeneous, in particular, heterogeneous molecular systems. It has been obtained using the two-level statistical method, which is a symbiosis of the Bogolyubov – Born – Green – Kirkwood – Ivon (BBGKI) method of correlation, the Rott conditional distribution method, and the density thermodynamic functionals method.

In the two-level statistical method, the description of equilibrium properties is carried out using potential of average forces, which, due to the heterogeneity of molecular systems, are functionals of the desired density field. This field is specified by the field of numbers of filling with molecules of microcells

that belong to the coordination spheres of the FCC lattice used to describe the properties of simple molecular systems. In the statistical description of heterogeneous systems containing nanoparticles, the centers of the coordination spheres coincide with the center of a spherical crystalline nanoparticle, which is in thermodynamic equilibrium with its surrounding fluid medium (liquid or gas).

In this work, we have solved the complete system of transformed integral and algebraic equations for a heterogeneous system containing a crystalline nanoparticle inside a fluid medium, using the previously developed modernized computer program. Based on the calculation results, free energy isotherms of a homogeneous molecular system are constructed in a wide range of molecular volumes, which contain regions of the existence of crystalline, liquid and gaseous states of matter. With their help, the problem of determining the thermodynamic parameters of the crystal – gas, crystal – liquid, and liquid – gas phase transitions at the corresponding temperatures has been solved. The constructed phase diagram of simple substances will allow us to start the calculations to determine the density fields in the interfacial regions of heterogeneous systems and in the problems of adsorption on flat and spherical surfaces.

**Key words:** two-level statistical method, potential of average forces, heterogeneous system, nanoparticle, phase transition, phase diagram.

**Введение.** Ранее в работах [1, 2] была опубликована статистическая теория и методика расчета структурных и термодинамических характеристик кристаллических наночастиц разных размеров с использованием двухуровневого статистического метода, подробно изложенного в монографии [3]. Он базируется на использовании метода коррелятивных функций Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ), метода условных распределений Ротта [4] и метода термодинамических потенциалов, которые в случае неоднородных систем являются функционалами поля плотности среды. Двухуровневый молекулярно-статистический подход реализует учет неоднородного распределения чисел заполнения  $n_i$  микроячеек объемами  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ), на которые в соответствии с основной идеей метода условных распределений Л. А. Ротта мысленно разделен весь объем  $V$  системы. Эти ячейки в случае флюидных (текучих) сред образуют гипотетическую кристаллическую решетку, а их форма и размеры в области кристалла претерпевают существенные изменения вблизи границ кристаллических наночастиц, т. е. наблюдается пространственная релаксация реальной кристаллической решетки. Для описания таких систем используется  $F_{11}$ -приближение, учитывающее множество наиболее вероятных состояний конденсированной системы из  $N$  молекул в объеме  $V$ , где в каждой микроячейке может содержаться не более одной частицы. Количество микроячеек  $M$  превышает число  $N$  частиц в объеме  $V$ , поэтому некоторые микроячейки с определенной вероятностью могут быть вакантными. В результате поле распределения чисел заполнения ячеек по объему наночастицы и окружающей среды отражает неоднородность распределения плотности в объеме гетерогенной системы.

В двухуровневом статистическом методе поле плотности в системе с наночастицами задается соответствующим полем чисел заполнения

ячеек, принадлежащих координационным сферам с номерами  $p$  ( $p = 1, 2, \dots, P$ ), образующих сферическую кристаллическую наночастицу и окружающую ее флюидную, т. е. жидкую либо газовую, среду. Центр координационных сфер совпадает с центром сферической наночастицы.

Основная трудность практической реализации этого подхода связана с тем, что функционал свободной энергии неоднородной системы зависит от искомого профиля плотности через потенциалы средних сил  $\phi_{ij}$ , которые можно рассчитать только численно в результате решения сложной системы интегральных уравнений. Усреднение парного межмолекулярного потенциала Леннард-Джонса  $\Phi(r)$  в модифицированном интегральном уравнении проводится с помощью вспомогательной унарной функции распределения  $\hat{F}_{11}^*$ , которая имеет четко выраженную локализацию в окрестности узлов решетки в кристаллическом состоянии [5, 6]. В связи с этим макроструктура сферической кристаллической наночастицы с неоднородным радиальным профилем плотности описывается дискретными наборами чисел заполнения  $n_p$  и радиусов  $b_p$  сфер объемами  $v_i$ , внутри которых вспомогательные унарные функции  $\hat{F}_{11}^*$  распределения считаются постоянными. Аналогичный прием используется и при описании структуры флюидной среды. Поэтому искомые потенциалы средних сил  $\phi_{ij}$  оказываются зависящими от значений чисел  $n_p$  и радиусов  $b_p$  сфер в ячейках, центры которых принадлежат соответствующим координационным сферам в объеме наночастицы и окружающей ее среды. В связи с этим все исходные статистические уравнения упрощаются, т. е. модифицируются так, чтобы появилась возможность осуществить их численное решение с использованием системы компьютерного проектирования Mathcad.

**Основная часть.** Для однокомпонентной системы с вакансиями исходное интегральное уравнение для потенциалов средних сил  $\Phi_{ij}(\vec{q}_i, \{n_l\})$  имеет следующий вид [7, 8]:

$$f_{ij}(\vec{q}_i, \{n_l\}) = \frac{n_{ij}^{aa}}{n_i} f_{ij}^{(a)}(\vec{q}_i, \{n_l\}) + \frac{n_{ij}^{av}}{n_i} f_{ij}^{av}(\{n_l\}). \quad (1)$$

Здесь  $n_{ij}^{\mu\nu}$  – двухъячеечные числа заполнения всевозможных пар ячеек объемами  $\omega_i$  и  $\omega_j$ , которые определяют вероятность нахождения частицы сорта  $\mu$  в ячейке  $\omega_i$  и частицы сорта  $\nu$  в ячейке  $\omega_j$  ( $\mu, \nu = a, v$ ; индекс  $a$  используется для реальных молекул или атомов, а индекс  $v$  – для вакантных ячеек, в которых находятся фиктивные частицы, которые не взаимодействуют между собой и с реальными молекулами). Функционал  $f_{ij}(\vec{q}_i, \{n_l\}) = \exp\{-\beta\Phi_{ij}(\vec{q}_i, \{n_l\})\}$ , а дополнительные функционалы  $f_{ij}^{(a)}(\vec{q}_i, \{n_l\})$  и  $f_{ij}^{av}(\{n_l\})$  находятся в результате усреднения, выполняемого с помощью вспомогательных нормированных на единицу унарных функций  $\hat{F}_{11}^*(\vec{q}_j)$  и  $\hat{F}_{11}^*(\vec{q}_i)$  соответственно ( $\beta = 1/\theta$  – обратная безразмерная температура,  $\theta = kT$ ):

$$f_{ij}^{(a)}(\vec{q}_i, \{n_l\}) = \int_{\omega_j} \exp\{-\beta\Phi(\vec{q}_i - \vec{q}_j)\} \hat{F}_{11}^*(\vec{q}_j) d\vec{q}_j, \quad (2)$$

$$f_{ij}^{av}(\{n_l\}) = \int_{\omega_i} \exp\{-\beta\Phi_{ij}(\vec{q}_i, \{n_l\})\} \hat{F}_{11}^*(\vec{q}_i) d\vec{q}_i, \quad (3)$$

$$\hat{F}_{11}^*(\vec{q}_i) = \frac{\exp\left\{-\beta \sum_{k \neq i, j}^M \Phi_{ik}(\vec{q}_i, \{n_l\})\right\} d\vec{q}_i}{\int_{\omega_i} \exp\left\{-\beta \sum_{k \neq i, j}^M \Phi_{ik}(\vec{q}_i, \{n_l\})\right\} d\vec{q}_i}, \quad (4)$$

где  $\Phi(\vec{q}_i - \vec{q}_j)$  – парный межмолекулярный потенциал Леннарда-Джонса, описывающий взаимодействия двух реальных частиц (атомов либо молекул), находящихся в двух разных ячейках с номерами  $i$  и  $j$  ( $\vec{q}_i$  и  $\vec{q}_j$  – радиус-векторы этих частиц).

В интегральных уравнениях (1) числа заполнения всевозможных пар ячеек определяются следующими соотношениями [7]:

$$n_{ij}^{aa}\{n_l\} = n_i - n_{ij}^{av}\{n_l\}, \quad (5)$$

$$n_{ij}^{av}\{n_l\} = \frac{1}{2A_{ij}} \left\{ \left[ (n_i - n_j)A_{ij} - 1 \right] + \sqrt{\left[ (n_i - n_j)A_{ij} - 1 \right]^2 + 4n_i(1 - n_j)A_{ij}} \right\}, \quad (6)$$

$$A_{ij} = f_{ij}^{(a)}\{n_l\} - 1, \quad (7)$$

$$f_{ij}^{(a)}\{n_l\} = \int_{\omega_i} f_{ij}^{(a)}(\vec{q}_i, \{n_l\}) \hat{F}_{11}^*(\vec{q}_i) d\vec{q}_i. \quad (8)$$

Из физических соображений ясно, и это подтверждается структурой уравнений (1), что в связи с короткодействующим межмолекулярным потенциалом  $\Phi(\vec{q}_i - \vec{q}_j)$  все потенциалы средних сил  $\Phi_{ij}$  в неоднородной среде должны наиболее сильно зависеть от плотности в ближайших ячейках, окружающих выделенную пару ячеек  $\omega_i$  и  $\omega_j$ . В связи с этим достаточно учесть зависимость потенциалов  $\Phi_{ij}(\vec{q}_i, \{n_l\})$  только от чисел заполнения в ячейках  $\omega_i, \omega_j$ , а в численных расчетах при выполнении суммирования по  $k \neq i, j$  в формуле (4) можно ограничиться вкладами от взаимодействия с ячейками, принадлежащими первым трем концентрическим координационным сферам ( $l = 1, 2, 3$ ) с центрами в центре ячейки  $\omega_i$ .

Учитывая вышесказанное, выпишем все соотношения и уравнения, образующие замкнутую систему модифицированных интегральных и алгебраических уравнений. Все формулы и уравнения далее записаны в безразмерном виде, когда геометрические размеры определены в единицах линейного параметра  $\sigma$  потенциала Леннарда-Джонса, а все величины, имеющие размерность энергии, найдены в единицах энергетического параметра  $\epsilon$  этого же потенциала.

Принимая во внимание вышеизложенное, модифицированное интегральное уравнение для потенциалов средних сил неоднородной однокомпонентной системы приобретает следующий вид [7]:

$$f_{ij}(\rho_i, b_j) = n_j g_{ij}(b_i, \rho_{ij}, b_j) f_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) + (1 - n_j g_{ij}(b_i, \rho_{ij}, b_j)) f_{ij}^{av}(b_i, \rho_{ij}, b_j). \quad (9)$$

Здесь  $f_{ij}(\rho_i, b_j) = e^{-\beta\Phi_{ij}(\rho_i, b_j)}$ , а  $\Phi_{ij}(\rho_i, b_j)$  – потенциал средней силы, действующий на молекулу в ячейке  $\omega_i$  со стороны молекулы, равномерно распределенной внутри сферы радиуса  $b_j$  объемом  $v_j$  внутри ячейки  $\omega_j$ ;  $\rho_i$  – безразмерное расстояние от молекулы в объеме  $v_i$  до центра

объема  $v_j$ ;  $g_{ij}$  – аналог радиальной функции для гетерогенной системы, мысленно разделенной на микроячейки, образующие кристаллическую решетку (реальную в объеме наночастицы и гипотетическую в объеме окружающей ее флюидной среды):

$$g_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i n_j}, \quad n_{ij} = n_i - n_{ij}^{av}, \quad (10)$$

$$B_{ij} = (n_i - n_j) - \frac{1}{A_{ij}}, \quad A_{ij} = f_{ij}^{(a)}(b_i, \rho_{ij}, b_j) - 1, \quad (11)$$

$$n_{ij}^{av} = 0,5 B_{ij} + 0,5 \sqrt{B_{ij}^2 + 4n_i(1-n_j)A_{ij}^{-1}}, \quad (12)$$

где  $\rho_{ij}$  – безразмерное расстояние между центрами объемов  $v_i$  и  $v_j$  в ячейках  $\omega_i$  и  $\omega_j$  соответственно.

Функционалы  $f_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j)$  и  $f_{ij}^{(a)}(b_i, \rho_{ij}, b_j)$  определяются следующими выражениями:

$$f_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) = \frac{1}{v_j} \int_{v_j} e^{-\beta\Phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|)} d\nu_j, \quad (13)$$

$$f_{ij}^{(a)}(b_i, \rho_{ij}, b_j) = \frac{1}{v_i} \int_{v_i} f_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) d\nu_i. \quad (14)$$

Функционалы энтропии  $S$ , внутренней энергии  $U$  и свободной энергии  $F$  сферической наночастицы и окружающей ее флюидной среды рассчитываются по следующим формулам:

$$S\{n_p\} = -\sum_{p=1}^P Z_p (n_p \ln n_p + (1-n_p) \ln(1-n_p) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^J n_p n_j g_{pj} \ln g_{pj}), \quad (15)$$

$$U\{n_p\} = \sum_{p=1}^P Z_p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^J (n_p n_j g_{pj} \Psi(b_p, r_{pj}, b_j)), \quad (16)$$

$$F\{n_p\} = U\{n_p\} - \theta S\{n_p\}. \quad (17)$$

Здесь  $Z_p$  – число узлов, принадлежащих координационной сфере с номером  $p$ ;  $J = 42$  – число узлов, принадлежащих трем координационным сферам с центрами, совпадающими с центром ячейки  $\omega_p$ , по узлам которых выполняется суммирование в уравнениях (15), (16);

$$\Psi(b_i, \rho_{ij}, b_j) = \frac{\int_{v_i} \Phi_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) \int_{v_j} e^{-\beta\Phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|)} d\nu_j d\nu_i}{\int_{v_i, v_j} e^{-\beta\Phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|)} d\nu_j d\nu_i}. \quad (18)$$

Здесь

$$\Phi_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) = \frac{\int_{v_j} \Phi(\rho) e^{-\beta\Phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|)} d\nu_j}{\int_{v_j} e^{-\beta\Phi(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|)} d\nu_j}. \quad (19)$$

Для решения системы интегральных и алгебраических уравнений (9)–(19) для гетерогенной системы, состоящей из однородной кристаллической наночастицы и окружающей ее флюидной среды, проведена модернизация компьютерной программы, которая разработана с использованием системы компьютерного проектирования Mathcad.

В качестве первого шага выполнены расчеты по численному построению изотерм свободной энергии однородной молекулярной системы в широкой области молекулярных объемов, включающей области кристаллического, жидкого и газообразного состояний. С их помощью численно-геометрическим методом решена задача по определению термодинамических параметров фазовых переходов кристалл – газ, кристалл – жидкость и жидкость – газ при соответствующих температурах.

На рис. 1 изображены участки изотерм свободной энергии, соответствующие кристаллическому (рис. 1, а) и гетерогенному (рис. 1, б) состояниям системы в фазовых переходах кристалл – жидкость ( $\theta = 1-2$ ) и кристалл – газ ( $\theta = 0,6$ ). Гетерогенная область определена с помощью построения общих касательных к изотермам, определяющих точки  $a$  и  $b$  фазового перехода, для которых выполняются три условия равновесия сосуществующих фаз для температуры  $\theta$ , давления  $p$  и химического потенциала  $\mu$  ( $\theta_a = \theta_b$ ,  $p_a = p_b$ ,  $\mu_a = \mu_b$ ).

Изображенная на рис. 2 изотерма свободной энергии при температуре  $\theta = 0,6$  указывает на отсутствие фазового перехода кристалл – жидкость и наличие только фазового перехода кристалл – газ между точками  $a$  ( $v_a \approx 0,84$ ) и  $d$  ( $v_d \approx 1,35 \cdot 10^5$ ), что соответствует температуре, которая находится ниже тройной точки.

Участки изотерм свободной энергии, представленные на рис. 3–6, относятся к температурному интервалу между критической и тройной точками и определяют гетерогенные участки между точками  $c$  и  $d$ , соответствующие фазовому переходу жидкость – газ. Температура критической точки несколько выше значения, равного 3 (ориентировочно  $\theta \approx 3,1$ ).

На рис. 7 изображена фазовая диаграмма  $\theta - v$  в области фазового перехода жидкость – газ с соответствующими приближенными значениями параметров тройной и критической точек для простых веществ.

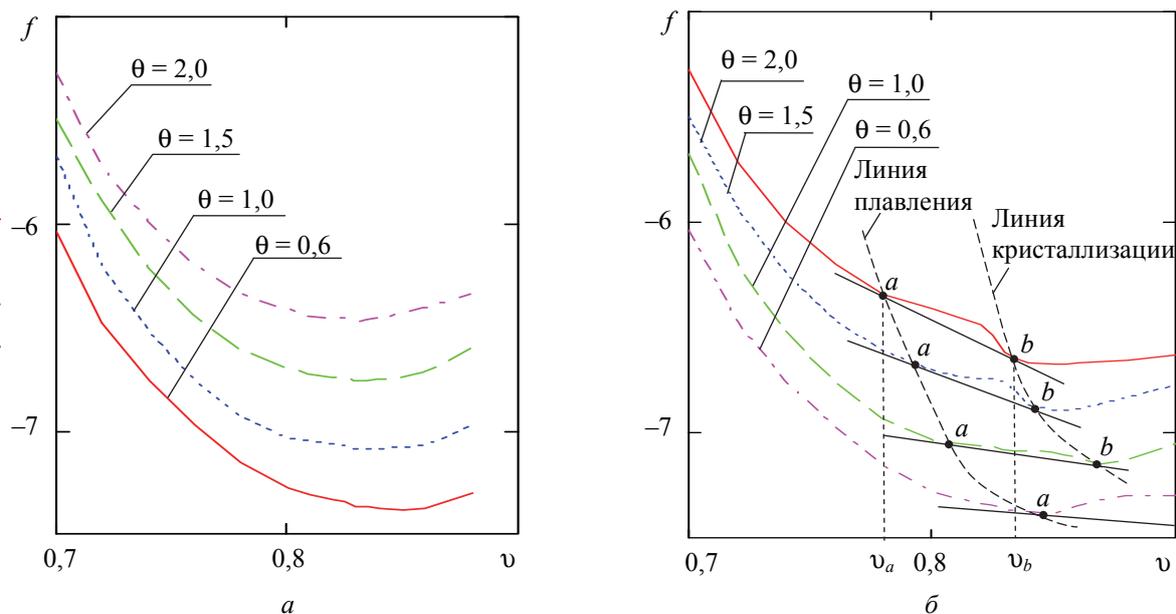


Рис. 1. Изотермы свободной энергии:  
 а – область кристаллического состояния;  
 б – область двухфазного равновесия

