

ISSN 2520-6141



# ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал



Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

**№ 1 (266) 2023 год**

**Рубрики номера:**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Математика

Механика

Физика

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Моделирование процессов

и управление в технических системах

Обработка и передача информации

Системный анализ и обучающие системы

Алгоритмизация и программирование



Минск 2023

Учреждение образования  
«Белорусский государственный  
технологический университет»

# ТРУДЫ БГТУ

**Научный журнал**

*Издается с июля 1993 года*

**Серия 3**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ  
И ИНФОРМАТИКА**

**№ 1 (266) 2023 год**

*Выходит два раза в год*

Минск 2023

*Учредитель* – учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

*Главный редактор журнала* – Войтов Игорь Витальевич, доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь

**Редакционная коллегия журнала:**

Шетько С. В., кандидат технических наук, доцент (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;  
Жарский И. М., кандидат химических наук, профессор (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;  
Черная Н. В., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Прокопчук Н. Р., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор химических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Водопьянов П. А., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор философских наук, профессор, Республика Беларусь;  
Новикова И. В., доктор экономических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Куликович В. И., кандидат филологических наук, доцент, Республика Беларусь;  
Торчик В. И., доктор биологических наук, Республика Беларусь;  
Барчик Стэфан, доктор наук, профессор, Словацкая Республика;  
Жантасов К. Т., доктор технических наук, профессор, Республика Казахстан;  
Харша Ратнавира, доктор наук, профессор, Королевство Норвегия;  
Пайвинен Ристо, доктор наук, профессор, Финляндская Республика;  
Кох Барбара, доктор наук, профессор, Федеративная Республика Германия;  
Лакида П. И., доктор сельскохозяйственных наук, профессор, Украина;  
Головка М. Ф., член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор, Украина;  
Щекин А. К., член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;  
Маес Воутер, доктор химических наук, профессор, Королевство Бельгия;  
Бир Петр, доктор технических наук, профессор, Республика Польша;  
Горинштейн Ш., доктор наук, профессор, Государство Израиль;  
Эркаев А. У., доктор технических наук, профессор, Республика Узбекистан;  
Башкиров В. Н., доктор технических наук, профессор, Российская Федерация;  
Каклаускас А., доктор экономических наук, профессор, Литовская Республика;  
Каухова И. Е., доктор фармацевтических наук, профессор, Российская Федерация;  
Хассель Л. Г., доктор наук, профессор, Королевство Швеция;  
Флюрик Е. А., кандидат биологических наук, доцент (секретарь), Республика Беларусь.

**Редакционная коллегия серии:**

Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор (главный редактор серии), Республика Беларусь;  
Урбанович П. П., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора серии), Республика Беларусь;  
Соловьева И. Ф., кандидат физико-математических наук, доцент (ответственный секретарь), Республика Беларусь;  
Крук Н. Н. доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Асмыкович И. К., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;  
Грода Я. Г., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;  
Карпович Д. С., кандидат технических наук, доцент, Республика Беларусь;  
Пацей Н. В., кандидат технических наук, доцент, Республика Беларусь;  
Романенко Д. М., кандидат технических наук, доцент, Республика Беларусь;  
Калинин А. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Леваков А. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Листопад Н. И., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь.  
Мазаник С. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Минченко Л. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Прихожий А. А., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Сайко А. П., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;  
Фурс А. Н. доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;  
Головка М. Ф., член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор, Украина;  
Щекин А. К., член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;  
Бартосевич Збигнев, доктор habilitированный, Республика Польша;  
Маес Воутер, доктор химических наук, профессор, Королевство Бельгия;  
Прессельт Мартин, доктор habilitированный, Федеративная Республика Германия.

*Адрес редакции:* ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.

Телефоны: главного редактора журнала – (+375 17) 343-94-32;

главного редактора серии – (+375 17) 379-65-62.

E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

Свидетельство о государственной регистрации средств массовой информации

№ 1329 от 23.04.2010, выданное Министерством информации Республики Беларусь.

*Журнал включен в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований»*

Educational institution  
“Belarusian State Technological University”

