

## ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПОСТОЯННЫХ УПРУГОСТИ ДРЕВЕСИНЫ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

The article is devoted to problem of determination wood shear module in tree-point bending testing.

Для прогнозирования механических характеристик древесно-полимерных композитов необходимо располагать данными о характеристиках основного их компонента – натуральной древесины, которая обладает высокой степенью анизотропии. Для древесины лиственных пород отношение модулей упругости первого рода  $E_i$  в различных структурных направлениях достигает значения 26,5, а модулей сдвига  $G_{ij}$  – 5,7 [1]. Особенно значительно отличаются модули упругости  $E_a$  и  $G_{at}$  – до 100 раз. По этой причине экспериментальное определение постоянных упругости древесины является весьма трудоемкой задачей. Геометрические оси образцов должны точно совпадать со структурными направлениями ствола дерева, измерение деформаций должно производиться строго по этим же направлениям. При этом величины измеряемых деформаций, особенно в поперечных по направлению к действующей нагрузке направлениях, весьма малы. Обеспечение однородности напряженного состояния даже только в рабочей части образца представляет сложную задачу. В экспериментальной практике для определения постоянных упругости анизотропных материалов широко используются испытания на поперечный изгиб и реже – испытания на растяжение.

Проведем сравнительный анализ трудоемкости испытаний на растяжение и поперечный изгиб. Наиболее просто однородное напряженное состояние в материале достигается при растяжении образцов, имеющих форму односторонней лопатки. При этом возможно определить не только модули упругости  $E_i$  и коэффициенты Пуассона  $\mu_{ij}$  в структурных направлениях, но и модули сдвига  $G_{ij}$ . Для их определения образцы вырезают под углом  $45^\circ$  к структурным направлениям древесины. Наибольшую трудность при испытаниях на растяжение представляет измерение деформаций образцов. Использование широко распространенных в экспериментальной практике наклеиваемых тензорезисторов ограничено их поперечной чувствительностью. В некоторых случаях, например при растяжении образца в тангенциальном направлении, коэффициент поперечной чувствительности тензорезисторов соизмерим с коэффициентом Пуассона древесины, что делает их непригодными для измерения поперечных деформаций образца в аксиальном направлении. По указанной причине предпочтительным является использование экстензометров. Их особенностью является отсутствие взаимного влияния продольной и поперечной деформаций [2]. Недостатком является трудоемкость юстировки при установке на образец.

К достоинствам испытаний на растяжение следует отнести сравнительно простую и очевидную методику расчета постоянных упругости с использованием закона Гука и формулы А. Н. Митинского [1].

При испытаниях образцов на поперечный изгиб измеряют силу, прогиб или, реже, деформацию внешних слоев образца. Поскольку нагрузка и прогиб образца обычно достаточно велики, их измерение не представляет технической сложности, что, несомненно, является достоинством испытаний на изгиб и причиной их широкой распространенности.

Для проведения испытаний широко используют образцы призматической формы с продольной осью, совпадающей с аксиальным структурным направлением материала.

Известно, что при поперечном изгибе напряженное состояние неоднородно как по длине, так и по высоте образца. На образец действуют изгибающий момент и поперечная сила, следовательно, в нем возникают нормальные и касательные напряжения. Считается, что трехточечная схема нагружения образцов позволяет достаточно точно определять модуль упругости в продольном направлении образца  $E_a$  и модуль межслойного сдвига  $G_{at}$  [3]. Для расчета используют зависимость

$$\frac{1}{E_f^b} = \frac{1}{E_a^b} + \frac{1,2}{G_{at}^b} \left(\frac{h}{l}\right)^2, \quad (1)$$

где  $E_f^b$  – фиктивный модуль упругости в аксиальном направлении, рассчитанный по прогибу образца  $f$ , без учета сдвига;  $E_a^b$  – модуль упругости в аксиальном направлении, рассчитанный с учетом сдвига;  $G_{at}^b$  – модуль межслойного сдвига в плоскости  $at$ , совпадающей с плоскостью сердцевины луча древесины;  $h$  – толщина образца;  $l$  – расстояние между опорами. При этом не учитывается смятие образцов и их «сползание» с опор [3].

Поскольку уравнение (1) содержит две неизвестные величины  $E_a^b$  и  $G_{at}^b$ , для их определения необходимо произвести испытания как минимум двух групп образцов с различным отношением  $h/l$ .

В данной работе проводится сравнение значений постоянных упругости, полученных при испытаниях на растяжение –  $E_a^t$ ,  $G_{at}^t$  и на поперечный изгиб –  $E_a^b$  и  $G_{at}^b$  по рассмотренным методикам.