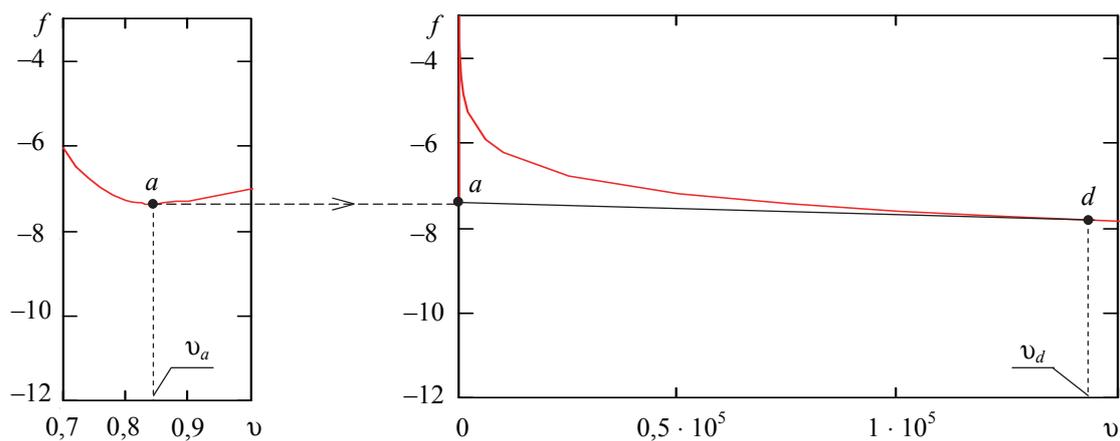


Рис. 2. Изотерма свободной энергии  
 при температуре  $\theta = 0,6$

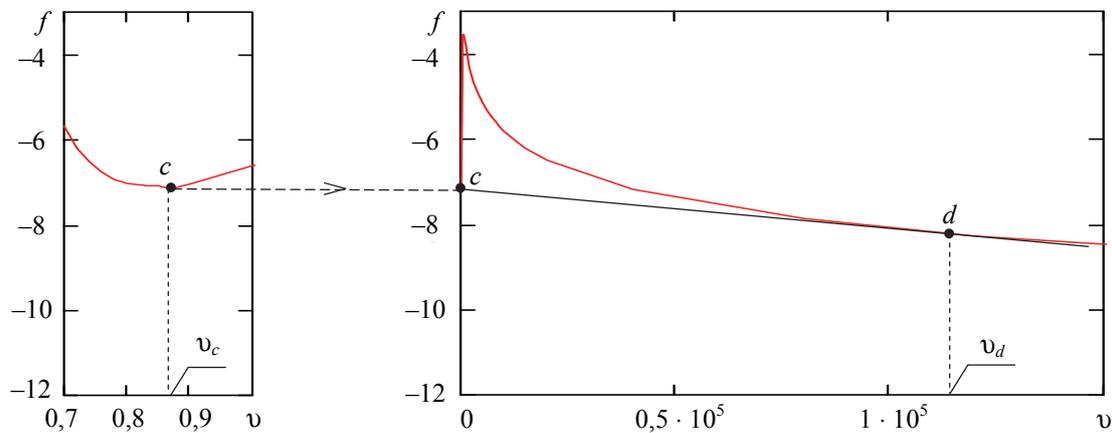


Рис. 3. Изотерма свободной энергии  
 при температуре  $\theta = 1,0$

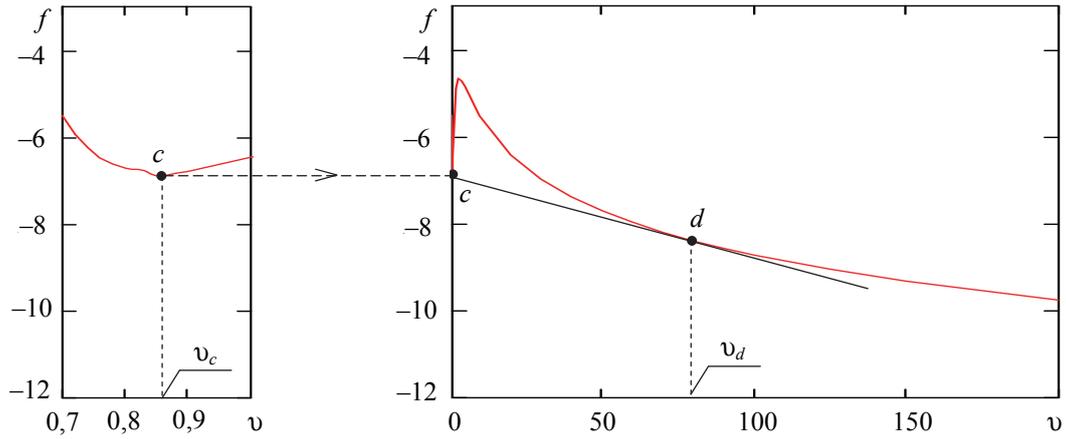


Рис. 4. Изотерма свободной энергии при температуре  $\theta = 1,5$

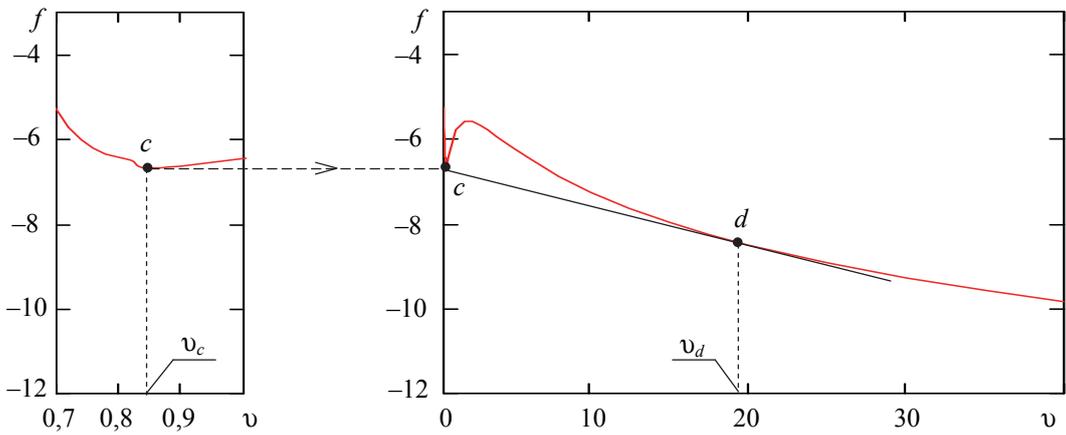


Рис. 5. Изотерма свободной энергии при температуре  $\theta = 2,0$

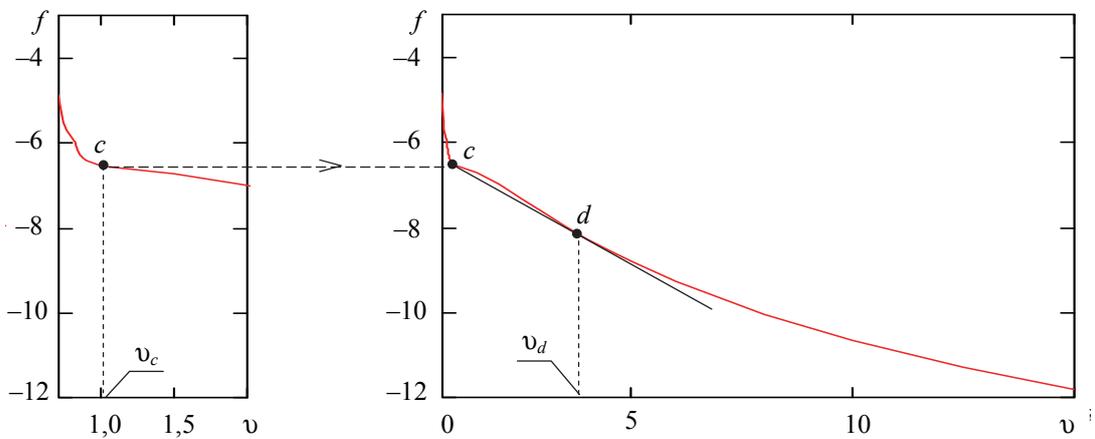


Рис. 6. Изотерма свободной энергии при температуре  $\theta = 3,0$

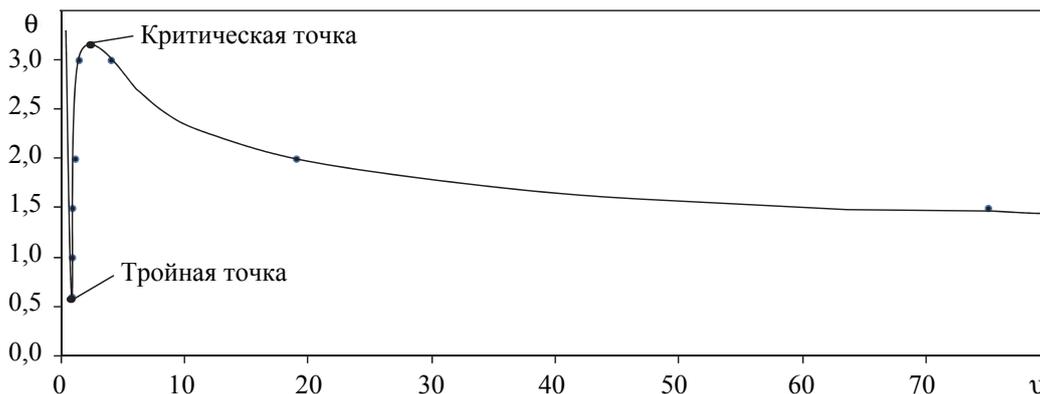


Рис. 7. Фазовая диаграмма для простых веществ

**Заключение.** С помощью разработанной модернизированной компьютерной программы решена замкнутая система модифицированных интегральных и алгебраических уравнений для гетерогенной системы, содержащей кристаллическую наночастицу внутри флюидной среды. По результатам расчетов построены изотермы свободной энергии однородной молекулярной системы в широкой области молекулярных объемов, включающей области существования кристаллического, жидкого и газообразного со-

стояний вещества. С их помощью численно-геометрическим методом решена задача по определению термодинамических параметров фазовых переходов кристалл – газ, кристалл – жидкость и жидкость – газ при соответствующих температурах. Построенная фазовая диаграмма простых веществ позволит приступить к расчетам по определению полей плотности в межфазных областях гетерогенных систем и в задачах адсорбции на плоских и сферических поверхностях.

#### Список литературы

1. Наркевич И. И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 1993. 223 с.
2. Наркевич И. И. Интегральное уравнение для потенциалов средних сил и свободная энергия однокомпонентной неоднородной системы в рамках двухуровневого молекулярно-статистического метода // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 1. С. 32–38.
3. Наркевич И. И. Двухуровневый статистический метод описания неоднородных систем. Ч. 1. Симбиоз методов коррелятивных функций и термодинамических функционалов плотности: монография. Нордерштедт: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2019. 114 с.
4. Ротт Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. М.: Наука, 1979. 280 с.
5. Наркевич И. И., Квасов Н. Т., Козич Е. Ю. Двухуровневое молекулярно-статистическое изучение структуры и термодинамических характеристик однородных макроскопических систем и сферических наночастиц // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 61–65.
6. Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В., Зубрицкий Д. Е. Численно-аналитический расчет микроскопического распределения центров коллоидных частиц в макроскопически однородном водном растворе // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 2. С. 47–51.
7. Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В. Разработка компьютерной программы для расчета структурных и термодинамических характеристик кристаллических наночастиц разных размеров // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2019. № 2. С. 34–39.
8. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Two-level statistical description of structure of homogeneous macroscopic system and spherical crystalline nanoparticles // Nanoscience and Technology: An International Journal. 2019. № 10 (4). P. 365–376.

#### References

1. Narkevich I. I. *Molekulyarno-statisticheskaya teoriya neodnorodnykh kondensirovannykh sred. Dis. dokt. fiz.-mat. nauk* [Molecular-statistical theory of the non-homogeneous condensed matter. Doct. Diss.]. St. Petersburg, 1993. 223 p.
2. Narkevich I. I. Integral equation for potentials forces and free energy inhomogeneous one-component system within two-level molecular-statistical methods. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 1, pp. 32–38 (In Russian).

3. Narkevich I. I. *Dvukhurovnevyy statisticheskiy metod opisaniya neodnorodnykh sistem. Simbioz metodov korrelyativnykh funktsiy i termodinamicheskikh funktsionalov plotnosti* [Two-level statistical method for describing heterogeneous systems. Symbiosis of methods of correlative functions and thermodynamic functionals of density]. Norderstedt, LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2019. 114 p.

4. Rott L. A. *Statisticheskaya teoriya molekulyarnykh sistem* [Statistical theory of molecular systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 280 p.

5. Narkevich I. I., Kvasov N. T., Kozich E. Yu. Two-level molecular-statistical description of the structure and thermodynamic characteristics of homogeneous macroscopic systems and spherical nanoparticles. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 61–65 (In Russian).

6. Narkevich I. I., Farafontova E. V., Zubrytski D. E. Numerical-analytical calculation of microscopic distribution of colloid particle centers in a macroscopically homogeneous aqueous solution. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 2, pp. 47–51 (In Russian).

7. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Development of a computer program for the calculating of the structural and thermodynamic characteristics of crystalline nanoparticles of different sizes. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2019, no. 2, pp. 34–39 (In Russian).

8. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Two-level statistical description of structure of homogeneous macroscopic system and spherical crystalline nanoparticles. *Nanoscience and Technology: An International Journal*, 2019, no. 10 (4), pp. 365–376.

#### Информация об авторах

**Наркевич Иван Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: narkevich@belstu.by

**Фарафонтова Елена Валерьевна** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: farafontova@belstu.by

**Кулеш Алексей Александрович** – студент. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь).

**Рогач Алеся Александровна** – студентка. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь).

#### Information about the authors

**Narkevich Ivan Ivanovich** – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: narkevich@belstu.by

**Farafontova Elena Valer'yevna** – PhD (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: farafontova@belstu.by

**Kulesh Aleksey Aleksandrovich** – student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus).

**Rogach Alesya Aleksandrovna** – student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus).

*Поступила после доработки 15.05.2020*

УДК 539.211:539.1.06

**О. Г. Бобрович**

Белорусский государственный технологический университет

**КОМПОЗИЦИОННЫЙ СОСТАВ И ДЕФЕКТООБРАЗОВАНИЕ В КРЕМНИИ С ИМПЛАНТИРОВАННЫМ МАРКЕРОМ Xe ПРИ НАНЕСЕНИИ ТИТАНА В УСЛОВИЯХ ИОННОГО АССИСТИРОВАНИЯ**

При изучении взаимопроникновения элементов подложки и тонкой пленки, получаемой методами ионно-ассистированного нанесения покрытий, необходимо устанавливать границу раздела фаз в структуре пленка – подложка. С этой целью выполнены эксперименты с маркерными слоями ксенона, который имплантировался в кремниевые образцы с энергией 10 и 40 кэВ и дозами от  $1 \cdot 10^{14}$  до  $27 \cdot 10^{14}$  см<sup>-2</sup>. Образцы кремния с имплантированным маркером ксенона модифицировали осаждением титана в условиях ионного Ti<sup>+</sup> ассистирования при ускоряющем напряжении 7 кВ. Подготовленные и модифицированные таким образом образцы исследовались методом резерфордовского обратного рассеяния в сочетании с каналированием (РОР/К) ионов гелия с энергией 2 МэВ, а также применялось компьютерное моделирование с помощью программы RUMP. Анализ спектров РОР и компьютерное моделирование позволили обнаружить встречные потоки элементов матрицы в покрытии. Наряду с сопутствующими примесями водорода, углерода и кислорода в состав пленки на основе металла входит 10–15 ат. % кремния.

**Ключевые слова:** кремний, Ti-покрытие, Xe-маркер, дефектообразование, ионно-ассистированное нанесение покрытий.

**O. G. Bobrovich**

Belarusian State Technological University

**COMPOSITION AND DAMAGE OF SILICON WITH AN IMPLANTED MARKER Xe AT DEPOSITION OF TITANIUM IN THE CONDITIONS OF ION ASSISTANCE**

Ion-beam mixing at the Ti – Si interface has been investigated with 7 keV Ti<sup>+</sup> ions. The irradiations have been carried out at room temperature during self-ion-assisted deposition of Ti-coatings on silicon. Xe-marker layers have been prepared by embedding of Xe using ion implantation of 10 and 40 keV Xe<sup>+</sup> ions, the doses ranging from  $1 \cdot 10^{14}$  to  $27 \cdot 10^{14}$  cm<sup>-2</sup>. Atomic intermixing has been determined by means of Rutherford backscattering spectrometry. RBS data for concentration against depth have been compared with data from the RUMP and the RBS codes simulation data. Elemental analysis of the coatings shows a high content of oxygen, carbon, hydrogen and silicon. The structures Ti – Si are found to have a deep penetrated Ti, O, C into silicon and a high concentration of Si (up to 10–15 at. %) in the coatings. The observation of an enhanced mixing efficiency with a Xe<sup>+</sup> dose possibly indicates that the radiation-enhanced diffusion contributes to the mixing process.

**Key words:** silicon, Ti-coating, Xe-marker, damage, self-ion-assisted deposition of coating.

**Введение.** Вакуумные методы модификации поверхности различных материалов являются неотъемлемой частью технологии микроэлектроники. Эти методы используются в первую очередь для нанесения различного рода тонкопленочных покрытий: контактные площадки; пленочные резисторы и конденсаторы; пленки и элементы схем на основе материалов со специфическими электрофизическими свойствами; защитные покрытия [1]. Среди вакуумных методов модификации поверхности представляет интерес ионно-ассистированное нанесение покрытий на поверхность изделий из других материалов, при котором осаждение металлического покрытия сопровождается облучением ионами того же металла [2]. При этом известно, что свойства модифицированной поверхности во многом определяются рядом фак-

торов, среди которых, такие как: элементный и фазовый состав покрытий, их структура, адгезия к подложке, топография и др. [3]. Поэтому при проведении исследований по нанесению покрытий необходима диагностика поверхности конструкции покрытие – подложка.

Ионно-ассистированное нанесение тонких пленок на подложку сопровождается радиационным повреждением поверхности из-за торможения ассистированных ионов с образованием в подложке каскадов атомных столкновений на начальной стадии процесса осаждения [4, 5]. Таким образом, актуальным представляется исследование радиационных дефектов в кремнии, поверхность которого модифицировалась осаждением металлического покрытия в условиях ионного ассистирования. В экспериментах используются метки ксенона для определения ис-

ходной поверхности подложки кремния и изучения повреждения кристалла кремния при нанесении металлических покрытий. Ионная бомбардировка в процессе нанесения покрытий усиливает взаимное перемешивание на межфазной границе покрытие – подложка. Этот процесс и ряд других, например образование силицидов, являются предметом многочисленных исследований из-за широкого применения в новых электронных приборах [6].

В настоящей работе обсуждаются результаты изучения композиционного состава, повреждения структуры кремния, модифицированного ионно-ассистируемым нанесением металлического покрытия.

**Основная часть.** Подложки представляли собой пластины кристалла (100) Si. Половина пластины защищалась маской, во вторую половину имплантировались метки ксенона с энергией 10 или 40 кэВ и интегральными потоками ионов  $(1-27) \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ . После имплантации метки Si снималась, и затем на обе половины образца кремния осаждали титановое покрытие при ускоряющем напряжении 7 кВ для ассистирующих ионов  $\text{Ti}^+$  при комнатной температуре. Средняя скорость нанесения покрытий находилась в пределах 0,4–0,5 нм/мин. Давление в вакуумной камере при имплантации ионов  $\text{Xe}^+$  было  $4 \cdot 10^{-4}$  Па, а давление в процессе осаждения металлического покрытия составляло  $\sim 10^{-2}$  Па. Таким образом, в данной работе изучались две серии образцов кремния с покрытиями. Одна серия образцов кремния имела имплантированные метки Xe, а другая – нет.

Покрытия Ti наносились на кремний с использованием резонансного ионного источника вакуумной электродуговой плазмы. Данный источник создает плазму вакуумного электродугового разряда, в которой одновременно генерируются положительные ионы и нейтральная фракция из материала электродов источника ионов. В качестве материала электродов использовался титан технической 99,9% чистоты.

Элементный состав, повреждение исходных образцов кремния и образцов кремния с имплантированной меткой ксенона до и после модифицирования изучали методом резерфордского обратного рассеяния ионов гелия в сочетании с каналированием (РОР/К) с энергией 2 МэВ и геометрией рассеяния  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 12^\circ$ ,  $\theta = 168^\circ$ . Разрешение детектора было 25 кэВ. Доза имплантации ксенона уточнялась непосредственно из экспериментов путем измерения слоевой концентрации имплантированного Xe. Величины среднего проективного пробега элементов в матрице

были рассчитаны при помощи компьютерной программы TRIM-89 [7].

На рис. 1 представлены спектры обратного рассеяния ионов гелия от кремния с ксеноновым маркером до и после осаждения титанового покрытия в условиях ассистирующего ионами  $\text{Ti}^+$ . Вид спектров РОР от структуры покрытия Ti – (100) Si + Xe позволяет сделать вывод о том, что в покрытии, кроме атомов осаждаемого металла титана, содержатся атомы кислорода и углерода, которые являются технологическими примесями вакуума, созданного паромасляным диффузионным насосом, и вводятся в покрытие в процессе осаждения.

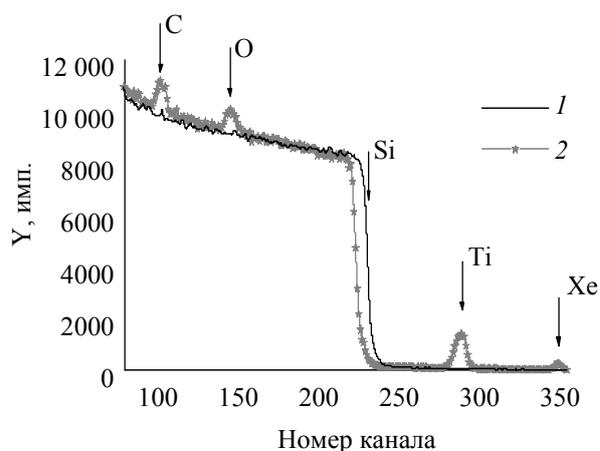


Рис. 1. Спектры РОР ионов гелия от образца кремния с имплантированным Xe до (1) и после осаждения титанового покрытия (2)

На рис. 2 показаны профили глубинного распределения элементов в покрытии и подложке при нанесении титановой пленки на Si без введенного ксенонового маркера при моделировании спектров РОР по программе RUMP.

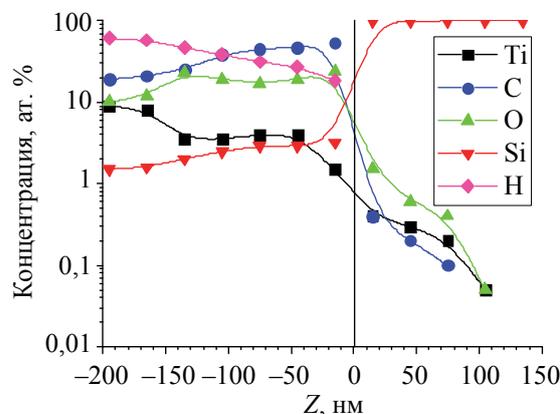


Рис. 2. Распределение элементов по глубине в структуре покрытия Ti – (100) Si, сформированной осаждением титана в условиях ионного  $\text{Ti}^+$  ассистирующего

Профиль Ti характеризуется концентрацией, снижающейся от 9 ат. % на поверхности до 1,5 ат. % в области межфазной границы системы. Более того, атомы Ti идентифицируются в Si на глубине 105 нм с концентрацией ~0,03 ат. %, что свидетельствует об их радиационно-стимулированной диффузии вглубь в процессе нарастания покрытия под радиационным воздействием ассистирующих ионов Ti<sup>+</sup>. Профиль атомов водорода в покрытии качественно согласуется с пространственным распределением титана, однако их концентрация на порядок выше и равна нулю в кремнии.

Кислород распределен в покрытии неравномерно: его концентрация возрастает с 10 ат. % на поверхности покрытия до 25 ат. % вблизи границы пленка – подложка, а в кремнии, хотя его концентрация снижается в несколько раз, но остается выше, чем концентрация Ti, – примерно на порядок. Профиль углерода качественно подобен пространственному распределению кислорода в изучаемой системе, однако их концентрация примерно в 2 раза выше в покрытии и в 2 раза ниже в кремнии. Появление в изучаемых покрытиях атомов O, C и H связано с осаждением на поверхность покрытия в процессе его роста совместно с атомами Ti углеводородной фракции и кислорода из остаточного вакуума в мишенной камере, откачиваемой диффузионным масляным насосом.

Используя метод POP, невозможно напрямую установить присутствие водорода в покрытии. Наличие водорода и его распределение по глубине в покрытии определялось ранее [8] в прямых экспериментах с применением резонансной (1,86 кэВ) ядерной реакции при взаимодействии ионов азота с водородом  ${}^1\text{H}({}^{15}\text{N}, \alpha\gamma){}^{12}\text{C}$  путем амселевского сканирования энергии ионов N<sup>+</sup> в интервале 6,38–7,00 МэВ.

На рис. 3 показаны каналированные спектры POP от кристаллов (100) Si, модифицированных ионно-ассистируемым нанесением Ti. Выход на каналированных спектрах в области 205–230 каналов, связанный с повреждением в кристалле, увеличивается в случае образца Si с имплантированным Хе (спектр 2, рис. 3) по сравнению с образцом Si без Хе (спектр 3, рис. 3), что свидетельствует о дополнительном внесении повреждений в кристалл кремния при осаждении титанового покрытия. Вместе с тем пик (спектры 2 и 3) повреждений смещается в глубину относительно поверхности исходного кремния, отмеченной стрелкой (спектр 4) на рис. 3, что соответствует росту покрытия на поверхности кристалла кремния.

Расчет слоевых концентраций дефектов, выполненный по спектрам POP/К, показывает, что, как и ожидалось, с увеличением дозы им-

плантируемых в кремний ионов Хе<sup>+</sup> от  $1 \cdot 10^{14}$  до  $27 \cdot 10^{14}$  см<sup>-2</sup> с последующим нанесением покрытий Ti на кремний слоевое содержание дефектов в кремнии также увеличивается от  $9,5 \cdot 10^{16}$  до  $18,3 \cdot 10^{16}$  см<sup>-2</sup>.