# PROCEEDINGS OF BSTU

**Scientific Journal**

*Published monthly since July 1993*

**Issue 3**

**PHYSICS AND MATHEMATICS.  
INFORMATICS**

**No. 1 (266) 2023**

*Published biannually*

Minsk 2023

**Publisher** – educational institution “Belarusian State Technological University”

**Editor-in-chief** – Voitau Ihar Vital’evich, DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus

**Editorial (Journal):**

Shet’ko S. V., PhD (Engineering), Associate Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;  
Zharskiy I. M., PhD (Chemistry), Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;  
Chernaya N. V., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;  
Prokopchuk N. R., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Chemistry), Professor, Republic of Belarus;  
Vodop’yanov P. A., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Philosophy), Professor, Republic of Belarus;  
Novikova I. V., DSc (Economics), Professor, Republic of Belarus;  
Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Kulikovich V. I., PhD (Philology), Associate Professor, Republic of Belarus;  
Torchik V. I., DSc (Biology), Republic of Belarus;  
Barcik Štefan, DSc, Professor, Slovak Republic;  
Zhantassov K. T., DSc (Engineering), Professor, Republic of Kazakhstan;  
Harsha Ratnaweera, DSc, Professor, Kingdom of Norway;  
Paivinen Risto, DSc, Professor, Republic of Finland;  
Koch Barbara, DSc, Professor, Federal Republic of Germany;  
Lakida P. I., DSc (Agriculture), Professor, Ukraine;  
Golovko M. F., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Ukraine;  
Shchekin A. K., Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;  
Maes Wouter, DSc (Chemistry), Professor, Kingdom of Belgium;  
Beer Piotr, DSc (Engineering), Professor, Republic of Poland;  
Gorinshteyn Sh., DSc, Professor, State of Israel;  
Erkayev A. U., DSc (Engineering), Professor, Republic of Uzbekistan;  
Bashkirov V. N., DSc (Engineering), Professor, Russian Federation;  
Kaklauskas A., DSc (Economics), Professor, Republic of Lithuania;  
Kaukhova I. E., DSc (Pharmaceutics), Professor, Russian Federation;  
Hassel L. G., DSc, Professor, Kingdom of Sweden;  
Flyurik E. A., PhD (Biology), Associate Professor (secretary), Republic of Belarus.

**Editorial (Issue):**

Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor (editor-in-chief of the series), Republic of Belarus;  
Urbanovich P. P., DSc (Engineering), Professor (deputy editor-in-chief of the series), Republic of Belarus;  
Solov’yeva I. F., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor (executive editor), Republic of Belarus;  
Kruk N. N., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Asmykovich I. K., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;  
Groda Ya. G., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;  
Karpovich D. S., PhD (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus;  
Patsey N. V., PhD (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus;  
Romanenko D. M., PhD (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus;  
Kalinin A. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Levakov A. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Listopad N. I., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;  
Mazanik S. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Minchenko L. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Prihozhiy A. A., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;  
Saiko A. P., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;  
Furs A. N., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;  
Golovko M. F., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Ukraine;  
Shchekin A. K., Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;  
Bartosiewicz Zbigniew, doctor habilitated, Republic of Poland;  
Maes Wouter, DSc (Chemistry), Professor, Kingdom of Belgium;  
Presselt Martin, doctor habilitated, Federal Republic of Germany.

**Contact:** 13a, Sverdlova str., 220006, Minsk.  
Telephones: editor-in-chief (+375 17) 343-94-32;  
editor-in-chief of the series (+375 17) 399-49-60.  
E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

# НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ SCIENTIFIC PUBLICATIONS

---

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

.....

### МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

.....

УДК 519.71

**И. К. Асмыкович, Д. Е. Сидорчик, А. А. Королёв**  
Белорусский государственный технологический университет

#### **О БАЗЕ ДАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ**

Статья посвящена результатам многолетней работы по сбору публикаций по специальному классу линейных математических моделей в качественной теории динамических систем управления – дескрипторным системам, которые ряд авторов называют дифференциально-алгебраическими, либо сингулярными, либо неразрешенными относительно производной, или гибридными. Библиографический указатель составлен на основе анализа публикаций в многочисленных журналах по математической теории управления, реферативных журналах, специализированных информационных ресурсов Интернета, списков цитированных работ. Для удобства работы с указателем составлена база данных, которая позволяет быстро находить работы конкретного автора, распределение публикаций по годам, работы по специальным задачам для дескрипторных систем различного вида. База данных реализована в СУБД Microsoft Access и содержит три таблицы «Журналы», «Авторы», «Литература».

**Ключевые слова:** Библиографический указатель, теория управления, дескрипторные системы, база данных.

**Для цитирования:** Асмыкович И. К., Сидорчик Д. Е., Королёв А. А. О базе данных линейных дескрипторных систем в теории управления // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 5–9. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-1.

**I. K. Asmykovich, D. E. Sidorchik, A. A. Korolyov**  
Belarusian State Technological University

#### **ABOUT THE DATABASE OF LINEAR DESCRIPTOR SYSTEMS IN CONTROL THEORY**

The article is devoted to the results of many years of work on collecting publications on a special class of linear mathematical models in the qualitative theory of dynamic control systems – descriptor systems, which a number of authors call differential-algebraic, or singular, or unresolved with respect to the derivative, or hybrid. The bibliographic index is compiled on the basis of an analysis of publications in numerous journals

on mathematical control theory, abstract journals, specialized Internet information resources, and lists of cited works. For the convenience of working with the index, a database has been compiled that allows you to quickly find the works of a particular author, the distribution of publications by year, works on special tasks for descriptor systems of various types. The database is implemented in the Microsoft Access DBMS and contains three tables “Journals”, “Authors”, “Literature”.

**Keywords:** Bibliographic index, control theory, descriptor systems, database.

**For citation:** Asmykovich I. K., Sidorchik D. E., Korolyov A. A. About the database of linear descriptor systems in control theory. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 5–9. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-1 (In Russian).

**Введение.** В качественной теории управления движением, которая активно развивалась во второй половине XX в., одной из широко распространенных математических моделей была линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, или уравнений в частных производных, или нелинейная модель, для которой обычно рассматривалось линейное приближение. Для таких объектов подробно рассмотрены и проанализированы основные задачи качественной теории управления, а именно, управляемость, наблюдаемость, стабилизируемость, модальное управление, оптимальное управление, получены критерии их разрешимости, разработаны алгоритмы синтеза необходимых регуляторов по принципу обратной связи для управляемости, стабилизации, модального и оптимального управлений. Основные публикации до 80-х годов прошлого века отражены в библиографических указателях [1, 2], основные результаты во многочисленных обзорах, например, [3]. Но в XXI в. было выяснено, что даже для таких моделей решены далеко не все задачи [4].