Заготовки для образцов, предназначенных для испытаний на растяжение, выкалывались из модельного кряжа в зоне одного и того же годичного слоя. Образцы для определения  $E_a^t$  имели форму прямоугольной призмы длиной 300 мм и сечением  $4 \times 20$  мм. Продольная ось

образцов совпадала с аксиальным направлением ствола дерева, поперечный размер 4 мм совпадал с тангенциальным направлением. Образцы для определения  $G'_{at}$  выпиливались под углом  $45^\circ$  к аксиальному направлению. Сечение призматических образцов составляло  $10 \times 20$  мм, длина – 50 мм. Для уменьшения краевого эффекта, возникающего от захватов разрывной машины, к образцам приклеивали удлиняющие головки. Влажность образцов составляла 8%.

Испытания проводили на разрывной машине Р-5, снабженной электронно-механическим динамометром [4]. Деформаций образцов измеряли тензотрами, описание которых приведено в работах [5, 6]. При испытаниях производилась запись диаграмм деформирования в двух структурных направлениях.

Модуль упругости  $E'_a$  рассчитывали по общеизвестным формулам, полученным на основании закона Гука, модуль сдвига  $G'_{at}$  – по формуле А. Н. Митинского:

$$G'_{at} = \frac{E_a^{45}}{2(1 + \mu_{at}^{45})}, \quad (2)$$

где  $E_a^{45}$  и  $\mu_{at}^{45}$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно, полученные при растяжении образцов, вырезанных под углом  $45^\circ$  к аксиальному направлению.

Результаты расчетов приведены в табл. 1. Из анализа данных табл. 1 следует, что значения  $E'_a$ ,  $G'_{at}$ , полученные для натуральной древесины при испытаниях на растяжение, хорошо согласуются с данными работы [1].

Таблица 1  
Постоянные упругости, полученные при испытании образцов на растяжение

Материал	$E'_a$ ГПа	$G'_{at}$ ГПа	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Береза натуральная	20,4	0,927	679
Береза +35% ФС	21,9	1,65	779
Ольха натуральная	9,90	0,767	423
Ольха +35% ФС	12,2	1,46	634

Модифицирование древесины 35% раствором фенолоспиртов приводит к увеличению модуля упругости  $E'_a$  для древесины березы на 7%, ольхи – на 23%. Модули сдвига  $G'_{at}$  увеличиваются на 78% и 90% соответственно. Степень анизотропии модифицированной древесины существенно меньше, чем натуральной. Образцы для испытаний на изгиб вырезали из уже испытанных на растяжение заготовок длиной 300 мм. На заготовках помечалось срединное сечение. Затем их укорачивали до требуемой длины симметричным торцеванием. Каждая заготовка испытывалась на изгиб трижды: при длинах образца 190, 130 и 70 мм. Это обеспечило получение трех различных соотношений  $h/l$ , необходимых для расчета  $E^b_{af}$ ,  $G^b_{af}$ .

Нагружение образцов по трехточечной схеме и запись диаграмм деформирования производилось с использованием автоматизированного измерительного комплекса на базе разрывной машины ИР-5060-5, разработанного на кафедре сопротивления материалов БГТУ. Скорость нагружения составляла 2 мм/мин, предельный прогиб задавался из условия, чтобы максимальная относительная деформация волокон образца составляла 0,2%. Нагрузка на образец измерялась с шагом 1 Н, а прогиб – с шагом 0,002 мм.

Фиктивный модуль упругости  $E^b_f$  рассчитывали по формуле

$$E^b_f = \frac{\Delta F l^3}{\Delta f 48 I_t}, \quad (3)$$

где  $\Delta F$  – приращение нагрузки на линейном участке диаграммы Н;  $\Delta f$  – приращение прогиба на том же участке м;  $I_t$  – момент инерции сечения м<sup>4</sup>;  $l$  – расстояние между опорами, м. Результаты обработки диаграмм приведены в табл. 2.

Таблица 2  
Значения фиктивных модулей упругости, полученные при испытаниях образцов на поперечный изгиб

Материал	Модуль упругости $E^b_f$ , ГПа		
	$l=180$ мм	$l=120$ мм	$l=60$ мм
Береза натур.	19,5	17,7	14,1
Береза +35% ФС	20,0	18,3	15,1
Ольха натур.	9,16	8,62	7,38
Ольха +35% ФС	10,3	9,39	8,13

Анализ табл. 2 показывает, что при уменьшении расстояния между опорами, т. е. при увеличении  $h/l$  модуль  $E^b_f$  уменьшается весьма значительно – до 25%. Это явление объясняется увеличением составляющей прогиба образца, зависящей от модуля сдвига  $G^b_{af}$ , что и дает возможность определить его величину из подобного эксперимента. Однако расчет, проведенный по известным из [3] формулам, дает значения  $G^b_{af}$  в несколько раз заниженные в сравнении с  $G'_{at}$ , полученными при испытаниях на растяжение. Причиной столь существенной разницы, по-видимому, может быть игнорирование контактных деформаций образца под опорами нагружающего приспособления.

Рассмотрим метод расчета, учитывающий контактные деформации.