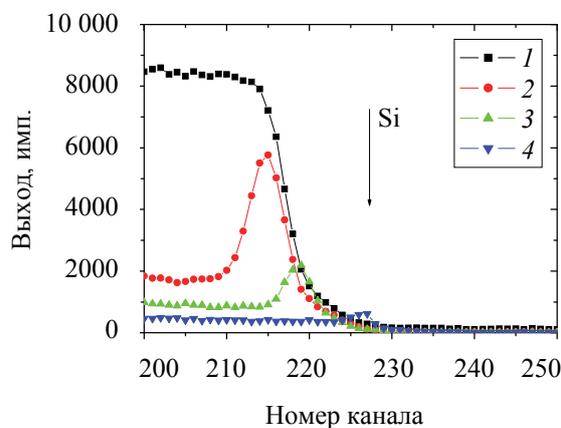


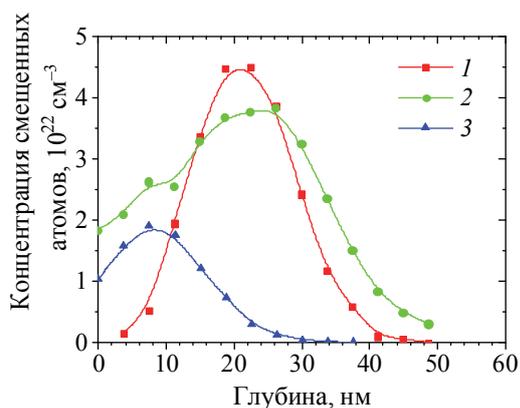
Рис. 3. Спектры POP/К от кристаллов (100) Si, модифицированных осаждением покрытия титана в условиях ионного Ti<sup>+</sup> ассистирующего с имплантированным Хе-потоком  $9 \cdot 10^{14}$  см<sup>-2</sup>: 1 – случайный; 2 – каналированный; 3 – без Хе; 4 – от исходного кристалла кремния

Характер повреждения на спектрах POP (рис. 3) каналированных ионов отражает тот факт, что кремний повреждается лишь в начальный момент времени модифицирования образца. Действительно, если бы это было не так, то намного раньше, чем при используемых дозах титана  $1 \cdot 10^{16}$  см<sup>-2</sup>, должна была бы наступить аморфизация поверхностного слоя кремния, а этого не наблюдается. Так выход каналированных спектров POP на рис. 3 не достигает выхода случайного спектра POP, т. е. доза ассистирующих ионов титана, падающих на кремний, меньше дозы аморфизации.

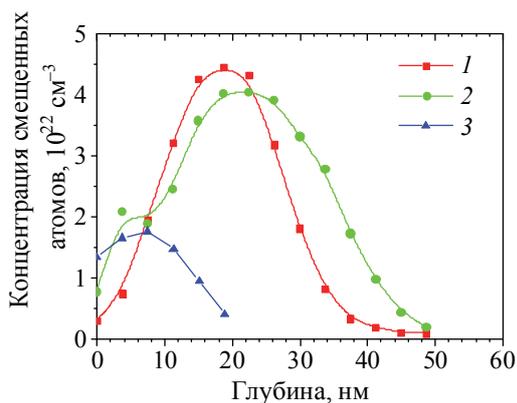
На рис. 4 приведено распределение концентрации радиационных дефектов в кремнии по глубине, рассчитанное на основе спектров POP/К от образцов Si, с имплантацией метки Хе и без, модифицированных ионно-ассистируемым нанесением металлических титановых покрытий. Глубинные профили дефектов нормированы на поверхность исходного кремния, которая устанавливается согласно методике, описанной ранее в статье [8].

Осаждение покрытий на кремний с имплантированной меткой Хе приводит к размытию профиля повреждений и миграции дефектов в кремнии на глубины, превышающие проективный пробег (12,9 нм) ионов Ti<sup>+</sup>, свидетельствуя о том, что процессы являются радиационно активными в результате управляемого энерговыделения (0,22 эВ/атом) в каскаде

атомных столкновений при нанесении покрытия в условиях ассистирования ионами  $Ti^+$ . Максимальная концентрация смещенных из узлов атомов кремния, полученная при имплантации ионов  $He^+$ , уменьшается при последующем нанесении покрытия в условиях ассистирования ионами  $Ti^+$ , что также связывается с активацией миграционных процессов вглубь кремния при повышенном энерговыделении.



а



б

Рис. 4. Распределение концентрации дефектов по глубине в кремнии после:

- 1 – имплантации ионов  $He^+$  с  $E = 40$  кэВ и дозами  $\Phi = 9 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$  (а) и  $\Phi = 27 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$  (б);
- 2 – ионно-ассистированного осаждения  $Ti$ -покрытия на кремний с имплантированным  $He$ ;
- 3 – ионно-ассистированного нанесения  $Ti$

О характере радиационного повреждения кремния при облучении ионами  $He^+$ ,  $Ti^+$  свидетельствуют данные о зависимости слоевой концентрации дефектов в подложке от дозы ионов маркера ( $He^+$ ) с энергией 10 и 40 кэВ при ионно-ассистированном нанесении покрытий  $Ti$  при ускоряющем напряжении 7 кВ (рис. 5). Из рис. 5 видно, что при облучении ионами  $He^+$  происходит насыщение кремния радиационными дефектами.

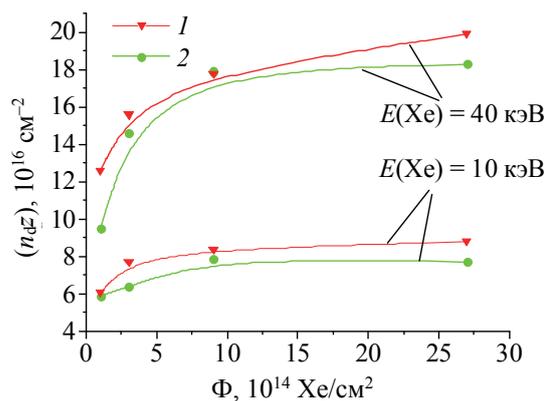


Рис. 5. Дозовая зависимость слоевой концентрации смещенных из узлов атомов кремния: 1 – с имплантированным  $He$  в (100) Si; 2 – с имплантированным  $He$  в (100) Si и при последующем осаждении покрытия титана

Однако при последующем облучении ионами  $Ti^+$  слоевая концентрация дефектов, созданных в кремнии во время имплантации ионами  $He^+$  с энергией 10 и 40 кэВ, уменьшается. По-видимому, под действием ионов титана, ассистированных нанесение покрытий, в результате радиационного усиления диффузионных процессов происходит частичное восстановление концентрации радиационных повреждений кремния (рис. 5).

**Заключение.** Методом POP/K и компьютерного моделирования спектров по программе RUMP установлено, что при облучении Si ионами  $He^+$  концентрация смещенных из узлов кристаллической решетки радиационно-индуцированных междоузельных атомов растет с увеличением дозы имплантированных атомов  $He$ , играющих роль маркера. Максимальная концентрация междоузельных атомов Si, образующихся при имплантации ионов  $He^+$ , уменьшается в процессе ионно-ассистированного осаждения  $Ti$ -покрытий, что приводит к снижению слоевой концентрации радиационных дефектов. Наблюдаемые эффекты объясняются радиационным усилением диффузии в процессе облучения системы покрытия – подложка ассистированными ионами, приводящей к взаимной миграции атомов компонентов покрытия в Si-подложку и атомов Si из подложки в покрытие. Установлено, что в процессе ионно-ассистированного нанесения тонких пленок  $Ti$  на Si-подложку в составе покрытия обнаруживаются атомы углерода, кислорода, водорода и кремния. Предварительные результаты свидетельствуют о влиянии упругих напряжений, вызванных введением в Si ксенона, на формирование осаждаемых покрытий и миграционные процессы в области границы раздела покрытие – подложка.

### Список литературы

1. Hirvonen J. K. Ion beam assisted thin film deposition: Fundamentals and Applications of IBAID Processing // *Materials and Processes for Surface and Interface Engineering* / Y. Pauleau (ed.). Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1995. P. 307–346.
2. Ion beam assisted deposition of tantalum nitride thin films for vacuum microelectronic devices / Y. Gotoh [et al.] // *Surf. Coat. Technol.* 2002. Vol. 158–159. P. 729–731.
3. Bobrovich O. G., Mikhalkovich O. M., Tashlykov I. S. Composition and morphology of Ti and W coatings deposited on silicon during ion-beam assistance // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2015. Vol. 6, no. 3. P. 229–233.
4. Colligon J. Energetic condensation: Processes, properties, and products // *J. Vac. Sci. Technol.* 1995. Vol. 13. P. 1649–1657.
5. On the efficiency of deposited energy density for ion beam mixing processes with ions implanted during and after thin metal film deposition / I. S. Tashlykov [et al.] // *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.* 1993. Vol. B80/81. P. 98–101.
6. Композиционный состав и повреждение поверхности кремния ионно-ассистированным нанесением тонких пленок / И. С. Ташлыков [и др.] // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*. 2009. № 5. С. 92–95.
7. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for Rutherford backscattering analysis // *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.* 1986. Vol. B15. P. 227–238.
8. Изучение ядерно-физическими методами металлосодержащих (Ti, Co)-покрытий, осажденных методом ионного ассистирования на кремний / О. Г. Бобрович [и др.] // *Физика и химия обработки материалов*. 2006. № 1. С. 54–58.

### References

1. Hirvonen J. K. Ion beam assisted thin film deposition: Fundamentals and Applications of IBAID Processing. *Materials and Processes for Surface and Interface Engineering*. Y. Pauleau (ed.). Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1995, pp. 307–346.
2. Gotoh Y., Kagamimori K., Tsuji H., Ishikawa J. Ion beam assisted deposition of tantalum nitride thin films for vacuum microelectronic devices. *Surf. Coat. Technol.*, 2002, vol. 158–159, pp. 729–731.
3. Bobrovich O. G., Mikhalkovich O. M., Tashlykov I. S. Composition and morphology of Ti and W coatings deposited on silicon during ion-beam assistance. *Inorganic Materials: Applied Research.*, 2015, vol. 6, no. 3, pp. 229–233.
4. Colligon J. Energetic condensation: Processes, properties, and products. *J. Vac. Sci. Technol.*, 1995, vol. 13, pp. 1649–1657.
5. Tashlykov I. S., Belyi I. M., Bobrovich O. G., Kalbitzer S., Meyer O., Wolf G. K., Enders B. On the efficiency of deposited energy density for ion beam mixing processes with ions implanted during and after thin metal film deposition. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.*, 1993, vol. B80/81, pp. 98–101.
6. Tashlykov I. S., Bobrovich O. G., Barayshuk S. M., Mikhalkovich O. M., Antonovich I. P. Composition and damage of silicon surface at ion assisted deposition of thin films. *Poverkhnost'. Rentgenovskiyе, sinkhrotronnyye i neytronnyye issledovaniya* [Surface. X-ray, synchrotron and neutron studies], 2009, no. 5, pp. 92–95 (In Russian).
7. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for Rutherford backscattering analysis. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.*, 1986, vol. B15, pp. 227–238.
8. Bobrovich O. G., Tashlykov I. S., Tul'ev V. V., Barayshuk S. M. The study of nuclear-physical methods of metal (Ti, Co)-coating deposited by ion-assisting of on silicon. *Fizika i khimiya obrabotki materialov* [Physics and chemistry of material processing], 2006, no. 1, pp. 54–58 (In Russian).

### Информация об авторе

**Бобрович Олег Георгиевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olegbobrovich@belstu.by

### Information about the author

**Bobrovich Oleg Georgievich** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olegbobrovich@belstu.by

Поступила после доработки 01.04.2020

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

---

УДК 681.53

**Д. А. Гринюк, И. Г. Сухорукова, Н. М. Олиферович, И. О. Оробей**  
Белорусский государственный технологический университет

### **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ В КАСКАДНЫХ СИСТЕМАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОЙ НАСТРОЙКЕ ЧЕТЫРЕХ ПАРАМЕТРОВ**

В статье рассмотрены проблемы синтеза каскадных систем регулирования с применением нелинейных ПИД-регуляторов.

Ввиду увеличения вычислительной мощности микропроцессорных систем и совершенствования методик настройки появилась возможность повсеместно использовать нелинейные регуляторы. Нелинейные ПИД-регуляторы показали свою эффективность и уже применяются в отдельных прикладных решениях. Одной из популярных модификаций данных регуляторов является вариант, основанный на нелинейных преобразованиях сигнала ошибки и сигнала управления. Несмотря на использование различных математических функций для нелинейных преобразований, они имеют подобные зависимости, которые могут быть близко аппроксимированы друг другом. Зависимости с использованием логарифмической функции реализуются и настраиваются проще в технических системах, чем с использованием степенной или гиперболической.

После предварительного анализа для шести способов построения регуляторов была произведена настройка для пяти вариантов динамических характеристик каскадной системы регулирования. Настройка выполнялась численным методом с применением интегрального критерия. Далее были определены некоторые показатели качества и проведен их сравнительный анализ. Также проанализировано поведение систем при ограничении управляющего воздействия. Из всех вариантов для промышленных технических систем может быть рекомендован вариант использования регулятора с нелинейным преобразованием ошибки для всех его составляющих. Итоговые таблицы и графики показывают, что использование нелинейных функций преобразования ошибки и сигнала управления для внутреннего регулятора является нецелесообразным, по крайней мере, для рассмотренного класса динамических объектов. При наличии в объекте нелинейных свойств предлагается использовать антинелинейные преобразования для улучшения качества работы каскадных систем регулирования.

**Ключевые слова:** нелинейный ПИД-регулятор, каскадные системы управления.

**D. A. Hryniuk, I. G. Suhorukova, N. M. Oliferovich, I. O. Orobei**  
Belarusian State Technological University

### **USE OF NONLINEAR CONTROLLERS IN CASCADE REGULATION SYSTEMS AT SIMULTANEOUS SETTING OF FOUR PARAMETERS**

The article discusses the problems of synthesis of cascade control systems using nonlinear PID controllers.

In view of the increase in the computing power of microprocessor systems and the improvement of tuning techniques, it became possible to use nonlinear regulators everywhere. Nonlinear PID controllers have been shown to be effective and are already used in individual application solutions. One of the popular modifications of the controller data is the option based on nonlinear transformations of the error signal and the control signal. Despite the use of various mathematical functions for nonlinear transformations, they have similar dependencies that can be closely approximated by each other. Dependencies using a logarithmic function are implemented and configured easier in technical systems than using a power or hyperbolic function.

After a preliminary analysis for six ways of constructing regulators, tuning was made for five variants of the dynamic characteristics of a cascade control system. The adjustment was carried out numerically using integral criteria. Then some quality indicators were determined and their comparative analysis was carried out. Also, an analysis of the behavior of systems with a limitation of the control action was performed. Of all the options for industrial technical systems, the option of using a controller with nonlinear error conversions for all its components can be recommended. The resulting tables and graphs show that the use of nonlinear error conversion functions and a control signal for the internal controller is not advisable, at least for the considered class of dynamic objects. If the object has nonlinear properties, it is proposed to use antilinear transformations to improve the quality of cascade control systems.

**Key words:** nonlinear PID controller, cascade control systems.

**Введение.** При синтезе современных систем автоматического управления используются различные подходы – от наиболее простых универсальных пропорционально-интегрально-дифференциальных (ПИД) алгоритмов до модального управления, аналитического конструирования регуляторов и т. д. До недавнего времени нелинейные свойства системы рассматривались как нежелательные элементы, которые усложняют ее поведение и анализ. Наиболее типичным решением является применение различных видов линеаризации, однако для многих типов систем этот подход не приемлем. Универсальные методы анализа устойчивости, такие как функция Ляпунова, во многих случаях сложны и трудоемки. Кроме того, данный метод не гарантирует качества переходных процессов.

В то же время нелинейные корректирующие устройства обладают большим потенциалом. Тем не менее исследования показали, что во многих случаях использование нелинейных законов управления может значительно улучшить параметры проектируемой системы [1–4]. Отдельно стоит упомянуть об удачных попытках использования при управлении технологическими процессами нечетких, нейронных и гибридных алгоритмов, которые, по сути, также являются нелинейными системами [5].

Интерес к применению нелинейных систем управления увеличивался по мере роста вычислительных мощностей компьютерных систем и развития вычислительных методов моделирования. Немаловажным оказалось и развитие нечетких, нейронных, генетических методов оптимизации, методов вероятностного программирования. Сейчас в год выходят десятки статей по развитию и использованию нелинейных ПИД-регуляторов.

Одним из старых направлений исследования нелинейных систем является использование систем управления с переменной структурой. Имеется широкий круг публикаций как общего характера, так и применимых для ПИД-закона регулирования.

Анализ публикаций в области нелинейных систем с использованием ПИД-регуляторов

позволяет разделить их на ряд отдельных направлений:

- новые решения и развитие нелинейных ПИД-регуляторов;
- адаптация и применение нелинейных ПИД-регуляторов в конкретных технических решениях и демонстрация их преимуществ [5];
- развитие многопараметрической оптимизации для настройки нелинейных ПИД-регуляторов;
- развитие методов автоподстройки линейных и нелинейных ПИД-регуляторов.

Очень широко исследуются нелинейные компенсаторы для замкнутых контуров управления, которые формируют отдельное направление развития систем управления. Данное решение скорее является общим структурным улучшением динамики работы замкнутых нелинейных систем, которые применимы при использовании ПИД-регуляторов.

Также изучаются нелинейные функции для устранения недостатков, которые присущи непосредственно ПИД-закону регулирования [1, 2]. Авторы пытаются за счет подбора нелинейных функций ошибки или управляющего воздействия решить проблему улучшения качества переходного процесса, устранить интегральное насыщение, повысить запас устойчивости и т. д.

Стоит отметить, что большинство прикладных регуляторов для технологических процессов в большинстве своем содержали нелинейные элементы. Вследствие наличия ограничения на управляющее воздействие, которое всегда характерно для таких исполнительных механизмов, как клапаны и насосы т. д., возникало интегральное насыщение. Для защиты от данного явления давно применяется алгоритм отключения интегральной составляющей регулятора при вхождении системы в ограничение.

По мере развития данного решения были предложены варианты использования нелинейных функций преобразования ошибки. В литературе присутствуют варианты как использования общего нелинейного преобразования, так и подбор индивидуальных нелинейных преобразований для каждой из составляющих ПИД-регулятора.

**Выбор нелинейной функции.** Наиболее часто в литературе встречаются нелинейные функции вида

$$K(e, \alpha) = \sinh(\alpha e) = \frac{\exp(\alpha e) + \exp(-\alpha e)}{2}, \quad (1)$$

$$K(e, \alpha, \delta) = \begin{cases} |e|^\alpha \operatorname{sign}(e), & \text{если } |e| > \delta; \\ \delta^{\alpha-1} e, & \text{если } |e| \leq \delta. \end{cases} \quad (2)$$

В [1, 3] была показана эффективность использования функции

$$K(e, \alpha) = \operatorname{sign}(e) \frac{\ln(1 + \alpha|e|)}{(1 + \alpha)}. \quad (3)$$

Она нашла удачное применение и для ПИД-регуляторов с двумя степенями свободы 2DoF [4, 6].

В целом данные нелинейные функции ошибки (1)–(3) подобны. Они имеют небольшие отличия в статических характеристиках (рис. 1, 2) при определенных подстрочных коэффициентах  $\alpha$  и  $\delta$  в области небольших значений ошибки  $e$ . На рис. 1 представлены статические характеристики (1)–(3) для вариантов, которые имеют одинаковое квадратичное отклонение в диапазоне  $\pm 2,5$ .

Градиентные характеристики нелинейных функций при тех же коэффициентах  $\alpha$  и  $\delta$  имеют большие отличия (рис. 3). Характеристика  $dK/de$  для (2) имеет точки разрыва, тогда как (3) обеспечивает большую разницу в  $dK/de$  при малом и большом отличии производных. В области больших значений рассогласования в замкнутой системе наблюдаются близкие значения для  $dK/de$  функций (1) и (3). Обе эти функции демонстрируют существенные отличия от (2).

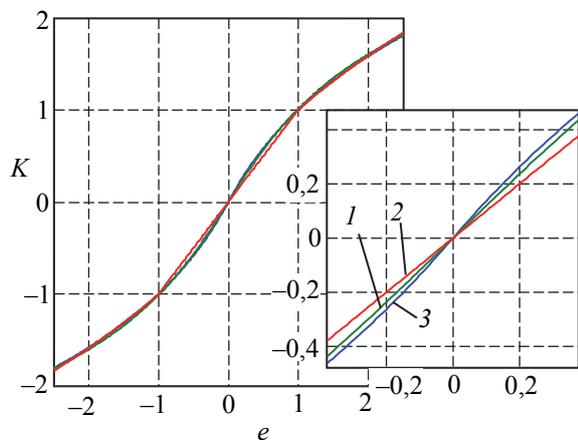


Рис. 1. Статическая характеристика нелинейных функций для малых значений  $e$ :  
1 – при  $\alpha = 1,196$ ; 2 – при  $\alpha = 0,6597, \delta = 1,006$ ;  
3 – при  $\alpha = 1$

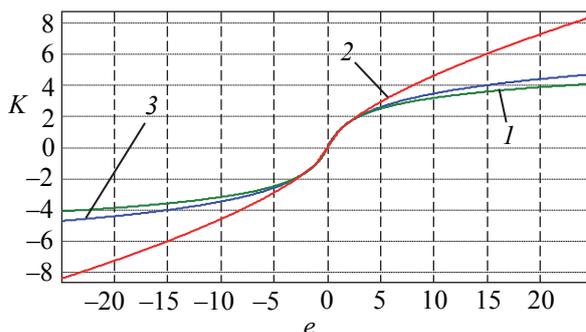


Рис. 2. Статическая характеристика нелинейных функций для больших значений  $e$ :  
1 – при  $\alpha = 1,196$ ; 2 – при  $\alpha = 0,6597, \delta = 1,006$ ;  
3 – при  $\alpha = 1$

Можно предположить, что функции (1) и (3) в прикладных задачах будут демонстрировать близкие результаты. Они одинаково решают проблему интегрального насыщения, для чего в первую очередь была предложена функция (3) [1]. В замкнутых контурах регулирования с запаздыванием для (1) при увеличении коэффициента усиления объекта будут возникать автоколебания, которые наблюдаются для (3) [2].