Классической математической моделью в качественной теории управления для обыкновенных линейных систем является система вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad (1)$$

$$x(0) = x_0;$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (2)$$

где  $x(t)$  –  $n$ -вектор состояния;  $u(t)$  –  $r$ -вектор управляющих воздействий;  $y$  –  $m$ -вектор выхода или наблюдаемых координат;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – постоянные матрицы соответствующих размеров.

При дальнейшем изучении реальных динамических систем управления было выяснено, что представление (1), (2) далеко не всегда корректно описывают объект управления. При составлении математических моделей физических процессов и систем автоматического регулирования необходимо учитывать как дифференциальные, так и алгебраические связи, как непрерывные, так и дискретные взаимодействия. Адекватной математической моделью таких процессов являются линейные системы дифференциальных уравнений, неразрешенные

относительно производной. На необходимость изучения таких систем обращал внимание академик Лузин Н. Н. [5]. Эти системы находят широкое распространение в самых разнообразных областях современной науки и техники: автоматике и телемеханике, радиологии, биологии и медицине, при моделировании технологических процессов в плазме и лазерах, ряде экономических моделей и т. д. [7–16]. Их называют дескрипторными [11, 13, 14, 15], а также дифференциально-алгебраическими [12], или алгебродифференциальными [9, 10], либо сингулярными [8, 16], либо неразрешенными относительно производной [7]. Математически такие системы записываются в виде

$$\begin{aligned} S\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); \\ Sx(0) &= Sx_0, \quad \det S = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

В таких системах имеются существенные сложности в вопросах существования и единственности решения, но при условии регулярности [8]:

$$\det[\lambda S - A] \neq 0. \quad (4)$$

Они снимаются, и существует единственное непрерывное решение при достаточно гладких управляющих воздействиях.

Системы в виде (3) и их дискретные аналоги широко используются при моделировании процессов в электрических цепях, технологических процессах переноса (материала и тепла), задачах демографии, финансовых расчетах. Это происходит тогда, когда наряду с дифференциальными связями встречаются и алгебраические (функциональные) зависимости, например условия материального или финансового баланса.

Отметим, что при составлении библиографических указателей прежними способами, основанными на работе с научными и реферативными журналами, возникают трудности при их использовании. Так, указатель [6] содержит 6016 публикаций по непрерывным дробям, но найти работы по конкретным задачам теории непрерывных дробей или посмотреть распределение работ по годам либо по журналам весьма затруднительно.

Понятно, что при этом возникает проблема дублирования работ и исследований, когда одни и те же задачи с небольшими изменениями изучаются в большом количестве статей или тезисов и материалов конференций. Поэтому возникла идея использовать современные возможности информационных технологий и разработать базу данных, которая позволит быстро находить публикации конкретного автора, даже если статья в соавторстве, выяснять число и годы публикаций по конкретным задачам для дескрипторных систем.

**Основная часть.** Эта база данных создана на основе библиографического указателя [15] по теме дескрипторных систем управления. Указатель составлялся в течение 35 лет путем анализа реферативных и научных журналов со статьями по данной тематике, просмотра материалов научных конференций по качественной теории управления динамическими системами, математическому моделированию, анализа списков цитирования статей по дескрипторным системам. База данных содержит сведения о литературных источниках, журналах, материалах конференций, монографиях и сборниках научных трудов, в которых были опубликованы статьи по указанной тематике, а также полный список авторов. Реализована в СУБД Microsoft Access.

Данные расположены в основных трех таблицах: «Журналы», «Авторы», «Литература». Для осуществления возможности выборки данных между ними использовались связи «один-ко-многим» (реализуется тогда, когда объекту А может принадлежать или же соответствовать несколько объектов Б, но объекту Б может соответствовать только один объект А) и «многие-ко-многим» (реализуется в том случае, когда нескольким объектам из таблицы А может соответствовать несколько объектов из таблицы Б, и в то же время нескольким объектам из таблицы Б соответствует несколько объектов из таблицы А). «Журналы» и «Литература» связаны первым типом связи, «Литература» и «Авторы» – вторым. Для реализации связи «многие-ко-многим» была создана промежуточная таблица, содержащая в себе ключи связанных таблиц, которые являются значениями, уникально идентифицирующими каждую запись в них.

Для удобства отображения информации для пользователя было создано три запроса на выборку данных, которые в зависимости от введенной информации пользователем выводят соответствующие записи в объединенной таблице. Реализовано три варианта отбора записей. Это выборка данных:

- на основе информации о публикации;
- информации об авторе;
- для отображения публикаций в журнале.

При выборке данных на основе информации о публикации или об авторе вводится непосредственно полное наименование, или фамилия, либо отдельная фраза, или буква в первом диалоговом окне. Также потом можно ввести конкретный год, если пользователя интересуют публикации за какой-то конкретный промежуток времени. В выборке данных по журналу достаточно ввести наименование журнала или ключевое слово, по которым будут выведены публикации в подходящих под условия запроса журналах.

Для удобства восприятия информации для пользователя в выборке по авторам и журналам была добавлена функция-модуль, написанная на языке Visual Basic, осуществляющая подсчет выведенных записей и присвоение каждой из них в выборке своего порядкового номера. Модуль – это объект Access, в котором хранится коллекция процедур. Внутри данного модуля написана пользовательская функция Numeration, принимающая в себя один аргумент var, по которому и осуществляется нумерация записей. Функция, в свою очередь, состоит из ряда операторов, которые выполняют некоторое действие и тоже могут получать аргументы. Однако, в отличие от подпроцедур в Access, функции возвращают значение.