Обычно для измерения прогибов используется датчик перемещения, неподвижно установленный посередине пролета нагружающего приспособления. Прогиб образца, измеренный датчиком перемещения, состоит из трех составляющих:

$$f = f_\sigma + f_\tau + f_k, \quad (4)$$

где  $f_\sigma$  – прогиб от изгибающего момента,

$$f_\sigma = \frac{F l^3}{48 E^b_a I_t};$$

$f_\tau$  – прогиб от поперечной силы,

$$f_\tau = \frac{3Fl}{10G_{at}^b A};$$

$f_k$  – перемещение от контактных деформаций.

Выражение для вычисления  $f_k$  можно получить из решения задачи контактного взаимодействия двух круговых цилиндров радиуса  $R_1$  и  $R_2$  с параллельными осями, приведенного в работе [7]. Радиус  $R_1$  соответствует радиусу закругления опоры испытательного приспособления,  $R_2$  – радиус кривизны поверхности образца, т. е.  $R_2 = \infty$ . Ширина полосы соприкосновения цилиндров  $2b$  определяется по формуле

$$b = 1,128 \sqrt{\eta q \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad (5)$$

где  $\eta = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}$ ;  $q = \frac{F}{2B}$ ;  $B$  – длина поло-

сы соприкосновения.

Перемещение  $f_k$  определяется из выражения

$$f_k = \frac{2q}{\pi} \left[ \frac{1-\mu_1^2}{E_1} \left( \ln \frac{2R_1}{b} + 0,407 \right) + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \left( \ln \frac{2R_2}{b} + 0,407 \right) \right] \quad (6)$$

Если  $R_2 = \infty$ , то в формуле (5)  $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1$ ,

и она примет вид

$$b = 1,128 \sqrt{\eta q R_1}. \quad (7)$$

В формуле (6) при  $R_2 \rightarrow \infty$  величина  $\ln(2R_2/b)$  также стремится к  $\infty$ , т. к. предполагается наличие бесконечного полупространства, ограниченного плоскостью. В нашем случае балка имеет конечную толщину  $h$  и с достаточной точностью формула (6) может быть записана в следующем окончательном виде

$$f_k = \frac{2q}{\pi} \left[ \frac{1-\mu_1^2}{E_1} \left( \ln \frac{2R_1}{b} + 0,407 \right) + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \left( \ln \frac{h}{b} + 0,407 \right) \right] \quad (8)$$

Для экспериментального определения ширины полосы контакта опоры и образца –  $2b$  на опору укладывали копировальную бумагу и производили нагружение образца. Ширину отпечатка на образце измеряли при помощи микроскопа. Расхождение между измеренной и рассчитанной по формуле (7) шириной не превышало 10%. По формулам (4) и (6) произведен расчет составляющих прогиба для образца из натуральной древесины березы при  $l = 60$  мм и

$h = 4,3$  мм. Из него следует, что  $f_\sigma$  составляет около 60%,  $f_\tau$  около 14%, а  $f_k$  около 6% от всего прогиба образца  $f$ , т. е. контактная деформация на опорах соизмерима с перемещением от поперечной силы. Наглядным подтверждением существенного влияния контактных деформаций является заметная нелинейность в начале диаграммы деформирования образца. Именно на начальном этапе нагружения (приблизительно до силы в 50 Н) площадь контакта цилиндрических опор с поверхностью образца резко увеличивается, что, в свою очередь, существенно замедляет рост контактной составляющей деформаций, и далее диаграмма становится практически линейной.

Очевидно, что игнорирование деформаций на опорах приводит к весьма существенному занижению модуля сдвига  $G_{at}^b$  при его расчете по методике [3]. Значения постоянных упругости, рассчитанные с использованием формул (4)–(7), приведены в табл. 3.

Таблица 3

Значения постоянных упругости, рассчитанные с учетом контактных деформаций на опорах

Материал	$E_{at}^b$ , ГПа	$G_{at}^b$ , ГПа
Береза натуральная	19,8	0,890
Береза +35% ФС	20,8	1,56
Ольха натуральная	9,78	0,720
Ольха +35% ФС	12,0	1,39

Сравнение значений постоянных упругости, полученных с применением предложенной методики расчета при поперечном изгибе и полученных при испытаниях на растяжение, показывает незначительное их различие.

### Литература

1. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
2. Новицкий П. В. Электрические измерения неэлектрических величин. – Л.: Энергия, 1975. – 576 с.
3. Тарнопольский Ю. М., М.Киндис Т. Я. Методы статических испытаний армированных пластиков. – М.: Химия, 1975. – 264 с.
4. Дорожок А. В. Высокочувствительный электронно-механический динамометр // Механическая технология древесины. – Мн., 1984. – Вып. 14. – С. 57–59.
5. Дорожок А. В. Тензомер для измерения поперечных деформаций // Заводская лаборатория. – 1984. – Т. 50, № 5. – С. 88–89.
6. Дорожок А. В. Тензомер для определения продольных деформаций образца // Труды БГТУ. – 1997. – Вып. 5. – С. 76–78.
7. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. – М.: Машгиз, 1958. – 274 с.