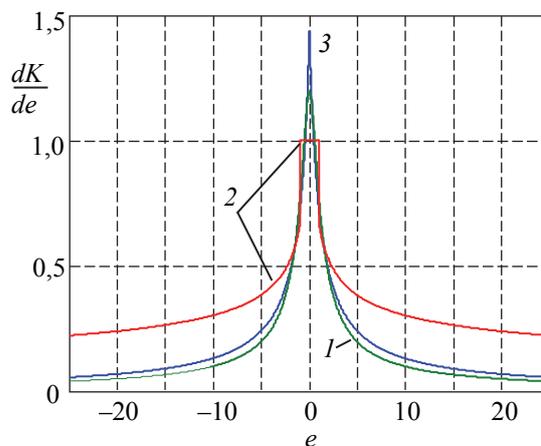


Рис. 3. Градиентная характеристика нелинейных функций для больших значений  $e$ :  
1 – при  $\alpha = 1,196$ ; 2 – при  $\alpha = 0,6597, \delta = 1,006$ ;  
3 – при  $\alpha = 1$

Следует отметить некоторые проблемы реализации нелинейных функций. Функции (1) и (2) будут иметь сложности при технической реализации. В стандарте IEC 61131-3 отсутствуют встроенные решения по реализации гиперболических и степенных функций. В приложении SIMULINK программы MATLAB также наблюдаются проблемы вычисления гиперболических функций при малых значениях аргумента для сохранения точности. Но это не преодолимые трудности. Для встроенных систем это не будет составлять проблему.

Однако ПИД-регуляторы используются и в более сложных системах регулирования. К таким можно отнести каскадные системы регулирования (в автоматизированном электроприводе их называют подчиненными). Самая простейшая каскадная система требует настройки двух регуляторов. Внешний регулятор предназначен для обеспечения качества и устойчивости системы, внутренний – для обеспечения быстродействия. В качестве внешнего регулятора обычно используют ПИ- или ПИД-законы, а в качестве внутреннего – обычно П-, иногда ПД-регулятор [7].

В [7] было показано, что каскадные системы улучшают динамику объекта управления в случае, когда динамика внутреннего канала составляет 50–70% от общей динамики. В реальных условиях управления технологическим оборудованием редко имеется возможность выбирать такое соотношение. Но использование данного соотношения позволяет обеспечить хорошую чувствительность при решении поставленной задачи.

**Объект исследования.** Задача стояла оценить эффективность использования нелинейных регуляторов для каскадных систем управления.

В качестве объекта была выбрана структура, приведенная на рис. 4.

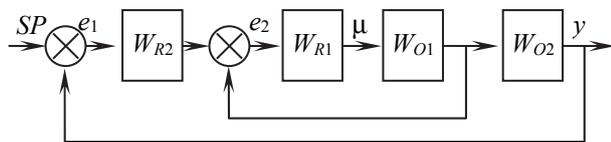


Рис. 4. Структура каскадной системы автоматического регулирования (САР):

$SP$  – сигнал задания;  $e$  – сигнал ошибки;  $\mu$  – сигнал управления;  $y$  – выходной сигнал;  $W_{R1}$ ,  $W_{R2}$  – передаточные функции внутреннего (вспомогательного) и внешнего (основного) регулятора соответственно;

$W_{O1}$ ,  $W_{O2}$  – передаточные функции внутреннего и внешнего объекта соответственно

Для передаточных функций объекта были приняты следующие значения:

$$W_{O1}(s) = \frac{k}{1+100s} \exp(-\tau s), \quad (4)$$

$$W_{O2}(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+30s)}. \quad (5)$$

Величина запаздывания существенно влияет на динамические характеристики, запас устойчивости и т. д. Поэтому каскадные системы с разными регуляторами тестировались при значениях запаздывания  $\tau = [0,1 \ 1 \ 5 \ 10 \ 50]$ . Для нахождения настроек значение  $k = 1$ .

Поведение систем сложно прогнозируется, особенно если в контуре наблюдается несколько нелинейностей.

По этой причине исследования проводились для объектов с разной величиной запаздывания во внутреннем контуре.

В качестве критерия настройки был выбран интегральный

$$\int_0^{\infty} t^2 |e(t)| dt \rightarrow \min, \quad (6)$$

хорошо зарекомендовавший себя в ряде предыдущих работ [1, 3, 5].

Как было показано выше, вариантов нелинейных преобразований для ПИД-регулятора очень много [8–12]. В данной работе были выбраны несколько вариантов с четырьмя настраиваемыми параметрами.

Сравнение произведено для следующих вариантов построения каскадной системы регулирования:

1) PID + P – линейный внешний регулятор ПИД, внутренний – П-регулятор;

2) NPID + P – П- и И-компоненты с функцией (3) для  $e_1$  внешнего ПИД-регулятора, Д-компонента с линейной функцией ошибки, но внутренний – линейный П-регулятор;

3) NPID + NP – П- и И-компоненты с функцией (3) для  $e_1$  внешнего ПИД-регулятора, Д-компонента с линейной функцией ошибки и  $e_2$  внутреннего П-регулятора с использованием (3);

4) NPID + PN – внешний регулятор как в предыдущем варианте, а внутренний – П-регулятор с функцией (3) для сигнала управления  $\mu$ ;

5) PID + NP – линейный внешний регулятор ПИД, внутренний – нелинейный П-регулятор с функцией (3) для  $e_2$ ;

6) NPID2 + P – функция (3) для  $e_1$  внешнего ПИД-регулятора, но внутренний – линейный П-регулятор.

Оптимизация настроек производилась путем численного моделирования в MATLAB.

**Поведение систем при отсутствии ограничений на управляющее воздействие.** Результаты оптимизации без ограничения управляющего воздействия представлены в табл. 1–5 и на рис. 5–8. Время переходного процесса определялось по последнему моменту нахождения за рамками 3% (табл. 1). Значения в табл. 3 вычислялись путем деления интегральной ошибки разных вариантов каскадной системы регулирования на интегральную ошибку для линейного варианта. В табл. 4 абсолютное значение и относительное значение управляющего воздействия  $\mu$  рассчитывались так же, как интегральная ошибка в табл. 3. Значения в табл. 5 определялись путем ограничения управляющего воздей-

ствия на уровне 60% от максимального значения для линейной системы и моделирования каскадных систем для всех вариантов и делением на значение интегрального критерия при отсутствии ограничений. Для переходных процессов с ограничением управляющего воздействия использована штриховая линия. Для вариантов нелинейных каскадных систем они полностью совпадают с системой без ограничения.

Таблица 1  
Время переходного процесса

Тип системы	$\tau$				
	0,1	1	5	10	50
PID + P	1,956	7,130	30,68	54,76	212,0
NPID + P	2,142	13,67	43,70	73,29	221,2
NPID + NP	8,689	13,25	47,60	78,56	377,4
NPID + PN	38,91	26,80	68,54	90,02	222,9
PID + NP	5,940	16,90	77,10	61,89	242,2
NPID2 + P	2,237	12,15	33,86	70,35	222,9

Таблица 2

Перерегулирование

Тип системы	$\tau$				
	0,1	1	5	10	50
PID + P	49,73	2,478	1,741	2,185	1,667
NPID + P	45,19	4,587	7,794	6,047	0,6783
NPID + NP	69,21	0,0487	3,491	4,572	6,884
NPID + PN	0,0269	0,2402	1,661	0,5492	0,3973
PID + NP	8,644	6,8817	0,3691	2,056	0,1599
NPID2 + P	47,64	0,3552	1,091	3,587	1,628

Таблица 3

Относительное значение интегрального отклонения

Тип системы	$\tau$				
	0,1	1	5	10	50
PID + P	1	1	1	1	1
NPID + P	0,7647	1,207	0,9941	0,9720	1,001
NPID + NP	86,94	4,398	1,564	1,196	1,716
NPID + PN	3680	52,74	8,410	3,451	0,9488
PID + NP	18,30	5,171	3,969	1,333	1,071
NPID2 + P	0,7667	2,396	1,126	1,006	1,157

Таблица 4

Максимальное значение управляющего воздействия

Тип системы	$\tau$				
	0,1	1	5	10	50
PID + P	37 299 677	2 595	49,96	13,27	1,684
NPID + P	36 387 670	2 535	56,64	15,39	1,642
NPID + NP	8 646	377,7	28,22	10,89	1,333
NPID + PN	48,39	36,98	4,965	3,550	1,587
PID + NP	9 049	396,9	16,83	9,114	1,397
NPID2 + P	3 115 407	2 050	45,86	14,12	1,529

Таблица 5

Относительное значение интегрального отклонения в случае попадания системы в 60% ограничения управляющего воздействия

Тип системы	$\tau$				
	0,1	1	5	10	50
PID + P	4,293	15,33	5,790	2,987	3,668
NPID + P	1,728	14,51	5,060	2,711	3,663
NPID + NP	1,000	1,000	1,000	1,618	2,137
NPID + PN	1,000	1,000	1,000	1,000	3,866
PID + NP	1,000	1,000	1,000	1,202	3,425
NPID2 + P	1,166	8,438	3,004	2,234	3,176

Представленные результаты показывают не однозначность выбора. В каждом из критериев есть свои лидеры, которые составляют конкуренцию классическому ПИД-регулятору. Однако наблюдается однозначная тенденция по минимизации использования нелинейных преобразований во внутренней замкнутой системе. Во всех случаях это вызывало существенное ухудшение основных параметров качества настройки. На предварительном этапе были использованы еще несколько вариантов нелинейных функций для внутреннего регулятора, но они приводили к еще более затянутому переходному процессу.

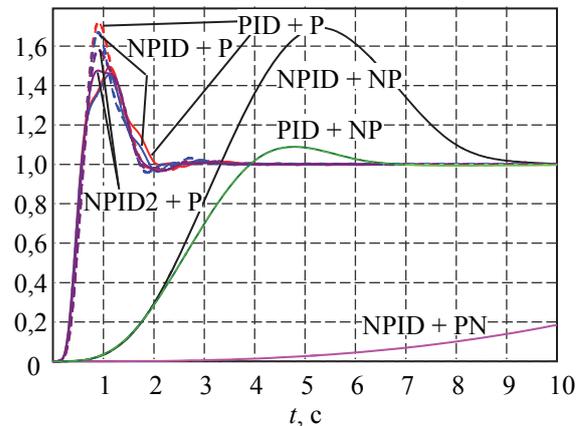


Рис. 5. Переходные процессы при  $\tau = 0,1$  с (Штриховая линия соответствует варианту ограничения управляющего воздействия.)

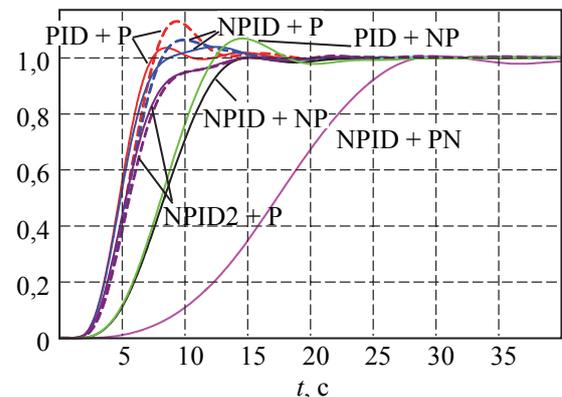
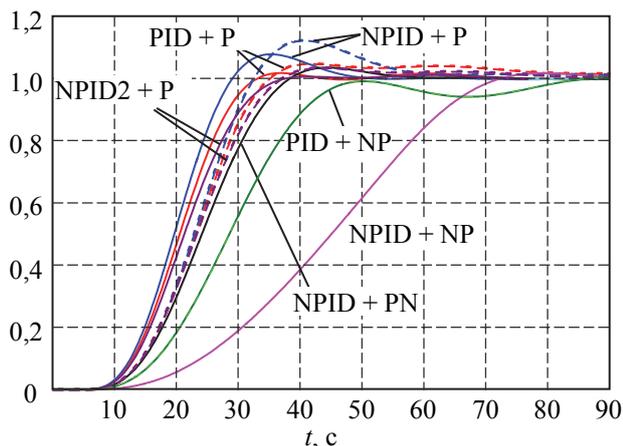
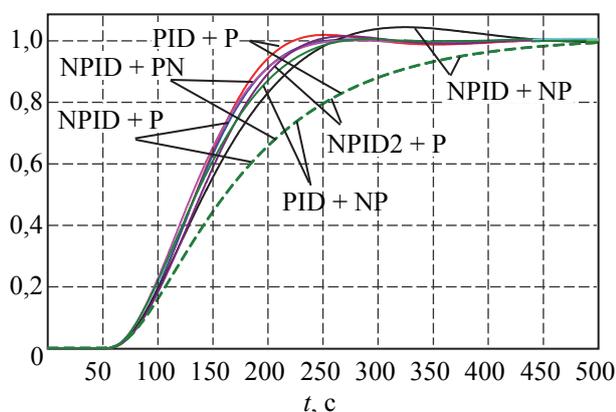


Рис. 6. Переходные процессы при  $\tau = 1$  с

Рис. 7. Переходные процессы при  $\tau = 5$  сРис. 8. Переходные процессы при  $\tau = 50$  с

Для всех вариантов наблюдается очень низкий уровень управляющего воздействия и затянутые переходные процессы. С точки зрения быстродействия лучшие результаты демонстрируют варианты классического регулятора PID + P и нелинейного регулятора NPID + P с нелинейным преобразованием ошибки для пропорциональной и интегральной составляющей. При этом последний вариант показал преимущество по сравнению с PID + P по интегральному критерию почти для всех рассмотренных вариантов динамики. Однако при попадании в ограничение на управляющее воздействие эти варианты построения каскадной системы проявляют существенное ухудшение качества регулирования.

**Поведение систем при ограничении на управляющее воздействие.** Второй этап выбора настроек путем численной оптимизации проводился для объектов, у которых фиксированный уровень ограничения на уровне в 10 раз выше, чем значение при стационарном состоянии.

Результаты оптимизации без ограничения управляющего воздействия представлены в табл. 6, 7 и на рис. 9.

Таблица 6

## Время переходного процесса

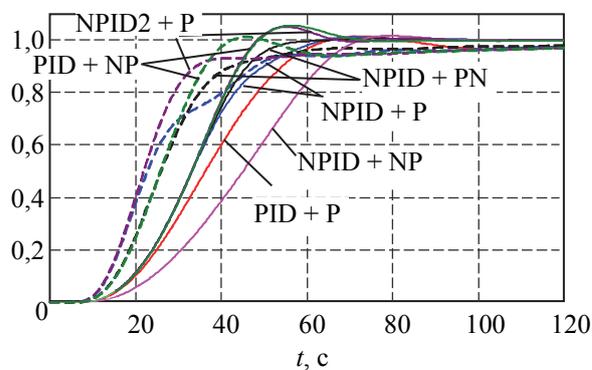
Тип системы	$\tau$				
	0,1	1	5	10	50
PID + P	42,75	56,45	114,1	145,4	226,6
NPID + P	63,76	55,61	58,21	77,72	226,8
NPID + NP	58,53	43,93	51,74	79,59	223,0
NPID + PN	61,01	44,17	68,53	90,02	222,9
PID + NP	42,38	42,78	64,54	59,31	241,3
NPID2 + P	67,27	43,20	60,86	58,01	222,5

Таблица 7

## Относительное значение интегрального отклонения

Тип системы	$\tau$				
	0,1	1	5	10	50
PID + P	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
NPID + P	1,2543	1,0002	0,4546	0,3312	1,0100
NPID + NP	1,2594	0,9281	0,3958	0,3494	0,9575
NPID + PN	1,2832	0,9931	0,9764	0,9864	0,9571
PID + NP	1,0419	0,9537	0,4038	0,3469	1,0758
NPID2 + P	1,4545	0,8806	0,4125	0,3281	1,1678

Для переходных процессов без ограничения на управляющее воздействие, но с параметрами, которые были найдены из условия ограничения управляющего воздействия, использована штриховая линия.

Рис. 9. Переходные процессы при  $\tau = 5$  с

Графики для остальных значений  $\tau$  имеют еще меньше визуальных отличий. Это характерно и для величины перерегулирования. Данный тест нивелировал большие отличия в поведении систем. Несколько лучше себя показал вариант NPID2 + P, а затем NPID + P, PID + NP.

Вариант PID + NP, который не проявил себя в предыдущем тесте, в этом продемонстрировал стабильность показателей качества регулирования.

**Заключение.** Результаты моделирования показали, что нелинейный ПИД-регулятор данного типа следует использовать осторожно с учетом свойств и условий работы объекта управления. Улучшение качества переходного процесса при

отработке сигнала задания наблюдается только при применении нелинейного ПИД-регулятора для внешнего контура. Использование статических нелинейных функций для внутреннего регулятора приводило к ухудшению показателей качества. Результаты применения нелинейного внешнего ПИД-регулятора с внутренним П-регулятором при качественной настройке дают измеримый результат с реализацией внешнего

классического ПИД-регулятора с внутренним ПД-регулятором. При построении каскадной системы регулирования для объектов с ограничением на управляющее воздействие, что характерно для технологических и многих технических систем, оптимальными являются другие решения. По результатам проведенных тестов вариант NPID2 + P продемонстрировал несколько лучшие показатели, чем остальные.

### Список литературы

1. Гринюк Д. А., Оробей И. О., Кузьмицкий И. Ф. Численное исследование алгоритмов уменьшения интегрального насыщения // Труды БГТУ. 2005. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 140–143.
2. Hryniuk D., Suhorukova I., Orobei I. Non-linear PID controller and methods of its setting // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream). Vilnius, 2017. P. 1–4. DOI: 10.1109/eStream.2017.7950327.
3. Сухорукова И. Г., Гринюк Д. А., Оробей И. О. Применение в ПИД-законе регулирования нелинейных функций преобразования ошибки // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 95–98.
4. Анализ эффективности ПИД-регуляторов с двумя степенями свободы с помощью интегральных критериев / Д. А. Гринюк [и др.] // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 2. С. 82–88.
5. Lisauskas S., Udris D., Uznyas D. Direct torque control of induction drive using fuzzy controller // Elektronika Ir Elektrotechnika. 2013. Vol. 19, no. 5. P. 13–16.
6. Complex tuning of the PID controller according to integral criteria / D. Hryniuk [et al.] // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream). Vilnius, 2018. P. 1–4. DOI: 10.1109/eStream.2018.8394117.
7. Гринюк Д. А., Оробей И. О., Сухорукова И. Г. Оптимизация каскадной системы регулирования для распределенных объектов на основе интегральных критериев // Труды БГТУ. 2007. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 97–100.
8. Armstrong B., Neevel D., Kusik T. New Results in NPID Control: Tracking, Integral Control, Friction Compensation and Experimental Results // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2001. Vol. 9, issue 2. P. 399–406. DOI: 10.1109/87.911392.
9. Atherton D. P., Benouartes M., Nanka-Bruce O. Design of nonlinear PID controllers for nonlinear plants // 12th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control. Sydney, Australia, 1993. Vol. 26, issue 2. Part 1. P. 125–128.
10. Zheng C., Su Y., Mercorelli P. A simple nonlinear PD control for faster and high-precision positioning of servomechanisms with actuator saturation // Mechanical Systems and Signal Processing. 2019. P. 215–226. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.017.
11. Huang H. Nonlinear PID controller and its applications in power plants // International Conference on Power System Technology Proceedings. IEEE. Kunming, China, 2002. Vol. 3. P. 1513–1517. DOI: 10.1109/ICPST.2002.1067784.
12. Wameedh A., Ibraheem K. I. From PID to nonlinear state error feedback controller // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2017. Vol. 8, no. 1. P. 312–322. DOI: 10.14569/IJACSA.2017.080140.

### References

1. Hryniuk D. A., Orobei I. O., Kuz'mitskiy I. F. Numerical study of algorithms for decreasing integral saturation. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2005, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 140–143 (In Russian).
2. Hryniuk D., Suhorukova I., Orobei I. Non-linear PID controller and methods of its setting. *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*. Vilnius, 2017, pp. 1–4. DOI: 10.1109/eStream.2017.7950327.
3. Suhorukova I. G., Hryniuk D. A., Orobei I. O. Application of non-linear error conversion functions in the PID law. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 95–98 (In Russian).

4. Hryniuk D. A., Suhorukova I. G., Oliferovich N. M., Orobei I. O. Analysis of the efficiency of PID controller with two-degree-of-freedom structure with integrated criteria. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 2, pp. 82–88 (In Russian).
5. Lisauskas S., Udris D., Uznys D. Direct torque control of induction drive using fuzzy controller. *Elektronika Ir Elektrotechnika*, 2013, vol. 19, no. 5, pp. 13–16.
6. Hryniuk D., Suhorukova I., Oliferovich N., Orobei I. Complex tuning of the PID controller according to integral criteria. *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*. Vilnius, 2018, pp. 1–4. DOI: 10.1109/eStream.2018.8394117.
7. Hryniuk D. A., Orobei I. O., Suhorukova I. G. Optimization of a cascade control system for distributed objects based on integral criteria. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2007, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 97–100 (In Russian).
8. Armstrong B., Neevel D., Kusik T. New Results in NPID Control: Tracking, Integral Control, Friction Compensation and Experimental Results. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001, vol. 9, issue 2, pp. 399–406. DOI: 10.1109/87.911392.
9. Atherton D. P., Benouartes M., Nanka-Bruce O. Design of nonlinear PID controllers for nonlinear plants. *12th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control*. Sydney, Australia, 1993, vol. 26, issue 2, part 1, pp. 125–128.
10. Zheng C., Su Y., Mercorelli P. A simple nonlinear PD control for faster and high-precision positioning of servomechanisms with actuator saturation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, pp. 215–226. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.017.
11. Huang H. Nonlinear PID controller and its applications in power plants. *International Conference on Power System Technology Proceedings. IEEE*. Kunming, China, 2002, vol. 3, pp. 1513–1517. DOI: 10.1109/ICPST.2002.1067784.
12. Wameedh A., Ibraheem K. I. From PID to nonlinear state error feedback controller. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2017, vol. 8, no. 1, pp. 312–322. DOI: 10.14569/IJACSA.2017.080140.