В дальнейшем данная база может быть улучшена, в частности, может быть добавлен графический интерфейс для более понятной и удобной работы с данными для пользователя, добавлены возможности одновременного поиска по фамилии и журналу, году и автору, году и журналу.

**Заключение.** Таким образом, если надо выяснить современное состояние исследований по стабилизации или модальному управлению, управляемости или наблюдаемости, расщепимости или реконструкции дескрипторных систем, то это можно будет сделать достаточно быстро. Такая база данных позволит при переходе на изучение специальных классов дескрипторных систем, в частности дескрипторных систем с запаздыванием, систем над коммутативными кольцами, нелинейных систем различных классов, систем с многомерным временем, находить мгновенно список публикаций. Можно получить список научных журналов и конференций, в которых рассматриваются системы такого типа. Конечно, сейчас в Интернете есть большое количество поисковых систем, но все они весьма широкого профиля, и различают дескрипторные дифференциально-алгебраические, сингулярные, неразрешенные относительно производной, а в данной базе данных они объединены, и поэтому собраны почти все работы по дескрипторным системам за 40 лет [14, 15].



### Список литературы

1. Теория управления движением. Ч. I. Линейные конечномерные системы: библиогр. указ. / сост.: Р. Габасов [и др.]. Минск, 1983. 132 с.
2. Теория управления движением. Ч. II. Нелинейные и бесконечномерные системы: библиогр. указ. / сост.: Р. Габасов [и др.]. Минск, 1983. 87 с.
3. Задачи управления конечномерными системами / сост.: И. К. Асмыкович [и др.] // Автоматика и телемеханика. 1986. № 11. С. 5–29.
4. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Трудные задачи линейной теории управления // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 7–46.
5. Лузин Н. Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 1940. № 5. С. 4–66.
6. Шмойлов В. И., Коровин Я. С., Войтулевич В. Ю. Непрерывные дроби: библиогр. указ. Saarbruken, Germany: Lap Lambert Academic Publishing, 2017. 560 с.
7. Ахундов А. А. Обзор некоторых результатов по теории линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной // *Mathematical control theory*. Warsaw: Banach Contr., 1985. Vol. 14. P. 7–16.
8. Dai L. Singular Control Systems // *Lecture Notes in Control and information Sciences*. Berlin, Springer-Verlag, 1989. Vol. 118. 439 p.
9. Бояринцев Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск, Наука, 2000. 222 с.
10. Feng Yu., Yagoubi M. Robust Control of Linear Descriptor Systems. Singapore: Springer, 2017.
11. Ilchmann A., Reis T. Surveys in Differential-Algebraic Equations I-IV Differential-Algebraic Equations Forum. Berlin; Heidelberg, Springer, 2013–2017.
12. Белов А. А., Курдюков А. П. Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015. 272 с.
13. Дескрипторные системы управления: библиогр. указ. / АН БССР, Ин-т математики; сост.: Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, И. К. Асмыкович. Минск, 1988. 38 с.
14. Асмыкович И. К. О разработке базы данных публикаций по дескрипторным системам // Информационные технологии: материалы 84-й науч.-техн. конф. проф.-препод. состава, науч. сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 3–15 февраля 2020 г. Минск, БГТУ, 2020. С. 139–140. URL: <https://elib.belstu.by/handle/123456789/3357> (дата обращения: 03.10.2022).
15. Дескрипторные системы управления: библиогр. указ. / сост. И. К. Асмыкович. Минск: БГТУ, 2022. 343 с. URL: <https://elib.belstu.by/handle/123456789/49572> (дата обращения: 03.10.2022).
16. Debeljkovic D. Lj., Buzurovic I. M. Lyapunov Stability of Linear Continuous Singular Systems: An Overview // *International Journal of Information & System Science (Canada)*. 2011. Vol. 7, no. 2–3. P. 247–268.

### References

1. Gabasov R. Kirillova F. M., Marchenko V. M., Asmykovich I. K. *Teoriya upravleniya dvizheniyem. Ch. I. Lineynyye konechnomernyye sistemy: bibliogr. ukazatel'* [Theory of motion control. Part I. Linear finite-dimensional systems: bibliographic index]. Minsk, 1983. 132 p. (In Russian).
2. Gabasov R. Kirillova F. M., Marchenko V. M., Asmykovich I. K. *Teoriya upravleniya dvizheniyem. Ch. II. Nelineynyye i beskonechnomernyye sistemy: bibliogr. ukazatel'* [Theory of motion control. Part II. Nonlinear and infinite-dimensional systems: bibliographic index]. Minsk, 1983. 87 p. (In Russian).
3. Asmykovich I. K., Gabasov R., Kirillova F. M., Marchenko V. M. Problems of control of finite-dimensional systems. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 1986, no. 11, pp. 5–29 (In Russian).
4. Polyak B. T., Shcherbakov P. S. Difficult problems of linear control theory. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 2005, no. 5, pp. 7–46 (In Russian).
5. Luzin N. H. On the study of the matrix theory of differential equations. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 1940, no. 5, pp. 4–66 (In Russian).
6. Shmoilov V. I., Korovin Ya. S., Voitulevich V. Yu. *Nepreryvnyye drobi: bibliogr. ukazatel'* [Continuous fractions: bibliographic index]. Saarbruken, Germany, Lap Lambert Academic Publishing, 2017. 560 p. (In Russian).
7. Akhundov A. A. Review of some results on the theory of linear differential equations unsolvable with respect to the derivative. *Mathematical control theory*. Warsaw, Banach Contr. Publ., 1985, vol. 14, pp. 7–16 (In Russian).
8. Dai L. Singular Control Systems. *Lecture Notes in Control and information Sciences*. Berlin, Springer-Verlag Publ., 1989, vol. 118. 439 p.