#### Информация об авторах

**Гринюк Дмитрий Анатольевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniuk@tut.by

**Сухорукова Ирина Геннадьевна** – старший преподаватель кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: irina\_x@rambler.ru

**Олиферович Надежда Михайловна** – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: oliferovich@belstu.by

**Оробей Игорь Олегович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: orobei@tut.by

#### Information about the authors

**Hryniuk Dzmitry Anatol'yevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniuk@tut.by

**Suhorukova Irina Gennad'yevna** – Senior Lecturer, the Department of Engineering Drawing. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina\_x@rambler.ru

**Oliferovich Nadezhda Mikhaylovna** – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oliferovich@belstu.by

**Orobei Igor' Olegovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: orobei@tut.by

*Поступила после доработки 15.04.2020*

УДК 681.53

Д. А. Гринюк, Н. М. Олиферович, И. Г. Сухорукова  
Белорусский государственный технологический университет

### ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СИНТЕЗА DEADBEAT-РЕГУЛЯТОРА НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ КОЛИЧЕСТВО ШАГОВ

В статье рассмотрены проблемы синтеза Deadbeat Controller with a Prescribed Controlled. Deadbeat Controller является отдельным классом алгоритмов управления в системах с обратной связью. Этот алгоритм может быть использован непосредственно для управления объектами, либо для синтеза ПИД-регуляторов.

Для обеспечения необходимой гибкости в задачах управления в условиях ограничений для реальных технологических процессов, при получении параметров ПИД-регулятора с различными показателями качества переходного процесса требуется адаптивная схема перенастройки в зависимости от свойств объекта управления.

Ранее были получены отдельные решения для возможности удлинения переходного процесса на 1, 2 и 3 шага. Однако если передаточная функция объекта имеет более высокий порядок, либо увеличение порядка обусловлено отличием структуры от последовательного соединения звеньев, данных решений может быть недостаточно. В последнем случае при получении общей передаточной функции с использованием  $z$ -преобразований происходит резкое увеличение порядка результата преобразований.

Получение расчетных формул синтеза осуществлено на основании подхода, который позволяет регулятору формировать одинаковое значение управляющего воздействия на заданном количестве шагов. При этом можно получить основные неравенства для синтеза путем определения аperiodического характера переходного процесса синтезируемого регулятора.

Адекватность полученных выражений была проверена путем построения переходных характеристик регулятора и замкнутых систем управления для объекта шестого порядка.

**Ключевые слова:** deadbeat-регулятор, настройка регулятора, переходный процесс.

D. A. Hryniuk, N. M. Oliferovich, I. G. Suhorukova  
Belarusian State Technological University

### GENERAL SOLUTION FOR SYNTHESIS OF DEADBEAT REGULATOR FOR ARBITRARY NUMBER OF STEPS

This article discusses the synthesis problems of Deadbeat Controller with a Prescribed Controlled. Deadbeat Controllers are a separate class of control algorithms in feedback systems. This algorithm can be used directly for controlling objects, or for the synthesis of PID controllers.

To provide the necessary flexibility in control tasks under restrictions for real technological processes, when receiving PID controller parameters with different transient quality indicators, an adaptive reconfiguration scheme is required depending on the properties of the control object.

Separate solutions have been previously obtained for the possibility of lengthening the transition process by 1, 2 and 3 steps. However, if the transfer function of the object has a higher order, or the increase in the order is due to distinguish the structure from the serial connection of the links, these solutions may not be enough. In the latter case, upon obtaining the general transfer function using  $z$ -transformation, a sharp increase in order of the result of the transformations occurs.

Obtaining calculation formulas for the synthesis has been carried out using an approach that allows the regulator to generate the same value of the control action for given number of steps. Moreover, it is possible to obtain the main inequalities for the synthesis by determining the aperiodic nature of the transition process of the synthesized controller.

The adequacy of obtained expressions has been verified by constructing the transient characteristics of the regulator and closed control systems for an object of the sixth order.

**Key words:** deadbeat regulator, regulator tuning, transition process.

**Введение.** Теория непрерывных систем управления постоянно развивается, но техническая реализация происходит на цифровых платформах. Использование напрямую цифровых подходов к синтезу систем управления позво-

ляет получить лучшее совпадение при практической реализации.

Deadbeat-регуляторы являются одним из направлений развития цифровых систем [1–3]. Алгоритмы deadbeat-контроллера широко

применяются в управлении двигателем [4–8], в модуляции балансировки напряжения [9]. В [1] было показано, что данные виды регуляторов очень хорошо приспособлены для использования в условиях ограничения на управляющее воздействие. В этой же работе, в дополнение к [2], были получены расчетные формулы для растягивания переходного процесса на два и три такта. Полученные результаты нашли свое применение в разработке нового метода синтеза настроек ПИД-регулятора [3]. Можно добиться соответствия контроллера технологическим нормам за счет увеличения времени шаговых ответов [10].

Предложенный метод синтеза ПИД-регулятора через deadbeat-регуляторы показал, что для возможности выбора разных показателей качества процесса потребуются наличие расчетных формул для максимального удлинения переходного процесса.

Следует отметить, что существуют и другие методы проектирования deadbeat-контроллера [11–13]. Однако в прикладных решениях находят большее применение подход из [1].

**Расчетные формулы.** Синтез deadbeat производится на основании функции  $z$ -преобразования элементов систем управления. Структура системы управления показана на рис. 1.

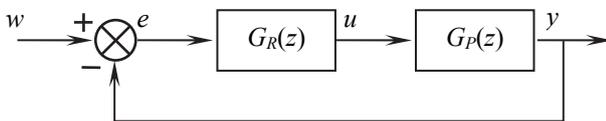


Рис. 1. Структура deadbeat-регулятора:  
 $w$  – сигнал задания;  $e$  – сигнал ошибки;  
 $u$  – управляющее воздействие;  
 $y$  – выход системы

Передаточная функция регулятора  $G_R(z)$  и объекта  $G_P(z)$  может быть записана следующим образом [1]:

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{1-P(z)}, \quad G_P(z) = \frac{A(z)}{B(z)}, \quad (1)$$

где  $Q(z)$ ,  $P(z)$  – многочлены передаточной функции регулятора;  $A(z)$ ,  $B(z)$  – многочлены передаточной функции объекта.

Коэффициенты многочленов  $Q(z)$ ,  $P(z)$  для классического deadbeat-регулятора могут быть найдены с использованием уравнений [2]:

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_m}, \\ q_i = q_0 a_i, \\ p_i = q_0 b_i, \end{cases} \quad (2)$$

где  $a_i$ ,  $b_i$  – коэффициенты многочленов функции  $z$ -передачи непрерывного объекта  $A(z)$ ,  $B(z)$  соответственно;  $m$  – порядок передаточной функции объекта.

Коэффициенты многочлена  $Q(z)$  можно выразить как:

$$\begin{cases} q_0 = u(0), \\ q_i = u(i) - u(i-1), \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3)$$

Итак, начальное значение управляемой переменной  $u(0)$  зависит только от суммы (2) коэффициентов функции  $z$ -передачи объекта  $b_i$ .

В [2] получены выражения для возможности выбора первичного импульса. Расширим его на большее количество тактов:

$$w(k) = 1 \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Для случая  $b_0 = 0$   $z$ -преобразования задающей, регулируемой и управляющей переменных имеют следующий вид:

$$w(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad (5)$$

$$y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + 1[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots], \quad (6)$$

$$u(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + u(m)[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots]. \quad (7)$$

Разделив уравнения (6) и (7) на (5), получим:

$$\frac{y(z)}{w(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m} = P(z), \quad (8)$$

$$\frac{u(z)}{w(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m} = Q(z). \quad (9)$$

Условие построения аperiodического регулятора независимо от количества заданных тактов не меняется:

$$\frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \frac{p_1 z^{-1} + \dots + p'_m z^{-(m+1)}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}}. \quad (10)$$

Условие для получения значений коэффициентов запишем в виде

$$\frac{P}{Q} = \frac{(p'_1 z^{-1} + \dots + p_m z^{-m})(\alpha_1 - z^{-1})(\alpha_2 - z^{-1})}{(q'_0 + \dots + q'_m z^{-m})(\alpha_1 - z^{-1})(\alpha_2 - z^{-1})} \times \frac{(\alpha_N - z^{-1})}{(\alpha_N - z^{-1})}. \quad (11)$$

Сокращение одинаковых множителей приводит к единому результату:

$$\frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \frac{p'_0 z^{-1} + \dots + p'_m z^{-m}}{q'_0 + \dots + q'_m z^{-m}}. \quad (12)$$

Сопоставление коэффициентов с одинаковыми степенями дает

$$\begin{aligned} q'_1 &= a_1 q'_0, & p'_1 &= b_1 q'_0, \\ q'_2 &= a_2 q'_0, & p'_2 &= b_2 q'_0, \\ &\dots & &\dots \\ q'_m &= a_m q'_0, & p'_m &= b_m q'_0. \end{aligned} \quad (13)$$

В общем случае система при удлинении переходного процесса на  $N$  может быть представлена как:

– для четного  $N$

$$\begin{aligned} q_0 &= A_1 q'_0, \\ q_1 &= A_1 q'_1 - A_2 q'_0, \\ q_2 &= A_1 q'_2 - A_2 q'_1 + A_3 q'_0, \\ &\dots \\ q_N &= A_1 q'_N - A_2 q'_{N-1} + \dots + A_N q'_1 - q'_0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} q_{m+N-2} &= -A_{N-1} q'_m + A_N q'_{m-1} - q'_{m-2}, \\ q_{m+N-1} &= A_N q'_m - q'_{m-1}, \\ q_{m+N} &= -q'_m; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= A_1 p'_1, \\ p_2 &= A_1 p'_2 - A_2 p'_1, \\ p_3 &= A_1 p'_3 - A_2 p'_2 + A_3 p'_1, \\ &\dots \\ p_N &= A_1 p'_N - A_2 p'_{N-1} + \dots + A_N p'_1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} p_m &= -A_{N-1} p'_m + A_N p'_{m-1} - p'_{m-2}, \\ p_{m+N-1} &= A_N p'_m - p'_{m-1}, \\ p_{m+N} &= -p'_m; \end{aligned}$$

– для нечетного  $N$

$$\begin{aligned} q_0 &= A_1 q'_0, \\ q_1 &= A_1 q'_1 - A_2 q'_0, \\ q_2 &= A_1 q'_2 - A_2 q'_1 + A_3 q'_0, \\ &\dots \\ q_N &= A_1 q'_N - A_2 q'_{N-1} + \dots - A_N q'_1 + q'_0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} q_{m+N-2} &= A_{N-1} q'_m - A_N q'_{m-1} + q'_{m-2}, \\ q_{m+N-1} &= -A_N q'_m + q'_{m-1}, \\ q_{m+N} &= q'_m; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= A_1 p'_1, \\ p_2 &= A_1 p'_2 - A_2 p'_1, \\ p_3 &= A_1 p'_3 - A_2 p'_2 + A_3 p'_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_N &= A_1 p'_N - A_2 p'_{N-1} + \dots - A_N p'_1, \\ &\dots \\ p_m &= A_{N-1} p'_m - A_N p'_{m-1} + p'_{m-2}, \\ p_{m+N-1} &= -A_N p'_m + p'_{m-1}, \\ p_{m+N} &= p'_m, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - z^{-1})(\alpha_2 - z^{-1}) \dots (\alpha_m - z^{-1}) &= \\ &= A_1 - A_2 z^{-1} + A_2 z^{-2} \dots \end{aligned}$$

Будем искать расчетные формулы исходя из равенства первых управляющих воздействий [7], тогда

$$\begin{aligned} \frac{q_0}{q'_0} &= A_1, \\ 0 &= A_1 q'_1 - A_2 q'_0, \\ 0 &= A_1 q'_2 - A_2 q'_1 + A_3 q'_0, \\ 0 &= A_1 q'_3 - A_2 q'_2 + A_3 q'_1 - A_4 q'_0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (18)$$

или с учетом (13)

$$\begin{aligned} \frac{q_0}{q'_0} &= A_1, \\ 0 &= A_1 a_1 q'_0 - A_2 q'_0, \\ 0 &= A_1 a_2 q'_0 - A_2 a_1 q'_0 + A_3 q'_0, \\ 0 &= A_1 a_3 q'_0 - A_2 a_2 q'_0 + A_3 a_1 q'_0 - A_4 q'_0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (19)$$

Суммированием уравнений (15) и (17) и с учетом

$$1 = p_1 + p_2 + \dots + p_{m+N}$$

можно получить:

1) для четного  $N$

$$1 = \sum_{i=1}^m b_i (A_1 q'_0 - A_2 q'_0 + \dots + A_{N-1} q'_0 - A_N q'_0 + q'_0); \quad (20)$$

2) для нечетного  $N$

$$1 = \sum_{i=1}^m b_i (A_1 q'_0 - A_2 q'_0 + \dots - A_{N-1} q'_0 + A_N q'_0 - q'_0). \quad (21)$$

После выражения  $A_1, A_2, \dots$  из (18) и (19) и подстановки в (20) и (21) соответственно можно получить:

– для четного  $N$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^m b_i} = q_0 D + q'_0; \quad (22)$$

– для нечетного  $N$ 

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^m b_i} = q_0 D - q'_0, \quad (23)$$

где

$$D = 1 - a_{N-1} - a_{N-2}(1-a_1) - a_{N-3}(1-a_2 - a_1(1-a_1)) - a_{N-4}(1-a_3 - a_2(1-a_1) - a_1(1-a_2 - a_1(1-a_1))) - \dots$$

Используя выражение из (18) и (19)

1) для четного  $N$ 

$$0 = A_1 q'_N - A_2 q'_{N-1} + \dots + A_N q'_1 - q'_0; \quad (24)$$

2) для нечетного  $N$ 

$$0 = A_1 q'_N - A_2 q'_{N-1} + \dots - A_N q'_1 + q'_0, \quad (25)$$

можно получить:

– для четного  $N$ 

$$1 = \frac{q_0}{q'_0} H; \quad (26)$$

– для нечетного  $N$ 

$$1 = -\frac{q_0}{q'_N} H, \quad (27)$$

где

$$H = (a_N - a_{N-1}a_1 - a_{N-2}(a_2 - a_1^2) - a_{N-3}(a_3 - a_2a_1 - a_1(a_2 - a_1^2)) - \dots).$$

Тогда величину управляющего воздействия на первом такте для соблюдения условия

$$u_{SP} = u(0) = u(1) = \dots = u(N) \quad (28)$$

можно рассчитать как

$$u_{SP} = q_0 = \frac{1}{(D-H) \sum_{i=1}^m b_i}. \quad (29)$$

С учетом того, что коэффициенты  $A_1, A_2, \dots$  можно получить из (18) при известном значении  $u_{SP}$ :

$$\begin{aligned} u_{SP} &= q'_0 A_1, \\ A_2 &= A_1 a_1, \\ A_3 &= -A_1 a_2 + A_1 a_1^2, \\ A_4 &= A_1 a_3 - A_1 a_1 a_2 - A_1 a_2 a_1 + A_1 a_1^3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (30)$$

или

$$\begin{aligned} u_{SP} &= q'_0 A_1, \\ q'_0 A_2 &= u_{SP} a_1, \\ q'_0 A_3 &= u_{SP} (-a_2 + a_1^2), \\ q'_0 A_4 &= u_{SP} (a_3 - 2a_1 a_2 + a_1^3), \\ &\dots \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} q_0 &= u_{SP}, \\ q_1 &= 0, \\ q_2 &= 0, \\ &\dots \\ q_N &= 0, \\ q_{N+1} &= q'_0 A_1 a_{N+1} - q'_0 A_2 a_{N+1} + \dots + a_1 q'_0, \\ &\dots \\ q_{m+N-2} &= q'_0 A_{N-1} a_m - q'_0 A_N a_{m-1} + a_{m-2} q'_0, \\ q_{m+N-1} &= -q'_0 A_N a_m + a_{m-1} q'_0, \\ q_{m+N} &= a_m q'_0; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= q'_0 A_1 b_1, \\ p_2 &= q'_0 A_1 b_2 - q'_0 A_2 b_1, \\ p_3 &= q'_0 A_1 b_3 - q'_0 A_2 b_2 + b_1 q'_0, \\ &\dots \\ p_N &= q'_0 A_1 b_N - q'_0 A_2 b_{N-1} + \dots - v A_N b_1 + q'_0, \\ &\dots \\ p_m &= q'_0 A_{N-1} b_m - q'_0 A_N b_{m-1} + b_{m-2} q'_0, \\ p_{m+N-1} &= -q'_0 A_N b_m + q'_{m-1}, \\ p_{m+N} &= b_m q'_0; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} q_0 &= u_{SP}, \\ q_1 &= 0, \\ q_2 &= 0, \\ &\dots \\ q_N &= 0, \\ q_{N+1} &= q'_0 A_1 a_{N+1} - q'_0 A_2 a_{N+1} + \dots - a_1 q'_0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} q_{m+N-2} &= -q'_0 A_{N-1} a_m + q'_0 A_N a_{m-1} - a_{m-2} q'_0, \\ q_{m+N-1} &= q'_0 A_N a_m - a_{m-1} q'_0, \\ q_{m+N} &= -a_m q'_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= q'_0 A_1 b_1, \\ p_2 &= q'_0 A_1 b_2 - q'_0 A_2 b_1, \\ p_3 &= q'_0 A_1 b_3 - q'_0 A_2 b_2 + b_1 q'_0, \\ &\dots \\ p_N &= q'_0 A_1 b_N - q'_0 A_2 b_{N-1} + \dots + q'_0 A_N b_1 - q'_0, \\ &\dots \\ p_m &= -q'_0 A_{N-1} b_m + q'_0 A_N b_{m-1} - b_{m-2} q'_0, \\ p_{m+N-1} &= q'_0 A_N b_m - b_{m-1} q'_0, \\ p_{m+N} &= -b_m q'_0. \end{aligned} \quad (35)$$

Для расчета коэффициентов deadbeat-регулятора используем системы уравнений (32), (33) или (34), (35). Величину  $u_{SP}$  получаем из (25), значения коэффициентов  $q_0'A_1, q_0'A_2, \dots$  определяем из (31) и, наконец,  $q_0'$  можно рассчитать или по (22)/(23), или по (26)/(27).

**Моделирование.** В качестве приложения методики расчета регуляторов выбран объект с передаточной функцией

$$W_o(s) = \frac{(-0,5s + 1)}{(10s + 1)(7s + 1)(3s + 1)^3} \exp(-2s). \quad (36)$$

Данного вида передаточные функции могут быть использованы при аппроксимации переходных процессов объектов с распределенными параметрами.

Максимальное управляющее воздействие  $u_{SP}$  при simple time  $t_s = 4$ , при одинаковых управляющих воздействиях первых тактов  $N = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$  убывает в следующей последовательности [23,6960 7,2037 3,6834 2,4141 1,8267 1,4646 1,2871]. Переходную характеристику регулятора можно видеть на рис. 2.

Результаты расчета (рис. 3) и моделирования замкнутой системы представлены на рис. 4–8.

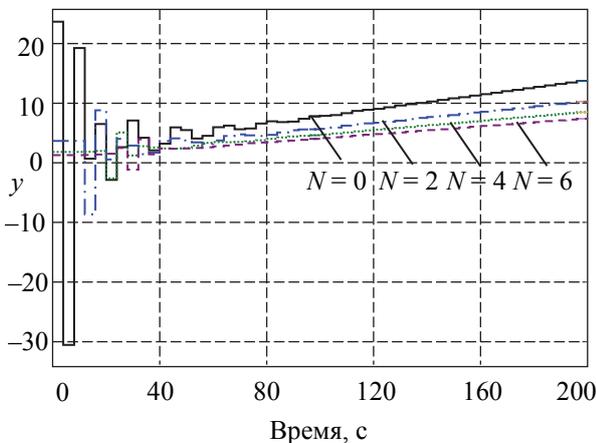


Рис. 2. Переходная характеристика deadbeat-регулятора для  $N = [0, 2, 4, 6]$

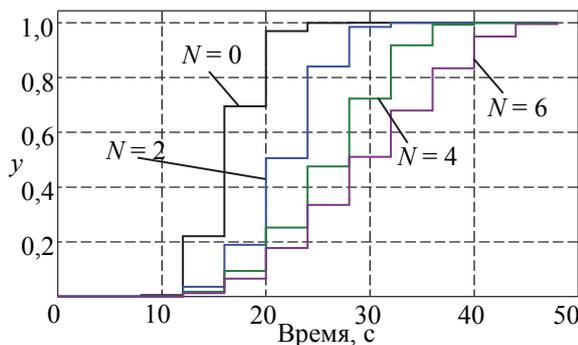


Рис. 3. Расчетный идеальный переходный процесс для  $N = [0, 2, 4, 6]$

Графики построены с использованием z-преобразований и соответствуют общей концепции deadbeat. Моделирование производилось в MATLAB с помощью SIMULINK. Для реализации deadbeat-регулятора использовался Discrete filter. Здесь при увеличении времени simple time до 8 кривые приобретают более апериодический характер (рис. 5).