9. Boyarintsev Yu. E. *Lineynyye i nelineynyye algebro-differentsial'nyye sistemy* [Linear and non-linear algebraic-differential systems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2000 (In Russian).
10. Feng Yu, Yagoubi M. *Robust Control of Linear Descriptor Systems*. Singapore, Springer Publ., 2017.
11. Ilchmann A., Reis T. *Surveys in Differential-Algebraic Equations I-IV* Differential-Algebraic Equations Forum. Berlin; Heidelberg, Springer Publ., 2013–2017.
12. Belov A. A., Kurdyukov A. P. *Deskriptornyye sistemy i zadachi upravleniya* [Descriptor systems and control problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2015. 272 p. (In Russian).
13. Gabasov R., Kirillova F. M., Asmykovich I. K. (comp.). *Deskriptornyye sistemy upravleniya: bibliogr. ukaz.* [Descriptor control systems: bibliographic index]. Minsk, 1988. 38 p. (In Russian).
14. Asmykovich I. K. On the development of a database of publications on descriptor systems [Information technologies: materials of the 84th scientific and technical. conf. faculty, researchers and graduate students (with international participation)]. Minsk, 2020, pp. 139–140 Available at: <https://elib.belstu.by/handle/123456789/3357> (accessed 03.10.2022)
15. Descriptor control systems: bibliographic index / comp. I. K. Asmykovich. Minsk, BGTU, 2022. 343 p. Available at: <https://elib.belstu.by/handle/123456789/49572> (accessed 03.10.2022)
16. Debeljkovic D. Lj., Buzurovic I. M. Lyapunov Stability of Linear Continuous Singular Systems: An Overview. *International Journal of Information & System Science (Canada)*, 2011, vol. 7, no. 2–3, pp. 247–268.

### Информация об авторах

**Асмыкович Иван Кузьмич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [asmik@tut.by](mailto:asmik@tut.by)

**Сидорчик Дмитрий Евгеньевич** – старший преподаватель кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [dmitrysidorhik@gmail.com](mailto:dmitrysidorhik@gmail.com)

**Королёв Артем Андреевич** – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [artem\\_korolev13@mail.ru](mailto:artem_korolev13@mail.ru)

### Information about the authors

**Asmykovich Ivan Kuzmich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [asmik@tut.by](mailto:asmik@tut.by)

**Sidorchik Dmitry Evgenievich** – Senior Lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [dmitrysidorhik@gmail.com](mailto:dmitrysidorhik@gmail.com)

**Korolyov Artyom Andreevich** – Assistant Lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [artem\\_korolev13@mail.ru](mailto:artem_korolev13@mail.ru)

*Поступила после доработки 30.11.2022*

УДК 519.2

**А. М. Волк**

Белорусский государственный технологический университет

**АНАЛИЗ СВОЙСТВ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ  
ОБОБЩЕННОГО ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

Рассмотрено обобщенное гамма-распределение. Данное распределение обобщает распределения класса гамма и имеет широкое применение в статистических методах исследования физических процессов, дистанционном зондировании, теории надежности, при описании дисперсного состава частиц дробления. Исследованы его свойства и найдены числовые характеристики. Методом наибольшего правдоподобия получены уравнения для статистической оценки параметров данного распределения. Для полученных оценок найдена матрица информации Фишера, показана ее знакоположительность, что доказывает их состоятельность, асимптотическую эффективность и единственность.

**Ключевые слова:** обобщенное гамма-распределение, физические процессы, теория надежности, свойства, числовые характеристики, статистическая оценка параметров, метод наибольшего правдоподобия, матрица информации Фишера, асимптотическая эффективность, единственность.

**Для цитирования:** Волк А. М. Анализ свойств статистических оценок параметров обобщенного гамма-распределения // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 10–14. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-2.

**A. M. Volk**

Belarusian State Technological University

**ANALYSIS OF THE PROPERTIES OF STATISTICAL ESTIMATES  
OF PARAMETERS OF THE GENERALIZED GAMMA DISTRIBUTION**

A generalized gamma distribution is considered. This distribution generalizes Gamma class distributions and has wide application in statistical methods of investigation of physical processes, in remote sensing, in reliability theory, in description of disperse composition of crushing particles. Its properties have been investigated and numerical characteristics have been found. Equations for statistical estimation of the parameters of this distribution have been obtained by the method of greatest likelihood method. The Fisher information matrix was found for the obtained estimations, its sign-positivity was shown, which proves their consistency, asymptotically-efficiency and uniqueness.

**Keywords:** generalized Gamma distribution, physical processes, reliability theory, properties, numerical characteristics, statistical estimation of parameters, best likelihood method, Fisher information matrix, asymptotic efficiency, uniqueness.

**For citation:** Volk A. M. Analysis of properties of statistical estimates of parameters of the generalized gamma distribution. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 10–14. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-2 (In Russian).

**Введение.** Обобщенное гамма-распределение, имеющее функцию плотности

$$f(x) = \frac{|c|}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right), \quad (1)$$

было рассмотрено в работе [1]. Данное распределение изучалось ранее и было переоткрыто позднее другими исследователями [2].

Гамма-распределения более полутора столетий используются при моделировании реальных процессов и явлений. Обобщенное гамма-распределение используется в теории надежности, при прогнозировании продолжительности лечения и затрат на медицинское

обслуживание, в расчетах инженерных рисков и рисков катастроф (землетрясений и наводнений), при обработке изображений и дистанционном зондировании, в качестве моделей распределения доходов [3].

Данное распределение включает в себя большинство известных законов: экспоненциальное распределение;  $\chi^2$ -распределение; распределение Эрланга; гамма-распределение; полунормальное распределение, или распределение максимума процесса броуновского движения; распределение Рэлея; распределение Максвелла – Больцмана;  $\chi$ -распределение;  $m$ -распределение Накагами; распределение Вильсона – Хильферти; распределение Вейбулла – Гнеденко; обобщенное распределение Вейбулла;

псевдовайбулловское распределение; распределение Пирсона третьего и пятого типа; распределение Леви; распределение Фреше, а также их обратные и масштабированные аналоги [3, 4].

Популярность рассматриваемого распределения обуславливается как гибкостью и многообразием параметров, так и возможностью использовать его в качестве адекватных асимптотических аппроксимаций во многих предельных схемах [5].

Обобщенное гамма-распределение удобно применять при описании дисперсного состава частиц дробления [6, 7]. При этом сложной остается задача статистической оценки его параметров. Метод моментов [7] не выявляет свойств оценок и не гарантирует их единственность. Автор данной работы независимо от других авторов определился с названием распределения (1), рассмотрел его свойства и предложил статистическую оценку параметров методом максимального правдоподобия [8].

Исследованию свойств и применению обобщенного гамма-распределения посвящено большое количество работ [9]. Тем не менее и в настоящее время актуальной остается задача статистической оценки параметров обобщенного гамма-распределения и исследование их свойств.

**Свойства обобщенного гамма-распределения.** Рассмотрим обобщенное гамма-распределение некоторой случайной величины  $\xi$ , заданное функцией плотности (1).

Отметим, что параметр  $\theta$  является параметром масштаба, а  $b$  и  $c$  есть параметры формы.

Выполним переход к безразмерной случайной величине  $\eta = \xi / \theta$  и получим функцию плотности:

$$f(t) = \frac{|c|}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} t^{b-1} \exp(-t^c). \quad (2)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины  $\eta$

$$F(t) = \frac{|c|}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)^0} \int_0^t \tau^{b-1} \exp(-\tau^c) d\tau \quad (3)$$

сводится к неполной гамма-функции [10].

Если  $c > 0$ , то

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \gamma\left(\frac{b}{c}, t^c\right), \quad (4)$$

а при  $c < 0$

$$F(t) = 1 - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \gamma\left(\frac{b}{c}, t^c\right). \quad (5)$$

Если  $\frac{b-1}{c} > 0$ , то исследуемые распределения имеют моду:

$$\eta_{\text{mod}} = \left(\frac{b-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}, \quad \xi_{\text{mod}} = \theta \eta_{\text{mod}} = \theta \left(\frac{b-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}. \quad (6)$$

Для функции распределения мода будет точкой перегиба. На рис. 1, 2 приведены графики функции плотности и функции распределения случайной величины  $\eta$  для различных значений параметров  $b$  и  $c$ .

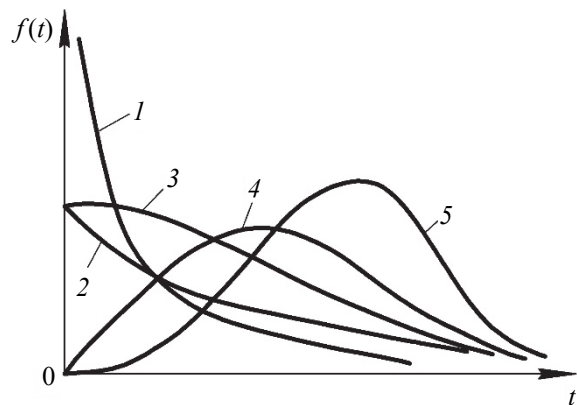


Рис. 1. Функция плотности распределения (2) случайной величины  $\eta$ :

- 1 -  $0 < b < 1, c > 0$  или  $b < 0, c < 0$ ;
- 2 -  $b = 1, 0 < c \leq 1$ ; 3 -  $b = 1, c > 1$ ;
- 4 -  $1 < b \leq 2, c > 0$ ; 5 -  $b > 2, c > 0$

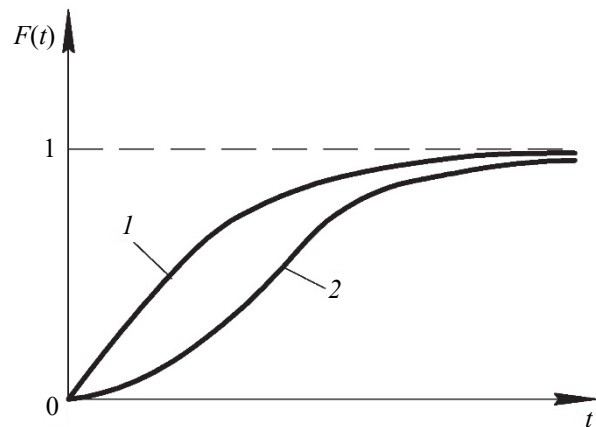


Рис. 2. Функция распределения случайной величины  $\eta$ :