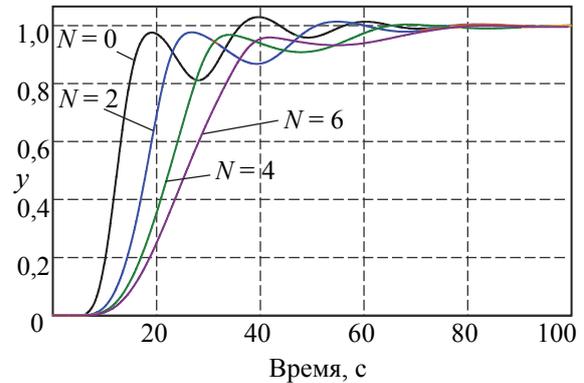


Рис. 4. Переходный процесс по сигналу задания. Результат моделирования в MATLAB для  $N = [0, 2, 4, 6]$  при  $t_s = 4$

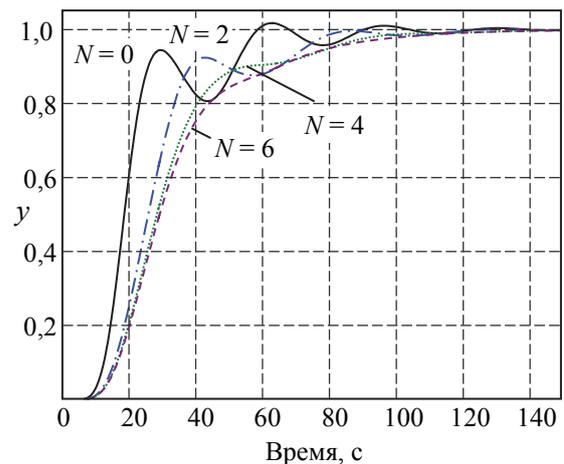


Рис. 5. Переходный процесс по отклонению. Результат моделирования в MATLAB для  $N = [0, 2, 4, 6]$  при  $t_s = 8$

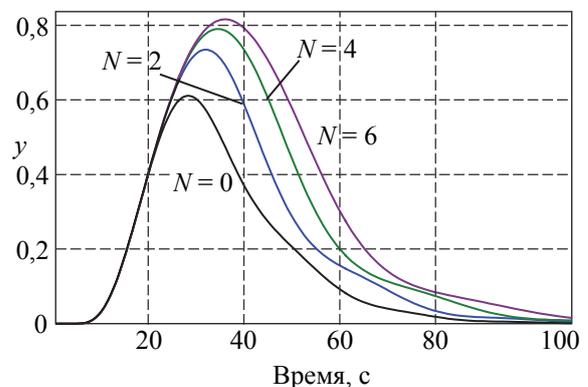


Рис. 6. Переходный процесс по возмущению. Результат моделирования в MATLAB для  $N = [0, 2, 4, 6]$

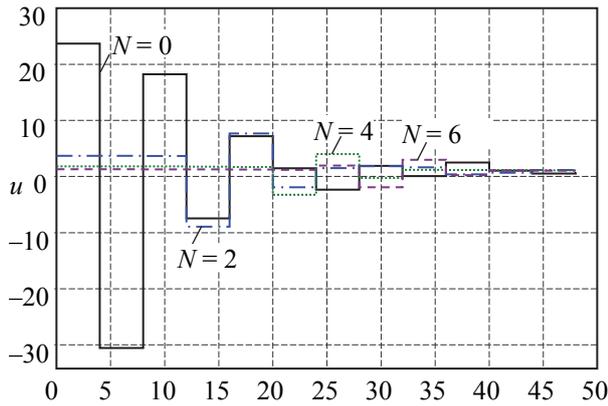


Рис. 7. Изменение сигнала управления при изменении сигнала задания. Результат моделирования в MATLAB для  $N = [0, 2, 4, 6]$

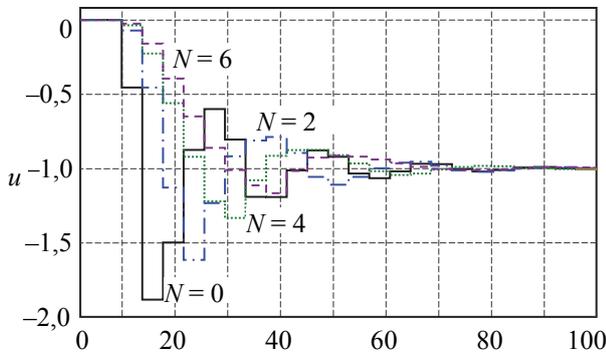


Рис. 8. Изменение сигнала управления при возмущении. Результат моделирования в MATLAB для  $N = [0, 2, 4, 6]$

Влияние времени дискретизации  $t_s$  и  $N$  на максимальное управляющее воздействие при переходном процессе можно видеть на рис. 9.

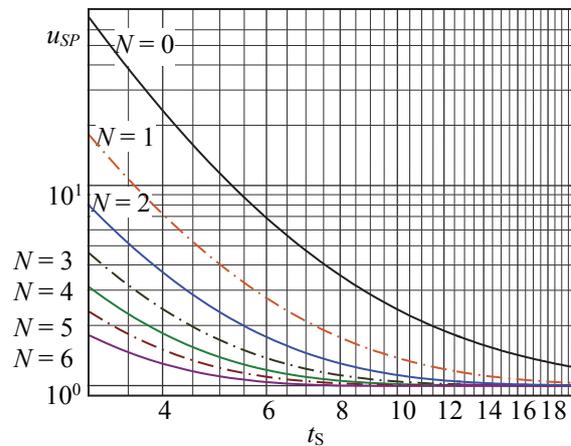


Рис. 9. Зависимость первого максимального управляющего воздействия  $u_{SP}$  от simple time  $t_s$

**Заключение.** В отличие от [1, 8], разработанная методика позволила получить формулы в общем виде, что облегчает применение deadbeat controllers для различных задач. Они могут быть легко алгоритмизированы для прикладных задач (например, при использовании deadbeat controller в условиях ограничения на управляющее воздействие; для настройки ПИД-регулятора).

Следует отметить, что, несмотря на ограничение управляющего воздействия на начальных этапах, могут проявляться большие отклонения в последующих тактах, что требует проведения оценки при синтезе регуляторов.

### Список литературы

1. Isermann R. Digital Control Systems. Berlin: Springer, 1989. 565 p.
2. Plsek S., Matusu R. Application of adaptive deadbeat controller in drying process // Procedia Engineering. 2015. Vol. 100. P. 756–764.
3. Awadallah M. A., Bayoumi E. H. E., Soliman H. M. Adaptive deadbeat controllers for brushless DC drives using PSO and ANFIS Techniques // Journal of Electrical Engineering. 2009. Vol. 60, no. 1. P. 3–11.
4. Deadbeat model-predictive torque control with discrete space-vector modulation for PMSM drives / Y. Wang [et al.] // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2017. Vol. 64, no. 5. P. 3537–3547.
5. Deadbeat-direct torque and flux control of interior permanent magnet synchronous machines with discrete time stator current and stator flux linkage observer / L. Jae Suk [et al.] // IEEE Transactions on Industry Applications. 2011. Vol. 47, no. 4. P. 1749–1758.
6. Deadbeat control for a single-phase cascaded H-bridge rectifier with voltage balancing modulation / Ch. Qi [et al.] // IET Power Electronics. 2018. Vol. 11, issue 3. P. 610–617.
7. Increasing the robustness of the digital controller / N. Oliferovich [et al.] // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream). Vilnius, 2018. P. 1–6. DOI: 10.1109/eStream.2018.8394120.
8. Hryniuk D., Oliferovich N., Suhorukova I. Approximation PID-controllers through deadbeat controller and its tuning // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream). Vilnius, 2019. P. 1–6. DOI: 10.1109/eStream.2019.8732172.
9. Kučera V. Deadbeat Control, Pole Placement, and LQ Regulation // Kybernetika. 1999. Vol. 35, no. 6. P. 681–692.
10. Westphal L. C. Handbook of Control Systems Engineering. New York: Springer, 2001. 1073 p.
11. Irfan A. Implementation of PID and deadbeat controllers with the TMS320 Family. Application report: SPRA083. Texas Instruments, 1997. 59 p.

12. Sami Fadali M., Visioli A. Digital control Engineering. Analysis and Design // Elsevier. 2013. P. 217–225.

13. Hryniuk D., Suhorukova I., Orobei I. Non-linear PID controller and methods of its setting // Open Conference Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream). Vilnius, 2017. P. 1–4.

### References

1. Isermann R. Digital Control Systems. Berlin, Springer, 1989. 565 p.
2. Plsek S., Matuso R. Application of adaptive deadbeat controller in drying process. *Procedia Engineering*, 2015, vol. 100, pp. 756–764.
3. Awadallah M. A., Bayoumi E. H. E., Soliman H. M. Adaptive deadbeat controllers for brushless DC drives using PSO and ANFIS Techniques. *Journal of Electrical Engineering*, 2009, vol. 60, no. 1, pp. 3–11.
4. Wang Y., Wang X., Xie W., Wang F., Dou M., Kennel R. M., Lorenz R. D., Gerling D. Deadbeat model-predictive torque control with discrete space-vector modulation for PMSM drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, vol. 64, no. 5, pp. 3537–3547.
5. Jae Suk L., Chan-Hee C., Jul-Ki S., Lorenz R. D. Deadbeat-direct torque and flux control of interior permanent magnet synchronous machines with discrete time stator current and stator flux linkage observer. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2011, vol. 47, no. 4, pp. 1749–1758.
6. Qi Ch., Chen X., Tu P., Wang P. Deadbeat control for a single-phase cascaded H-bridge rectifier with voltage balancing modulation. *IET Power Electronics*, 2018, vol. 11, issue 3, pp. 610–617.
7. Oлиферович N., Hryniuk D., Orobei I., Suhorukova I. Increasing the robustness of the digital controller. *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*. Vilnius, 2018, pp. 1–6. DOI: 10.1109/eStream.2018.8394120.
8. Hryniuk D., Oлиферович N., Suhorukova I. Approximation PID-controllers through deadbeat controller and its tuning. *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*. Vilnius, 2019, pp. 1–6. DOI: 10.1109/eStream.2019.8732172.
9. Kučera V. Deadbeat Control, Pole Placement, and LQ Regulation. *Kybernetika*, 1999, vol. 35, no. 6, pp. 681–692.
10. Westphal L. C. Handbook of Control Systems Engineering. New York, Springer, 2001. 1073 p.
11. Irfan A. Implementation of PID and deadbeat controllers with the TMS320 Family. Application report: SPRA083. Texas Instruments, 1997. 59 p.
12. Sami Fadali M., Visioli A. Digital control Engineering. Analysis and Design. *Elsevier*, 2013, pp. 217–225.
13. Hryniuk D., Suhorukova I., Orobei I. Non-linear PID controller and methods of its setting. *Open Conference Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*. Vilnius, 2017, pp. 1–4.

### Информация об авторах

**Гринюк Дмитрий Анатольевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniuk@tut.by

**Олиферович Надежда Михайловна** – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: oliferovich@belstu.by

**Сухорукова Ирина Геннадьевна** – старший преподаватель кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: irina\_x@rambler.ru

### Information about the authors

**Hryniuk Dzmityry Anatol'yevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniuk@tut.by

**Oliferovich Nadezhda Mikhaylovna** – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oliferovich@belstu.by

**Suhorukova Irina Gennad'yevna** – Senior Lecturer, the Department of Engineering Drawing. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina\_x@rambler.ru

Поступила после доработки 15.04.2020

# ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ

УДК 316.776

G. Jaber, N. V. Patsei

Belarusian State Technological University

## SEMANTIC INFORMATION CENTRIC NETWORK MODEL EVALUATION

The article describes the evaluation result of SICN (Semantic Information Centric Network) model scheme. First, it describes the abstract levels of contents. It divides data and request classification into four types based on the number of subscriptions and frequency of data object use. These scenarios of data flow are described for SICN model illustrating. Time Delay, Flooding or traffic and Efficiency reuse factor of data are used as parameters for evaluation. The paper represents a simple network example with quantitative results. In addition, a simulation model for IP, DONA, PURSUIT, CBCB, KBN, and SICN has been created to understand their performance with some assumptions. Four different scenarios have been applied. Each scenario represents a certain abstract content level knowing that the scenarios represent the data types and request types. The relevant results are shown and they proof the SICN good performance for searching information from different sources and downloading files.

**Key words:** scenario, information centric networks, semantic, model, performance, routers, subscriber, publisher, node, data type, time delay.

**Introduction.** The series of articles [1–5] introduced the architecture of Information Centric Network (ICN) named Semantic Information Centric Network (SICN). We detailed its naming, caching and routing designs [4, 5]. SICN naming scheme depends on three addresses: semantic address, geographic and publisher ID address. Furthermore, we designed the names in SICN header format.

SICN could solve the major problems in the current ICN field [5]:

- reduce brokers between information and end-users by compensating search engine;
- reduce redundancy, traffic and overflow of network;
- access semantically, which is better than using brokers as search engines;
- propose a one new scheme that could deal with all data connection types.

An important contribution of the SICN work is the classification of data into the four types based on the number of subscriptions and frequency of data object use [4, 5].

Type A: one subscription and one usage. A subscriber interested in the type A data will select specific unique publisher address from any semantic and any geographic location. Since the subscriber is interested in a specific publisher data source regardless of the content semantic, publisher monitors the mobility of the user in the network. This select query will use the Geo ID routing table [2].

Type B: one subscription and many usages. A subscriber interested in the type B data will select

specific semantic from a specific publisher, thus the Semantic ID routing table is suitable to match the subscriber interest to the published data and to locate the publisher.

Type C: many subscriptions and one usage. A subscriber interested in the type C data will select a specific semantic from any publisher where the Semantic ID routing table is suitable for such selection.

Type D: many subscriptions and many usages. A subscriber selects any semantic from any geographic location. The type D in the network is most important that ICN can deal with.

Besides, SICN also classifies subscribers' requests into types. Subscribers' requests may be of four types as shown in table 1.

Table 1

Subscribers' request types

Class	Description	Example
Rq1	Requesting <i>any data content</i> from <i>specific publisher</i>	Voice call
Rq2	Requesting <i>specific data content</i> from a <i>specific publisher</i>	Cloud storage
Rq3	Requesting <i>specific data content</i> from <i>any publisher</i>	Downloading a file
Rq4	Requesting information with <i>any data content</i> from <i>any publisher</i>	Searching information with Google search

To compare and analyze the work of the proposed SINC scheme, it is necessary to build a model of the semantic information network and compare its work with analogs naturally taking into account the type of information and requests.

**Theoretical base.** According to the classes and data types we can define four communication scenarios.

**Scenario 1 (type A).** The communication components are publisher and two subscribers who contact each other. Publisher has two addresses, for example **Pub ID:** *Viber*; **Geo ID:** *2B::01:2C*. The first subscriber is the calling node and the second one is the called node. Subscriber sends *IRM* (Interest Request Message) having the following 3D-address: **Pub ID:** *Viber*; **Geo ID:** *none*; **Semantic ID:** *none*.

*IRM* propagates (broadcasts) to the routers and searches in each Geo ID table till it reaches the publisher "*Viber*". Matching will occur between *IRM* and the **Pub ID**. *IRM* will be updated by the new IP at each router. The publisher router will send *ARM* (Address Reply Message) with the following 3D-address: **Pub ID:** *Viber*; **Geo ID:** *2B::01:2C*; **Semantic ID:** *none*. *ARM* will propagate on the same path as *IRM* but in an inverse direction until reaching the source of *IRM*. The Geo ID table of each router passed by *ARM* will be added by a new record. The calling subscriber router will send *CRM* (Content Reply Message) to the called subscriber router passing through the publisher router. *CRM* will have the following 3D-address: **Pub ID:** *Viber*; **Private ID:** *+375 171234567*; **Geo ID:** *2B::01:2C*; **Semantic ID:** *none*.

**Scenario 2 (type B).** Suppose there is a subscriber phone/computer that needs certain information access in the cloud. The publisher router will send *IRM* to find the information with the following 3D-address: **Pub ID:** *drive.google*; **Geo ID:** *none*; **Semantic ID:** *none*. *IRM* will propagate until it reaches the publisher. The publisher router will send *ARM* with the addresses: **Pub ID:**

*drive.google*; **Geo ID:** *2B::02:2C*; **Semantic ID:** *none*. The publisher router will send *CRM* for the subscriber with the requested file.

**Scenario 3 (type C).** Let's take a case of a video stream where Facebook is a publisher and a certain phone is a subscriber. The subscriber will send *IRM* with these addresses: **Pub ID:** *Facebook/channel/video1*; **Geo ID:** *32::2C:1A*; **Semantic ID:** *none*. *IRM* will reach publisher router where the latest will send *ARM*. When the publisher router sends *ARM* in all scenarios, Time To Live (*TTL*) in router tables will be increased and tables will be updated. If *TTL* reaches threshold, then the addresses will be sent to cache.

**Scenario 4 (type D).** Let's take a case of a certain subscriber who needs to search the following information in the network: "*diameter of the moon*", as an example on the type D scenario and suppose that only two publishers have this information. The subscriber will send *IRM* having the following 3D-address: **Pub ID:** *none*; **Geo ID:** *none*; **Semantic ID:** *atb (moon, diameter)*. *IRM* propagates to reach publishers where matching will occur. Each publisher router will send back *ARM* in an inverse direction of *IRM*. Each router will be learnt by the three addresses. *ARM* will reach the subscriber. Subscriber will send the second *IRM2* having addresses: **Pub ID:** *Libgen*; **Geo ID:** *2B::01:2C*; **Semantic ID:** *atb (moon, diameter)*. *IRM2* will reach the needed publisher with a previously known path since the first *IRM* saved all routers IPs needed along the path. The publisher will send *CRM* having the data and the 3D-address.

**Comparative analysis.** The results of SINC compare with DONA (Data-Oriented Network Architecture), PURSUIT (Publish-Subscribe Internet Technology), CBCB (Combined Broadcast and Content-Based), KBN (Knowledge-Based Networking) schemas according to many criteria including the routing approach, naming structure, caching, and backward comparability shown in table 2.

Table 2

ICN project analysis

ICN	Routing approach	Naming structure	Routing	Caching	Abstract level	Backward compatibility
DONA	Name resolution	Flat naming self-certifying	Pull	On-path; off path caching	Data	Yes, work over IP
CBCB	Name based routing	Set of paired attribute value; don't ensure uniqueness	Pull-push	On-path; off path caching	Information	No
PURSUIT	Name resolution	Flat naming	Pull	On-path; off path caching	Data	No
KBN	Name based routing	Set of keywords; ontological categorization	Pull-push	On-path; off path caching	Knowledge	No
SICN	Name based routing	Human friendly; hierarchal (Geo address associated with IP)	Pull	On path caching	Knowledge	Yes, work over IP

Three different metrics over this ICN schemas have been computed: *Time Delay (TD)* – minimum numbers of hops; *Flooding or traffic (F)* – total number of links occupied starting from the data requested to the data received; *Efficiency reuse factor of data (ER)* – ratio of the interest numbers of a certain data to the data travel distance.

In order to compare different schemas (table 2), we have built six simulation models in Python programming language composed of: not fully connected routers ( $R_i$ ); three network subscribers ( $NS_i$ ); network publisher ( $NP_1$ ).

The main content source is connected with private cache ( $PC$ ). Resolution server ( $DNS$ ) is needed for some of the schemas to find data source IP. A search engine is needed for some of the ICN schemes to translate the data from an informal form to a formal one.

Let's consider as a work model example the content transmission in *Scenario 1* with no caching data. It is the type A data request where subscribers ask for any data but from a specific publisher (voice call). In SICN scheme, the message will be passed as follows from the subscriber  $NS_1$  to the publisher as follows:

$$NS_1 \rightarrow R_6 \rightarrow R_4 \rightarrow R_1 \rightarrow NP_1.$$

Then back from the publisher to the subscriber as follows:

$$NP_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_4 \rightarrow R_6 \rightarrow NS_1.$$

The message transmitted from the subscriber  $NS_2$  as follows:

$$NS_2 \rightarrow R_7 \rightarrow R_4 \rightarrow R_1 \rightarrow NP_1.$$

Then back:

$$NP_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_4 \rightarrow R_7 \rightarrow NS_2.$$

The message transmitted from the subscriber  $NS_3$  as follows:

$$NS_3 \rightarrow R_8 \rightarrow R_4 \rightarrow R_1 \rightarrow NP_1,$$

then

$$NP_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_4 \rightarrow R_8 \rightarrow NS_3.$$

$TD$  that represents the number of links from the subscriber to the publisher then from the publisher to the subscriber have 8 links (fig. 1).

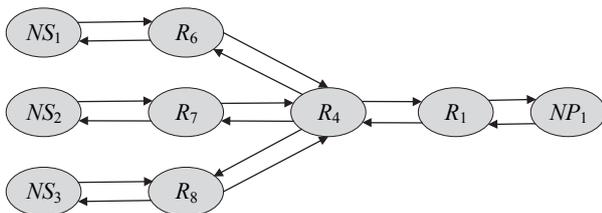


Fig. 1. SICN message flow in *Scenario 1*

$F$  is the total links occupied from requesting data by the subscriber to receiving it. In SICN model it is the number of subscribers multiplied by  $TD$ . In our scenario,  $F = 3 \cdot TD = 24$ . The  $ER$  factor represents the number of reusing data compared to data travel distance.  $ER$  in SICN is  $\frac{1}{4}$  for each subscriber, thus totaling  $ER = \frac{3}{4}$ .

The content transmitted in *Scenario 2* is the type B cached data. Subscribers ask for specific data from specific publisher. We suppose that in this model users send enough requests for the file to reach the threshold and cache in  $R_4$ , and  $R_5$ . Each subscriber sends his request by an *IRM* carrying Pub ID the semantic addresses and also the Geo ID address as it is supposed that all tables are converged. It means that the request has been made before.

The data sources are cached and they send *CRM* to the subscribers, thus the message flow in SICN will be as follows (fig. 2). From the subscriber 1 to data source in  $R_5$ :

$$NS_1 \rightarrow R_6 \rightarrow R_5,$$

then, from data source  $R_5$  to the subscriber 1:

$$R_5 \rightarrow R_6 \rightarrow NS_1.$$

From the subscriber 2 to data source  $R_4$ :

$$NS_2 \rightarrow R_7 \rightarrow R_4,$$

then

$$R_4 \rightarrow R_7 \rightarrow NS_2.$$

From the subscriber 3 to data source  $R_4$ :

$$NS_3 \rightarrow R_8 \rightarrow R_4,$$

then

$$R_4 \rightarrow R_8 \rightarrow NS_3.$$

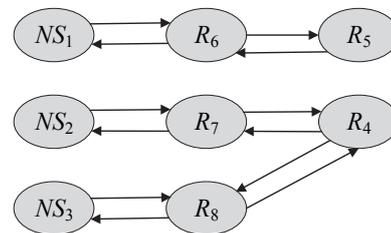


Fig. 2. SICN message flow in *Scenario 2*

The content transmitted in *Scenario 3* is information. It is the type C transmission where subscribers ask for specific information but from any publisher. The content transmitted in *Scenario 4* is knowledge.

Table 3 shows the values of three metrics in each ICN schemes and each scenarios.

For further modeling let's do the following assumptions:

Table 3

ICN projects evaluations

ICN projects	Scenario 1			Scenario 2			Scenario 3			Scenario 4		
	TD	F	ER	TD	F	ER	TD	F	ER	TD	F	ER
IP	16	48	75	16	48	0.3	32	96	25	32	96	25
SICN	8	24	75	4	12	100	4	12	100	4	12	100
DONA	16	48	75	12	36	100	24	72	100	24	72	100
PURSUIT	16	48	75	12	36	100	24	72	100	24	72	100
CBCB	8	47	75	4	16	90	4	16	90	12	36	90
KBN	8	47	75	4	16	90	4	16	90	4	16	90

$u$ : number of users ( $u = 10$ );  
 $n$ : publisher depth (defined as number of extended branches from a subscriber to data source;  $n$  is variable);  
 $e$ : search engine depth (defined as number of branches from a subscriber to search engine; lets  $e = n$ );  
 $d$ : DNS depth (defined as number of branches from a subscriber to DNS; lets  $d = n / 2$ );  
 $c$ : cache depth (number of branches from a subscriber to cache, we supposed that  $c = n / 2$ );  
 $s$ : sharing coefficient (defined as the ratio of shared links by subscribers to total links, lets  $s = 0.25$ );  
 $r$ : sharing factor (defined as the utilization factor from sharing paths between subscribers,  $r = 1 + s(u - 1)$ );  
 $L$ : total number of extended branches for each subscriber to data source,  $L = 2^{(n+1)} - 2$ , it is supposed that each node has two branches.

We have modeled the work of six schemes in *Scenario 1*. Fig. 3 illustrates time delay ( $TD$ ) versus the number of links to the data source in six schemes. As shown in the fig. 3, in case when the content schemas use name resolution routing (SICN, CBCB and KBN) outperforms schemas using name-based routing (IP, DONA, PURSUIT). This is obviously shown as  $TD$  for the first group is less than  $TD$  for the second group. The results are justified as schema needs DNS in the second group whilst the first group has connection to the publisher.

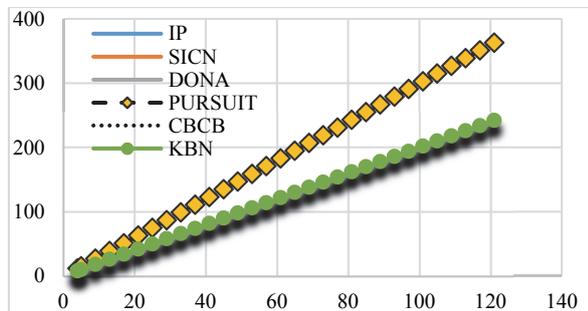


Fig. 3. Time delay versus number of links to the data source

Fig. 4 illustrates that SICN obtains much better performance of SICN compared to other schemas in terms of flooding parameter. This is clarified by a lower  $F$  for SICN.

The name resolution routing schema (CBCB and KBN) shows high values of  $F$  (i. e. a lot of flooding) leading to high traffic as they need NRS and make extraction for a tree to find the publisher. This extraction occupies a big part of a tree in case of voice call. The named based routing schema (IP, DONA, and PURSUIT) does a lot of flooding as well. Therefore, SICN might be suited to reduce network traffic in case of *Scenario 1*.

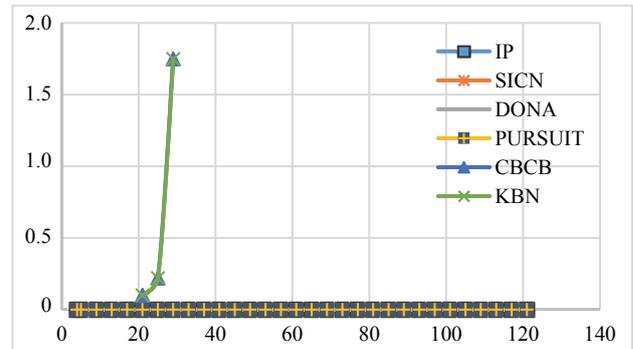


Fig. 4. Flooding versus number of links in the data source

Reuse efficiency fig. 5 shows the data, where all the schemas have the same performance in *Scenario 1*.

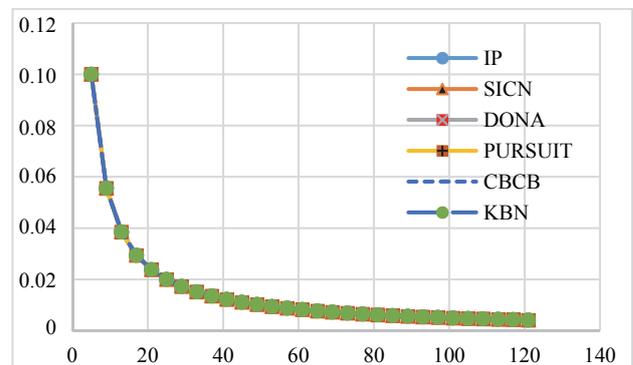


Fig. 5. Efficiency of data versus number of links to the data source

**Conclusion.** However, none of ICN proposal solutions fit perfectly to all types of requests [6]. For example, Combined Broadcast and Content-Based (CBCB) project can route requests to the

content to solve *Rq4* requests, but it consumes a lot of processing at the node to serve *Rq1* and *Rq2* requests.

A main difference between considered in current modeling six different schemes is the method or level each of them deals with the different levels of content concerning their abstract form. Thus, we start up from differentiating between three levels of contents: data, information and knowledge. Thus, empirical results were tested over four scenarios: *Scenario 1* (S1), where the content transmitted is from non-cached data level; *Scenario 2* (S2), where the content transmitted is from cached data level; *Scenario 3* (S3), where the content transmitted is from information level;

*Scenario 4* (S4), where the content transmitted is from knowledge level.

According to modeling results SICN, CBCB and KBN outperform IP, DONA and PURSUIT in *Scenario 1* and *2* in terms of *TD*. In terms of *F*, SICN shows the lowest flooding in *Scenario 1* and *2* equals 4 and 12 respectively.

IP shows the highest *F* as it cannot benefit from caching. SICN, DONA and PURSUIT have the highest efficiency in data shown by their efficiency reuse factor ( $ER = 100$ ) for *Rq2*, *Rq3* and *Rq4*. The low *ER* factor in IP is justified as there is no cached data used.

SICN benefits from the absence of DNS and search engine in minimizing the *TD* and *F*.

### References

1. Jaber G., Patsei N. V. Information Centric Networking for web-based content distribution and manipulation. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 88–91.
2. Patsei N., Jaber G. Routing Schema for Information-Centric Networking. *11th International Conference NEET*. Lublin, 2019, p. 29.
3. Jaber G., Patsei N., Rahal F. Different Naming in Information-Centric Networks (ICN). *Scholars Journal of Engineering and Technology*, 2019, no. 7(8), pp. 235–237.
4. Patsei N. V., Jaber G. Semantic base addressing strategies for Information-Centric Networking. *Problems of Information Technology: materials of the III All-Ukrainian Science-and-Technology Conference*. Poltava, 2019, p. 103.
5. Jaber G., Patsei N. V., Rahal F. Semantic information-centric networking naming schema. *Trudy BSTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2020, no. 1, pp. 69–73.
6. Vasilakos A. V., Li Z., Simon G., You W. Information centric network: Research challenges and opportunities. *J. Netw. Comput. Appl.*, 2015, vol. 52, pp. 1–10.

### Information about the authors

**Jaber Ghassan** – PhD student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ghassanjaber@hotmail.com

**Patsei Nataliya Vladimirovna** – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: n.patsei@belstu.by

*Received after revision 05.05.2020*

# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

---

УДК 537.633.2

**В. Р. Мадьяров**

Белорусский государственный технологический университет

## **ПРИМЕНЕНИЕ ЭФФЕКТА МАГНИТОПЛАЗМЕННОГО ОТРАЖЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПОВЕРХНОСТНОЙ РЕКОМБИНАЦИИ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ**

В данной работе предлагается оценивать скорость поверхностной рекомбинации в *n*-Si в стационарном режиме по измеренным значениям интенсивности фотовозбуждающего источника и концентрации избыточных носителей заряда в приповерхностной области полупроводникового слоя. Для фотовозбуждения кремниевой пластины *n*-Si толщиной 0,5 мм применялось излучение лазерного диода. Концентрация носителей в приповерхностной облучаемой области полупроводниковой пластины определялась по резонансной частоте магнитоплазменного поглощения зондирующего излучения миллиметрового диапазона, при которой наблюдается минимальное пропускание. Показано, что данная частота включает в себя плазменную и циклотронную составляющие. Резонанс достигался путем изменения индукции поперечного магнитного поля в области образца на фиксированной частоте зондирования. Значение скорости поверхностной рекомбинации, рассчитанное с использованием резонансных значений частоты и магнитной индукции, составляет 25 м/с, что находится в удовлетворительном соответствии с известными данными. Предлагаемая методика не требует данных о коэффициенте диффузии и объемном времени жизни носителей и может быть полезной для определения скорости поверхностной рекомбинации с использованием излучений миллиметрового диапазона.

**Ключевые слова:** волны миллиметрового диапазона, магнитоплазменное отражение, концентрация носителей, поверхностная рекомбинация.

**V. R. Mad'yarov**

Belarusian State Technological University

## **MEASUREMENT OF SURFACE RECOMBINATION VELOCITY IN SEMICONDUCTORS USING MAGNETOPLASMA REFLECTION EFFECT**

In this paper the method is proposed to estimate surface recombination velocity in *n*-Si in terms of the measured values of the intensity of the photoexciting light and the charge carrier concentration in the near-surface region of the semiconductor wafer. Laser diode radiation is used to excite an 0.5 mm *n*-Si silicon wafer. The carrier concentration in the near-surface irradiated region of the semiconductor wafer is determined by the magnetoplasma absorption resonant frequency of the millimeter-range probing radiation, at which the minimum transmission is observed. It is shown that this frequency includes magnetoplasma and cyclotron components. The resonance was achieved by changing the induction of the transverse magnetic field in the sample region at a fixed probing frequency. The value of the calculated surface recombination velocity, based on resonant frequency and magnetic induction values, was found to be 25 m/s, which is in satisfactory agreement with the known data. The proposed method does not require the use of data on the diffusion coefficient and volume carrier lifetime and can be useful to determine surface recombination velocity using millimeter-range radiation.

**Key words:** millimeter waves, magnetoplasma reflection, carrier concentration, surface recombination velocity.

**Введение.** Определение интенсивности процессов рекомбинации на поверхности полупроводника является одной из основных задач при создании электронных приборов на основе

микро- и наноструктур. Для изучения поверхностной рекомбинации обычно применяется импульсная ионизация полупроводника монохроматическим излучением с последующей

регистрацией отраженной от этой поверхности СВЧ-волны. Разделение объемного и поверхностного процессов рекомбинации обеспечивается на основе значительного различия их скоростей [1, 2]. Разработан также бесконтактный, неразрушающий метод измерений рекомбинационных параметров в пластинах Si на основе анализа кинетики релаксации избыточного теплового излучения пластины по кинетике избыточного теплового излучения за краем собственного поглощения Si [3].

Для интерпретации результатов измерений требуется использование дополнительных данных о коэффициентах переноса носителей и динамике рекомбинации. В данной работе предлагается оценить скорость поверхностной рекомбинации  $S$  в стационарном режиме по измеренным значениям интенсивности фотовозбуждающего источника и концентрации неравновесных носителей.

**Основная часть.** Если известна избыточная концентрация  $n_s$  носителей заряда в приповерхностной области образца, то скорость поверхностной рекомбинации  $S$  можно рассчитать по формуле

$$S = \frac{q_s}{n_s} = \frac{I_s(1-R)}{hv\Delta n_s}, \quad (1)$$

где  $q_s$  – поверхностная плотность избыточных носителей заряда, образующихся за 1 с в результате фотовозбуждения,  $\text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $I_s$  – интенсивность источника;  $R$  – коэффициент отражения фотовозбуждающего излучения от образца;  $v$  – его частота.

При облучении образца излучением от внешнего источника возрастают проводимость и диэлектрическая проницаемость в приповерхностной области образца, которые зависят от концентрации носителей. В результате изменяются коэффициенты отражения и, соответственно, пропускания зондирующего излучения. Для определения приповерхностной концентрации  $n_s$  использовалась зависимость коэффициента пропускания от частоты. На частоте зондирования, равной плазменной  $\omega_p$ , пропускание достигает минимума. При концентрациях неравновесных носителей  $\sim 10^{19} - 10^{21} \text{ м}^{-3}$  плазменная частота находится в диапазоне зондирования 10–100 ГГц. Концентрацию носителей заряда в приповерхностной области образца можно определить по частоте, соответствующей минимальному пропусканию зондирующего СВЧ-излучения. Однако плавное изменение частоты зондирования в широком диапазоне для достижения плазменного резонанса является технически сложной задачей. Применение вспомогательного магнитного поля, в которое помещается образец, приводит к магнитоплазменному резонансу, который может

достигаться при изменении магнитной индукции и, следовательно, циклотронной частоты  $\omega_c$ .

Для измерений была выбрана конфигурация с постоянным магнитным полем, направленным поперек направления распространения зондирующей волны. При использовании такой геометрии в области образца может создаваться гораздо более сильное магнитное поле, чем при параллельном направлении поля и волны.

Рассмотрим синусоидальную волну с частотой  $\omega$ , которая распространяется вдоль оси  $z$  в прозрачной проводящей среде. Магнитное поле направлено перпендикулярно этой оси. Тогда уравнения для проекций напряженности электрического поля зондирующей волны  $E_x$  и  $E_y$  примут вид [4]:

$$\begin{cases} \left(k^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_x + i\mu_0\omega(\sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y) = 0, \\ \left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\omega\sigma_{xx}\right) E_y + i\mu_0\omega\sigma_{xy}E_x = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $k$  – модуль волнового вектора;  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость полупроводника;  $c$  – скорость электромагнитной волны в вакууме;  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\sigma_{xx}$  – проводимость, обусловленная дрейфом носителей под действием электрического поля зондирующей волны;  $\sigma_{xy}$  – холловская проводимость полупроводникового образца, вызванная взаимодействием тока проводимости с постоянным магнитным полем с индукцией  $B$ .

Выражения для компонент  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{xy}$  в приближении сферических энергетических поверхностей имеют вид [5]:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_0 \tau^{-1} \frac{\tau^{-1} + i\omega}{(\tau^{-1} + i\omega)^2 + \omega_c^2}, \\ \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \sigma_0 \tau^{-1} \frac{\omega_c}{(\tau^{-1} + i\omega)^2 + \omega_c^2}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\sigma_0$  – удельная электропроводность в постоянном электрическом поле;  $\tau$  – время релаксации импульса;  $\omega_c = eB / m^*$  – циклотронная частота;  $m^*$  – эффективная масса носителей заряда. В данном приближении с использованием уравнений (2) и (3) в [4] получено выражение для диэлектрической проницаемости полупроводника через характерные частоты:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = 1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2}\right), \quad (4)$$

где  $\varepsilon_c$  – диэлектрическая проницаемость в постоянном поле;  $\omega_p = (n_s e^2 / \varepsilon_0 \varepsilon_c m^*)^{1/2}$  – плазменная частота.

Из (4) следует, что на частоте

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}, \quad (5)$$

знаменатель второго слагаемого в скобках равен нулю и, следовательно,  $\varepsilon = \infty$ . Таким образом, частота  $\omega_0$  соответствует полному отражению. На зависимости пропускания от частоты или от магнитной индукции будет наблюдаться минимум.

Из уравнения (5) следует формула для определения концентрации в приповерхностной (облучаемой) области образца:

$$\omega_0^2 = \omega_c^2 + \frac{n_s e^2}{\varepsilon \varepsilon_0 m^*}, \quad (6)$$

где  $\omega_c = eB_0 / m^*$  – циклотронная частота;  $B_0$  – индукция магнитного поля, при которой наблюдается минимальное пропускание.

Схема установки представлена на рис. 1.

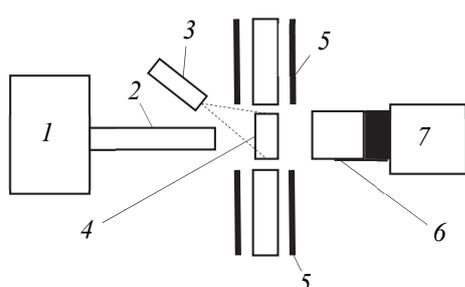


Рис. 1. Экспериментальная установка:  
1 – СВЧ-генератор (Г4-142); 2 – волновод;  
3 – лазерный диод; 4 – образец;  
5 – обмотки и сердечник электромагнита;  
6 – полупроводниковая термопара;  
7 – микровольтметр

Образец в виде квадратной пластинки  $n$ -Si со стороной 8 мм помещался в зазор электромагнита. Толщина пластинки составляла 0,5 мм. Для фотовозбуждения пластины применялось излучение лазерного диода с длиной волны 0,96 мкм (мощность  $\sim 4$  мВт).

Магнитное поле в области образца, направленное перпендикулярно возбуждающему и зондирующему излучениям, создавалось электромагнитом, обмотка которого питалась от регулируемого источника постоянного тока. Индукция магнитного поля могла изменяться до 0,9 Тл.

Для зондирования использовалось излучение от генератора Г4-142. Сигнал, пропорциональный мощности прошедшего через образец зондирующего излучения, регистрировался полупроводниковой термопарой, подключенной к микровольтметру Ф136 с предельной чувствительностью 100 нВ/дел.

Измерения сигнала проводились в диапазоне частот 65–75 ГГц. На каждой из зондирующих частот индукция магнитного поля в области образца изменялась в пределах от 0,4 до 0,9 Тл. Магнитоплазменный резонанс достигался путем изменения магнитной индукции с шагом 0,05 Тл на фиксированной частоте генератора.

На рис. 2 представлена характерная зависимость коэффициента пропускания зондирующего излучения от магнитной индукции на частоте 67 ГГц. Минимальное значение пропускания зондирующего излучения для данного образца наблюдается в области частот 65–69 ГГц (рабочий диапазон частот генератора равен 54–79 ГГц).

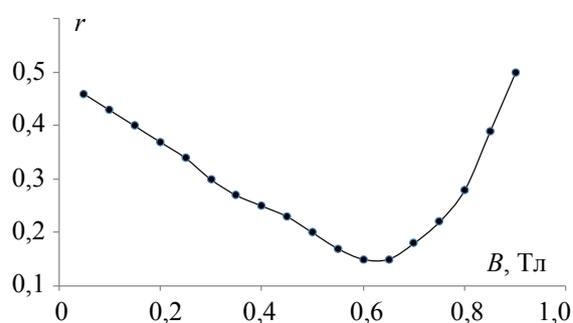


Рис. 2. Типичная зависимость коэффициента пропускания полупроводниковой пластины от магнитной индукции на частоте зондирующего излучения 67 ГГц

На рис. 3 показана зависимость квадрата частоты  $\omega_0^2$  от  $B_0^2$ . Наблюдается линейная зависимость, что соответствует расчетной зависимости (6). Экстраполяция этой зависимости на значение  $B_0 = 0$  дает значение частоты  $\omega_0 = 65,4$  ГГц. С использованием этих данных и значения эффективной массы для Si  $1,08m_0$  получено значение концентрации носителей в образце, равное  $7 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ .

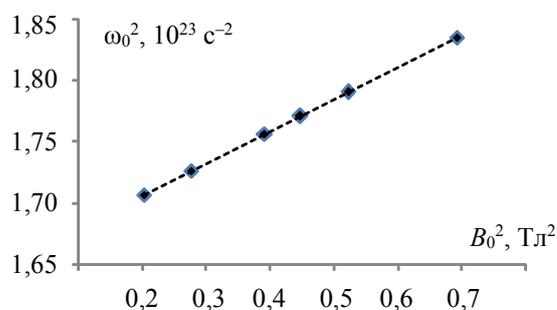


Рис. 3. Зависимость квадрата частоты  $\omega_0$ , соответствующей минимальному пропусканию зондирующего излучения, от квадрата магнитной индукции

Оценка концентрации носителей заряда облучаемой области с учетом коэффициента поглощения кремния  $10^2 \text{ м}^{-1}$  на длине волны фотовозбуждающего излучения (0,96 мкм) дает значение, которое может отличаться от полученного из рассмотренных выше частотных измерений примерно на 2%. Значение скорости поверхностной рекомбинации  $S$ , рассчитанное по формуле (1) при  $I_s = 40 \text{ Вт/м}^2$ , составляет 25 м/с. При расчетах полагалось, что излучение

фотовозбуждающего лазерного диода в плоскости образца образует конус с площадью основания около  $1 \text{ см}^2$ .

Предлагаемая методика не требует использования данных о коэффициенте диффузии и времени жизни носителей в объеме полупроводника и может быть полезной для определения скорости поверхностной рекомбинации с использованием излучений миллиметрового диапазона.

#### Список литературы

1. Palais O., Arcari A. Contactless measurement of bulk lifetime and surface recombination velocity in silicon wafers // *J. Appl. Phys.* 2003. Vol. 93, no. 8. P. 4686–4690.
2. Separation of the bulk lifetime and surface recombination velocities in semiconductor wafer by a single microwave photoconductance / F. X. Chen [et al.] // *Semicond. Sci. and Technology*. 2004. Vol. 19, no. 9. P. 959–963.
3. Богатыренко В. В., Зиновчук А. В. Измерение скорости поверхностной рекомбинации и объемного времени жизни в пластинах Si по кинетике избыточного теплового излучения // *Физика и техника полупроводников*. 2015. Т. 45, вып. 1. С. 62–66.
4. Зеегер К. *Физика полупроводников*. М.: Мир, 1977. 615 с.
5. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. М.: Наука, 1975. 400 с.

#### References

1. Palais O., Arcari A. Contactless measurement of bulk lifetime and surface recombination velocity in silicon wafers. *J. Appl. Phys.*, 2003, vol. 93, no. 8, pp. 4686–4690.
2. Chen F. X., Qui R. Q., Xu L., Meng F. U., Zao Z. X., Zhou Z. B. Separation of the bulk lifetime and surface recombination velocities in semiconductor wafer by a single microwave photoconductance. *Semicond. Sci. and Technology*, 2004, vol. 19, no. 9, pp. 959–963.
3. Bogatyrenko V. V., Zinovchuk A. V. Measurements of surface recombination velocity and volumetric lifetime in Si wafers by kinetics of excess thermal radiation. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductor physics and engineering], 2015, vol. 45, issue 1, pp. 62–66 (In Russian).
4. Zeeger K. *Fizika poluprovodnikov* [Physics of semiconductors]. Moscow, Mir Publ., 1977. 615 p.
5. Bass F. G., Gurevich Yu. G. *Goryachiye elektrony i sil'nyye elektromagnitnyye volny v plazme poluprovodnikov i gazovogo razryada* [Hot electrons and strong electromagnetic waves in plasma of semiconductors and gas discharge]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 400 p.

#### Информация об авторе

**Мадьяров Владимир Рафкатович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: madyarov@belstu.by

#### Information about the author

**Mad'yarov Vladimir Rafkatovich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: madyarov@belstu.by

Поступила после доработки 07.04.2020

УДК 539.1.06:539.23.234

**В. В. Тульев**

Белорусский государственный технологический университет

**ВЛИЯНИЕ ИОННО-АССИСТИРУЕМОГО ОСАЖДЕНИЯ  
МЕТАЛЛСОДЕРЖАЩИХ ПОКРЫТИЙ НА СОДЕРЖАНИЕ ВОДОРОДА  
В Cr/Si-, Ti/Si- И Zr/Si-СТРУКТУРАХ**

В данной работе обсуждаются экспериментальные результаты по изучению распределения водорода в приповерхностных слоях Cr/Si-, Ti/Si- и Zr/Si-структур, сформированных ионно-ассистируемым осаждением в вакууме. Этот метод заключается в осаждении покрытия на подложку при одновременном облучении формируемой структуры ускоренными ионами материала покрытия. Осаждение покрытий осуществлялось при ускоряющих напряжениях  $U = 5\text{--}10$  кВ, плотности ионного тока  $\sim 6\text{--}20$  мкА/см<sup>2</sup>, время осаждения покрытий составляло 1–12 ч, что соответствовало интегральным потокам ассистирующих ионов  $\sim (1\text{--}12) \cdot 10^{17}$  ион/см<sup>2</sup>. В рабочей камере в процессе осаждения покрытий поддерживался вакуум при давлении  $\sim 10^{-2}$  Па. Состав и распределение элементов по глубине в сформированных покрытиях изучались методом Резерфордского обратного рассеяния ионов гелия в сочетании с компьютерным моделированием RUMP, а распределение водорода по глубине – методом резонансных ядерных реакций.