- 1 -  $0 < b \leq 1, c > 0$  или  $b < 0, c < 0$ ; 2 -  $b > 1, c > 0$

Для распределения (1) при  $c > 0$  найдены начальные моменты порядка  $\nu$ , удовлетворяющего условию  $b + \nu > 0$ , причем

$$\alpha_\nu(\eta) = \Gamma\left(\frac{b+\nu}{c}\right) / \Gamma\left(\frac{b}{c}\right); \quad (7)$$

$$\alpha_\nu(\xi) = \theta^\nu \Gamma\left(\frac{b+\nu}{c}\right) / \Gamma\left(\frac{b}{c}\right). \quad (8)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\alpha_v(\xi) &= \frac{c}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^{+\infty} x^v \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\} dx = \\ &= \frac{c\theta^v}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b+v-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\} dx = \\ &= \frac{c\theta^v}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^{+\infty} t^{b+v-1} \exp(-t^c) dt = \theta^v \frac{\Gamma\left(\frac{b+v}{c}\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}.\end{aligned}$$

**Статистическая оценка параметров.** Статистическая оценка параметров распределения может быть выполнена методом моментов, при котором параметры распределения находятся из условия равенства теоретических и статистических моментов. Метод моментов требует решения достаточно сложной системы уравнений, а также проверки соответствия полученной функции статистическим данным с помощью критериев согласия и не гарантирует единственности решения.

Выполним статистическую оценку параметров распределения (1) методом наибольшего правдоподобия [11].

Пусть дана выборка  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  генеральной совокупности случайной величины  $\xi$ , имеющей функцию плотности распределения (1). Рассмотрим функцию правдоподобия:

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{|c|}{\theta \Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{b-1} \exp\left\{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\right\}. \quad (9)$$

Прологарифмируем данную функцию, получим функцию

$$\begin{aligned}L_n = \ln L &= \sum_{i=1}^n \left[ \ln \frac{|c|}{\theta} - \ln \Gamma\left(\frac{b}{c}\right) + (b-1) \ln \frac{x_i}{\theta} - \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \right] = \\ &= n \left[ \ln \frac{|c|}{\theta} - \ln \Gamma\left(\frac{b}{c}\right) + (b-1) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\theta} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \right]\end{aligned}$$

и найдем ее частные производные:

$$\frac{\partial L_n}{\partial \theta} = -\frac{nb}{\theta} + \frac{c}{\theta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c; \quad (10)$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial b} = -\frac{n}{c} \psi\left(\frac{b}{c}\right) + \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\theta}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial c} = \frac{n}{c} + \frac{nb}{c^2} \psi\left(\frac{b}{c}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln \frac{x_i}{\theta}. \quad (12)$$

Применим необходимое условие экстремума функции многих переменных, приравняем найденные частные производные к нулю и получим уравнения правдоподобия для определения статистических оценок параметров распределения:

$$b - \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c = 0; \quad (13)$$

$$\psi\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\theta} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{1}{c} + \frac{b}{c^2} \psi\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln \frac{x_i}{\theta} = 0. \quad (15)$$

Решение уравнений (13)–(15) дает статистическую оценку параметров исследуемого распределения (1).

Оценка наибольшего правдоподобия для параметра масштаба  $\theta$  выражается в явном виде при известных  $b$  и  $c$ :

$$\theta = \left( \frac{c}{nb} \sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{\frac{1}{c}}. \quad (16)$$

Условия существования и свойства статистических оценок определяются выполнением условий регулярности [12], основным из которых является знакоположительность матрицы информации Фишера для параметров  $b$  и  $c$ :

$$I_n(b, c) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L_n}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 L_n}{\partial b \partial c} \\ \frac{\partial^2 L_n}{\partial c \partial b} & \frac{\partial^2 L_n}{\partial c^2} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Вычислим производные второго порядка прологарифмированной функции правдоподобия  $L_n$ , обозначим  $b/c = k$  и получим:

$$\frac{\partial^2 L_n}{\partial b^2} = -\frac{n}{c^2} \psi'\left(\frac{b}{c}\right) = -\frac{n}{c^2} \psi'(k);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b \partial c} = \frac{n}{c^2} \psi\left(\frac{b}{c}\right) + \frac{nb}{c^3} \psi'\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{n}{c^2} [\psi(k) + k\psi'(k)];$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial c \partial b} = \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial c} = \frac{n}{c^2} [\psi(k) + k\psi'(k)];$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial c^2} = -\frac{n}{c^2} - \frac{2nb}{c^3} \psi\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{nb^2}{c^4} \psi'\left(\frac{b}{c}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln^2 \frac{x_i}{\theta} =$$

$$= -\frac{n}{c^2} - \frac{2nk}{c^2} \psi(k) - \frac{nk^2}{c^2} \psi'(k) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln^2 \frac{x_i}{\theta}.$$

Математическое ожидание величин, не зависящих от переменных  $x_i$ , равно этим величинам. Оценки максимального правдоподобия удовлетворяют условиям регулярности. При этих условиях элементы матрицы информации Фишера равны для независимых случайных величин.