Установлено, что при ионно-ассистируемом нанесении металлсодержащих (Cr, Ti и Zr) покрытий на кремний формируются поверхностные структуры толщиной  $\sim 100\text{--}400$  нм в зависимости от времени осаждения. В состав покрытия входят атомы осаждаемого металла, атомы из подложки (Si), атомы технологических примесей кислорода, углерода и водорода. Сформированные покрытия содержат  $\sim 1\text{--}20$  ат. % водорода в зависимости от параметров осаждения покрытий. Источником атомов примесей (H, C и O) в покрытиях является летучая фракция углеводородов вакуумного масла диффузионного паромасляного насоса.

Установлено также, что наибольшее количество водорода содержится в структуре Ti/Si. Концентрация водорода уменьшается в  $\sim 1,5\text{--}2$  раза при повторных сканированиях образцов пучком анализирующих ионов N<sup>+</sup>, что связано с дегазацией атомов водорода, которые химически слабо связаны с атомами покрытия.

**Ключевые слова:** ионно-ассистируемое осаждение, кремний, хром, титан, цирконий, водород, метод резонансных ядерных реакций.

**V. V. Tul'ev**

Belarusian State Technological University

**INFLUENCE OF ION-ASSISTED DEPOSITION  
OF METAL-CONTAINING COATINGS FOR HYDROGEN CONTENT  
IN Cr/Si, Ti/Si AND Zr/Si STRUCTURES**

In this paper, we discuss experimental results on the hydrogen distribution in the surface layers of Cr/Si, Ti/Si and Zr/Si structures formed by ion-assisted vacuum deposition. This method consists in depositing a coating on a substrate while irradiating the formed structure with accelerated ions of the coating material. Coatings were deposited at accelerating voltages  $U = 5\text{--}10$  kV, ion current density  $6\text{--}20$   $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ , and coating deposition time was 1–12 hours, which corresponded to integral fluxes of assisting ions  $(1\text{--}12) \cdot 10^{17}$  ion/cm<sup>2</sup>. The deposition of the covering has occurred in a vacuum at a pressure  $\sim 10^{-2}$  Pa in the working chamber.

The composition and depth distribution of elements in the formed coatings were studied by the Rutherford helium ion back scattering method in combination with computer simulation of RUMP, and the hydrogen depth distribution by the method of resonant nuclear reaction. It has been established that upon ion-assisted deposition of metal-containing (Cr, Ti, Zr) coatings on silicon, surface structures are formed with a thickness, depending on the deposition time 100–400 nm. The composition of the coating includes atoms of the deposited metal, atoms from the substrate (Si), atoms of technological impurities of oxygen, carbon and hydrogen. The formed coatings contain  $\sim 1\text{--}20$  at. % hydrogen, depending on the deposition parameters of the coatings. The source of impurity atoms (H, C and O) in the coatings is the volatile fraction of the hydrocarbon vacuum oil of a diffusion steam-oil pump.

It was also established that the largest amount of hydrogen is contained in the Ti/Si structure. The hydrogen concentration decreases 1.5–2 times during repeated scans of the samples by a beam of analyzing ions, which is associated with the degassing of hydrogen atoms, which are chemically weakly bound to the coating atoms.

**Key words:** ion-assisted deposition, silicon, chromium, titanium, zirconium, hydrogen, resonant nuclear reaction method.

**Введение.** Ионно-лучевые технологии осаждения покрытий являются перспективными методами модифицирования состава и свойств поверхности материалов и изделий [1–3]. Одним из таких методов считается метод ионно-ассистируемого осаждения, где в процессе осаждения покрытия происходит одновременное облучение поверхности формируемой структуры ускоренными ионами материала покрытия [1].

Для реализации этого метода использовался вакуумный электродуговой ионный источник, создающий плазму, в которой содержатся ионизированная и нейтральная фракции из материала электродов [1]. Нейтральная фракция, испаряясь во всех направлениях, осаждается и на подложке. А под действием ускоряющей разности потенциалов  $U$  между подложкой и источником ионы вытягиваются из разрядного промежутка и под действием электростатического поля внедряются в поверхность подложки. При этом происходит перемешивание атомов осаждаемого покрытия с атомами подложки, в результате чего формируется покрытие с высокой степенью адгезии к основе.

В процессе ионно-ассистируемого осаждения в приповерхностных слоях образца происходят сложные физико-химические процессы, способные существенно изменить распределение элементов покрытия по глубине, вследствие чего могут изменяться структура и свойства его поверхности [1–3].

В настоящей работе предпринята попытка определить характер распределения атомов водорода в поверхностных слоях кремния при осаждении покрытий на основе металлов:  $Me = Cr, Ti, Zr$ , а также установить особенности и закономерности процесса проникновения атомов водорода в покрытие и подложку при ионно-ассистируемом осаждении.

**Основная часть.** В качестве подложки использовались образцы из кремния, на которые наносились металлсодержащие покрытия на основе  $Cr, Ti, Zr$ . Осаждение покрытий осуществлялось при  $U = 5–10$  кВ, плотности ионного тока  $\sim 6–20$  мкА/см<sup>2</sup>, время осаждения покрытий составляло 1–12 ч, что соответствовало интегральным потокам ассистирующих ионов  $\sim (1–12) \times 10^{17}$  ион/см<sup>2</sup>. В рабочей камере в процессе осаждения покрытий поддерживался вакуум при давлении  $\sim 10^{-2}$  Па. Послойный элементный анализ проводился методом резерфордского обратного рассеяния (РОР) ионов гелия в сочетании с компьютерным моделированием RUMP [4]. Моделирование на основе экспериментальных данных спектров РОР, полученных от образцов после ионно-ассистируемого осаждения, показало, что в состав сформированных структур, помимо атомов осаждаемого металла, атомов кремния из

подложки, атомов технологической примеси углерода и кислорода, должно входить  $\sim 20–30$  ат. % водорода (рис. 1).

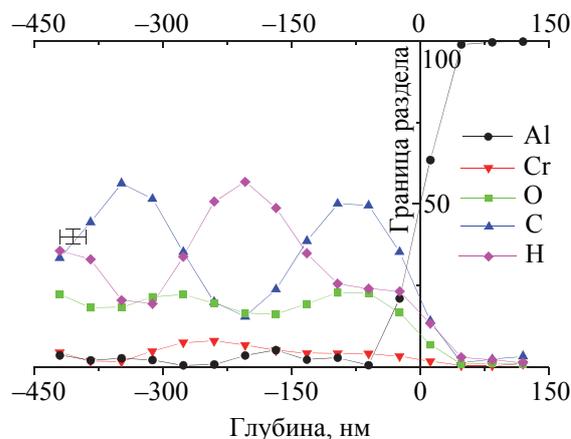


Рис. 1. Профили распределения элементов по глубине в структуре  $Cr/Si$ , полученные моделированием RUMP

Метод РОР не позволяет напрямую установить наличие водорода в приповерхностных слоях структур. Для определения содержания водорода в сформированных  $Me/Si$ -структурах были проведены эксперименты с применением метода ядерных реакций (ЯР). Для этого использовалась резонансная ядерная реакция  ${}^1H({}^{15}N, \alpha\gamma){}^{12}C$ . Распределение водорода в покрытиях по глубине было установлено при проведении прямых экспериментов с использованием резонансной ( $\Gamma = 1,86$  кэВ) ядерной реакции при взаимодействии ионов азота с водородом. Для этого применялось сканирование энергии ионов  $N^+$  в интервале значений от 6380 до 6830 МэВ и 7000 МэВ через 10 кэВ в зависимости от толщины покрытий. Чтобы определить абсолютную концентрацию водорода в покрытии, использовалась известная калибровка системы [5]. Преобразование шкалы энергии ионов азота в шкалу глубины было сделано, используя тормозную способность ионов азота ( $\sim 1,2–1,3$  кэВ/нм), полученную с помощью программы TRIM [6] на основании смоделированного по данным РОР состава покрытия (рис. 1). Экспериментальные результаты представлены на рис. 2. Они подтверждают данные моделирования RUMP о наличии водорода в сформированных структурах. Результаты, полученные методом ЯР, согласуются с данными [7], где было показано, что пленки, полученные при испарении металлов, могут содержать значительные концентрации атомов водорода. Источником водорода в покрытиях, как и кислорода и углерода, также, на наш взгляд, является летучая фракция углеводородов вакуумного масла диффузионного паромасляного насоса.

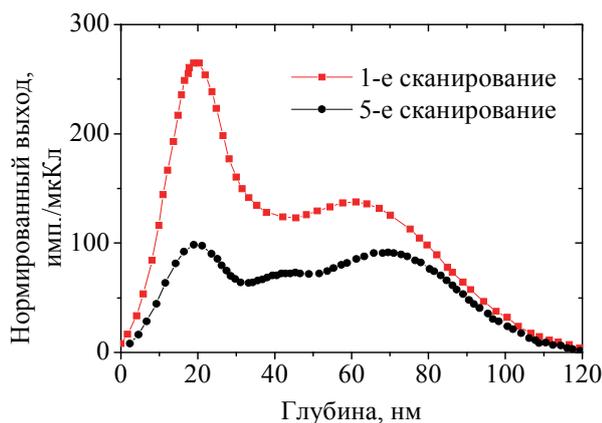


Рис. 2. Распределение водорода по глубине в Zr/Si-структуре, полученной при времени осаждения  $t = 3$  ч

После пятого сканирования поверхности образца пучком анализирующих ионов (рис. 2) слоевая концентрация водорода в анализирующем слое практически не изменяется и становится равной, согласно данным эксперимента,  $\sim 1,1 \cdot 10^{16}$  ат./см<sup>2</sup>. Однако при первом сканировании (рис. 2) измеряемая слоевая концентрация водорода в покрытии в  $\sim 1,8$  раза больше, чем измеряемая при пятом сканировании. Уменьшение количества водорода в покрытии под воздействием анализирующего луча мы интерпретируем как дегазацию тех атомов водорода, которые оказались химически слабо связаны с другими атомами покрытия.

В таблице представлены данные относительной концентрации  $C$  атомов водорода в исследуемых Me/Si-структурах, сформированных при различных условиях.

#### Концентрации водорода в структурах Me/Si

Структура	Время осаждения, ч	$U$ , кВ	Глубина слоя, нм	$C$ , ат. %
Cr/Si	6	5	174	9,8
	12	5	220	13,7
Ti/Si	2	7	126	16,7
	4	7	153	18,9
Zr/Si	1	10	83	3,0
	3	10	144	1,0

Экспериментальные данные показывают, что для покрытий на основе Cr, Ti наблюдаются аналогичные результаты. Наибольшее количество водорода при меньших значениях времени осаждения было обнаружено в Ti/Si-структуре. Этот эффект можно связать с высокой адсорбционной способностью титана и его соединений. Также следует отметить, что содержание водорода увеличивается с увеличением времени осаждения покрытия для Cr/Si- и Ti/Si-структур, а для Zr/Si-структур – уменьшается.

На рис. 3 (кривая 1) с расшифровкой представлены данные анализа состава элементов, выделяющихся из сформированных покрытий под воздействием пучка анализирующих ионов  $N^+$ .

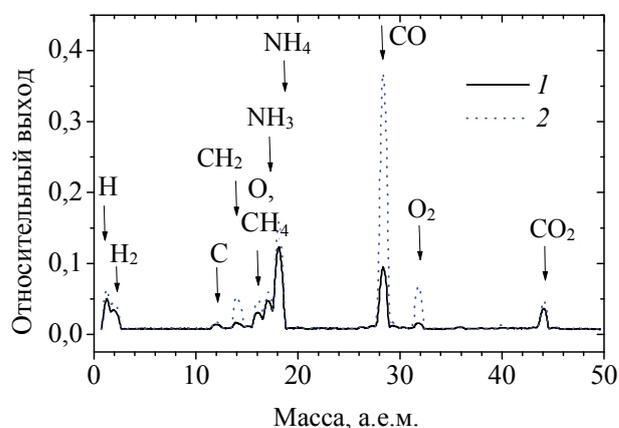


Рис. 3. Данные масс-спектрального анализа состава элементов, выделяющихся из образцов при проведении эксперимента методом ЯР: 1 – Cr/Si-структура; 2 – Si

В качестве сравнения на рис. 3 (кривая 2) приведены данные анализа состава элементов, выделяющихся из чистого кремния под воздействием пучка ионов  $N^+$ .

Анализ показал, что под воздействием анализирующего пучка ионов азота из покрытий выделяются  $H$ ,  $H_2$ ,  $C$ ,  $CH_2$ ,  $CH_4$ ,  $O$ ,  $O_2$ ,  $CO$ ,  $CO_2$ . Полученные результаты подтверждают вывод о том, что под воздействием пучка ионов азота из покрытия выделяются атомарный и молекулярный водород, а также соединения водорода.

**Закключение.** Методом POP в сочетании с компьютерным моделированием определено, что при ионно-ассистированном осаждении на кремний металлсодержащих покрытий на основе Cr, Ti, Zr формируются поверхностные структуры со сложным элементным составом. В состав структур входят атомы осаждаемого металла, атомы кремния из подложки и атомы сопутствующих примеси C и O.

Исследование сформированных Me/Si-структур, проведенное с применением метода резонансной ядерной реакции, показало, что в приповерхностных слоях может содержаться до 20 ат. % водорода в зависимости от параметров осаждения. Наибольшее количество водорода было обнаружено в Ti/Si-структуре, что можно объяснить высокой адсорбционной способностью титана и его соединений. Источником водорода в покрытиях является летучая фракция углеводорода вакуумного масла диффузионного паромасляного насоса.

Концентрация водорода уменьшается в ~1,5–2 раза при повторных сканированиях образцов пучком анализирующих ионов  $N^+$ , что обус-

ловлено дегазацией атомов водорода, которые не связаны или слабо связаны с атомами покрытия.

### Список литературы

1. Анализ ядерно-физическими методами состава покрытий, нанесенных на Al осаждением Zr и W при одновременном облучении одноименными ионами / В. В. Тульев [и др.] // Физика и химия обработки материалов. 1998. № 4. С. 33–36.
2. Наноразмерные поверхностные слои титанового сплава, сформированные ионно-лучевым перемешиванием углерода с подложкой / В. Л. Воробьев [и др.] // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2019. № 10. С. 102–107.
3. Белый А. В., Кукареко В. А. Структурное состояние и износостойкость модифицированных ионами азота хромистых сталей // Физика металлов и металловедение. 2014. Т. 104, № 6. С. 641–649.
4. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for rutherford backscattering analysis // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1986. Vol. B15. P. 227–234.
5.  $^{15}N$  Doppler spectroscopy of  $^1H$  on diamond / S. Jan [et al.] // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1994. Vol. B85. P. 321–325.
6. Ziegler J. F., Biersack J. P., Littmark U. The stopping and range of solids. New York: Pergamon Press, 1985. 321 p.
7. Wistron R. E., Brgesen P., Sass S. L. Deuterium trapping in evaporated metal films // Acta Metall. Mater. 1993. Vol. 41, no. 12. P. 355–356.

### References

1. Tul'ev V. V., Kulikauskas V. S., Alov N. V., Tashlykov I. S. Nuclear-physical analysis of the composition of coatings deposited on Al by deposition of Zr and W with simultaneous irradiation with ions of the same name. *Fizika i khimiya obrabotki materialov* [Physics and Chemistry of Materials Treatment], 1998, no. 4, pp. 33–36 (In Russian).
2. Vorob'ev V. L., Gilmutdinov F. Z., Bykov P. V., Bayankin V. Ya., Pospelova I. G., Russkih I. T. Nanosized surface layers of titanium alloy formed by ion-beam mixing of carbon with the substrate. *Poverkhnost'. Rentgenovskiy, sinkhrotronnyye i neytronnyye issledovaniya* [Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques], 2019, no. 10, pp. 102–107 (In Russian).
3. Belyy A. V., Kukareko V. A. The structural state and wear resistance of modified chromium steels with nitrogen ions. *Fizika metallov i metallovedeniye* [Physics of Metals and Metallography], 2014, vol. 104, no. 6, pp. 641–649 (In Russian).
4. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for rutherford backscattering analysis. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.*, 1986, vol. B15, pp. 227–234.
5. Jan S., Kalbitzer S., Oberschachtsiek P., Sellschop J. P. F.  $^{15}N$  Doppler spectroscopy of  $^1H$  on diamond. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.*, 1994, vol. B85, pp. 321–325.
6. Ziegler J. F., Biersack J. P., Littmark U. The stopping and range of solids. New York, Pergamon Press, 1985. 321 p.
7. Wistron R. E., Brgesen P., Sass S. L. Deuterium trapping in evaporated metal films. *Acta Metall. Mater.*, 1993, vol. 41, no. 12, pp. 355–356.

### Информация об авторе

**Тульев Валентин Валентинович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tvv69@mail.ru

### Information about the author

**Tul'ev Valentin Valentinovich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tvv69@mail.ru

Поступила после доработки 01.04.2020

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ</b> .....	<b>5</b>
<b>МАТЕМАТИКА</b> .....	<b>5</b>
<b>Марченко В. М., Борковская И. М.</b> К вопросу о стабилизации гибридных дифференциально-разностных систем.....	5
<b>Savva V. A., Vanjak S.</b> On solving coherent dynamics equations with discrete mathematics method for quantum systems under laser excitation.....	12
<b>Адуло Т. И., Асмыкович И. К.</b> Математическая компетентность индивида – необходимое условие инновационного развития общества.....	18
<b>Краютко В. В., Размыслович Г. П., Игнатенко В. В.</b> <i>H</i> -управляемость динамических систем.....	26
<b>Волк А. М.</b> Тонкодисперсная сепарация жидкости.....	31
<b>Якименко А. А.</b> К вопросу о модальном управлении одной трехмерной системой нейтрального типа в слабоциклическом случае.....	37
<b>Можей Н. П.</b> Линейные алгебры Ли на четырехмерном пространстве.....	42
<b>ФИЗИКА</b> .....	<b>48</b>
<b>Наркевич И. И., Фарафонтובה Е. В., Кулеш А. А., Рогач А. А.</b> Решение модифицированного интегрального уравнения для потенциалов средних сил и расчет параметров фазовых переходов в гетерогенных системах, содержащих кристаллические наночастицы.....	48
<b>Бобрович О. Г.</b> Композиционный состав и дефектообразование в кремнии с имплантированным маркером Хе при нанесении титана в условиях ионного ассистирования .....	56
<b>ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ</b> .....	<b>61</b>
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ</b> .....	<b>61</b>
<b>Гринюк Д. А., Сухорукова И. Г., Олиферович Н. М., Оробей И. О.</b> Использование нелинейных регуляторов в каскадных системах регулирования при одновременной настройке четырех параметров.....	61
<b>Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г.</b> Общее решение для синтеза deadbeat-регулятора на произвольное количество шагов.....	69
<b>ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ</b> .....	<b>76</b>
<b>Jaber G., Patsei N. V.</b> Semantic information centric network model evaluation .....	76
<b>КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ</b> .....	<b>81</b>
<b>Мадьяров В. Р.</b> Применение эффекта магнитоплазменного отражения для определения скорости поверхностной рекомбинации в полупроводниках .....	81
<b>Тулъев В. В.</b> Влияние ионно-ассистируемого осаждения металлсодержащих покрытий на содержание водорода в Cr/Si-, Ti/Si- и Zr/Si-структурах.....	85

# CONTENTS

<b>PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES.....</b>	<b>5</b>
<b>MATHEMATICS.....</b>	<b>5</b>
<b>Marchenko V. M., Borkovskaya I. M.</b> On the stabilization of hybrid differential-difference systems.....	5
<b>Savva V. A., Banjak S.</b> On solving coherent dynamics equations with discrete mathematics method for quantum systems under laser excitation.....	12
<b>Adulo T. I., Asmykovich I. K.</b> Mathematical competence of the individual is the necessary condition of innovative development of society.....	18
<b>Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P., Ignatenko V. V.</b> <i>H</i> -controllability of dynamical systems	26
<b>Volk A. M.</b> Liquid separation .....	31
<b>Yakimenka A. A.</b> To the question of modal control for one three-dimensional neutral type system in weakly cyclic case .....	37
<b>Mozhey N. P.</b> Linear Lie algebras in four-dimensional space .....	42
<b>PHYSICS.....</b>	<b>48</b>
<b>Narkevich I. I., Farafontova E. V., Kulesh A. A., Rogach A. A.</b> Solution of the modified integral equation for potentials of average forces and calculation of phase transition parameters in heterogeneous systems containing crystalline nanoparticles .....	48
<b>Bobrovich O. G.</b> Composition and damage of silicon with an implanted marker Xe at deposition of titanium in the conditions of ion assistance .....	56
<b>COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES .....</b>	<b>61</b>
<b>MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS .....</b>	<b>61</b>
<b>Hryniuk D. A., Suhorukova I. G., Oliferovich N. M., Orobei I. O.</b> Use of nonlinear controllers in cascade regulation systems at simultaneous setting of four parameters .....	61
<b>Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Suhorukova I. G.</b> General solution for synthesis of deadbeat regulator for arbitrary number of steps .....	69
<b>PROCESSING AND TRANSMISSION OF INFORMATION.....</b>	<b>76</b>
<b>Jaber G., Patsei N. V.</b> Semantic information centric network model evaluation .....	76
<b>BRIEF MESSAGES .....</b>	<b>81</b>
<b>Mad'yarov V. R.</b> Measurement of surface recombination velocity in semiconductors using magnetoplasma reflection effect.....	81
<b>Tul'ev V. V.</b> Influence of ion-assisted deposition of metal-containing coatings for hydrogen content in Cr/Si, Ti/Si and Zr/Si structures.....	85

Редактор *Е. С. Ватечкина*  
Компьютерная верстка *Д. С. Жих, А. Н. Петрова*  
Корректор *Е. С. Ватечкина*

Подписано в печать 14.09.2020. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.  
Усл. печ. л. 11,2. Уч.-изд. л. 11,6.  
Тираж 100 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:  
УО «Белорусский государственный технологический университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/227 от 20.03.2014.  
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.