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c \ln^2 \frac{x_i}{\theta}\right) &= nE\left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^c \ln^2 \frac{x}{\theta}\right) = \\ &= \frac{nc}{\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\theta}\right)^c \ln^2 \left(\frac{x}{\theta}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^c\right\} d\left(\frac{x}{\theta}\right) = \\ &= \frac{nc}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} t^{c+b-1} \ln^2 t \exp\{-t^c\} dt = |t^c = z| = \\ &= \frac{n}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} z^k \ln^2 z \exp(-z) dz = \frac{n}{\Gamma(k)} \frac{\partial^2 \Gamma(k+1)}{\partial b^2} = \\ &= \frac{n\Gamma''(k+1)}{c^2 \Gamma(k)} = \frac{nk\Gamma''(k+1)}{c^2 \Gamma(k+1)} = \\ &= \frac{nk}{c^2} [\psi'(k+1) + \psi^2(k+1)]. \end{aligned}$$

$$I_n(k, c) = \frac{n}{c^2} \begin{bmatrix} \psi'(k) & -[\psi(k) + k\psi'(k)] \\ -[\psi(k) + k\psi'(k)] & D \end{bmatrix},$$

где  $D = 1 + 2k\psi(k) + k^2\psi'(k) + k[\psi'(k+1) + \psi^2(k+1)]$ .

Рассмотрим матрицу

$$I(k) = \begin{bmatrix} \psi'(k) & -[\psi(k) + k\psi'(k)] \\ -[\psi(k) + k\psi'(k)] & D \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Логарифмическая производная  $\psi(k)$  гамма-функции монотонно возрастает, непрерывна на интервале  $(0, +\infty)$  и принимает значения в пределах  $(-\infty, +\infty)$  [10]. Поэтому  $\psi'(k)$  принимает положительные значения на интервале  $(0; +\infty)$ .

Определитель матрицы (18) в общем виде будет

$$\det I(k) = \psi'(k)D - [\psi'(k+1) + \psi^2(k+1)]^2. \quad (19)$$

График значений определителя матрицы (19),

полученный численными методами (рис. 3), показывает, что он принимает положительные значения при  $k > 0$ .

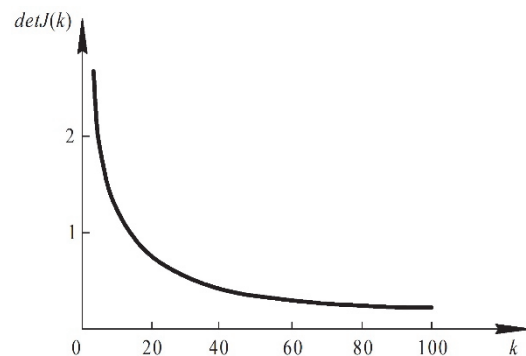


Рис. 3. График значений определителя матрицы (18)

Матрица (18) будет знакоположительной.

Матрица информации Фишера  $I_n(k, c)$  отличается от матрицы (18) на положительный множитель и также будет знакоположительной.

Решение уравнений (13)–(15) дает статистическую оценку параметров распределения (1), для которых будут выполняться условия регулярности.

Данные оценки являются состоятельными, асимптотически-несмещенными, эффективными, асимптотически-нормальными и асимптотически-эффективными [12]. При условии эффективности оценок система (13)–(15) имеет единственное решение [11].

**Закключение.** Исследованное обобщенное гамма-распределение имеет широкую область применения в силу своей универсальности. Но его использование ограничивалось отсутствием способов достоверной оценки параметров на основании статистических данных.

Предложенный метод наибольшего правдоподобия, полученные уравнения (13)–(15), знакоположительность матрицы информации Фишера позволяют получить состоятельные, асимптотически-эффективные статистические оценки параметров распределения, что доказывают их единственность.

### Список литературы

1. Stacy E. W. A generalization of the gamma distribution // Ann. Math. Statistics. 1962. Vol. 33. P. 1187–1192.
2. Кудрявцев А. А. О представлении гамма-экспоненциального и обобщенного отрицательного биномиального распределений // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, вып. 4. С. 76–80.
3. Королев В. Ю., Крылов В. А., Кузьмин В. Ю. Устойчивость конечных смесей обобщенных гамма-распределений относительно возмущений параметров // Информатика и ее применения. 2011. Т. 5, вып. 1. С. 31–38.
4. Кудрявцев А. А. Априорное обобщенное гамма-распределение в байесовских моделях балланса // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, вып. 3. С. 27–33.
5. Закс Л. М., Королев В. Ю. Обобщенные дисперсионные гамма-распределения как предельные для случайных сумм // Информатика и её применения. 2013. Т. 7, вып. 1. С. 105–115.

6. Коузов П. А. Основы анализа дисперсионного состава промышленных пылей и измельченных материалов. Л.: Химия, 1987. 264 с.
7. Левданский Э. И., Волк А. М., Плехов И. М. О законе распределения частиц при дроблении // ТОХТ. 1986. № 5. С. 672–677.
8. Волк А. М. Обобщенное гамма-распределение // Актуальные проблемы информатики: сб. тр. VI Междунар. науч. конф., 26–30 окт. 1998 г. В 3 ч. Ч. 2. Минск: БГУ, 1998. С. 426–432.
9. Джонсон Н. Л., Коц С., Балакришнан Н. Одномерные непрерывные распределения. В 2 ч. Ч. 1. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 703 с.
10. Янке Е., Эмдэ Ф., Леш Ф. Специальные функции: формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 458 с.
11. Крамер Г. Математические методы статистики: Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Мир, 1975. 648 с.
12. Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. 448 с.

### References

1. Stacy E. W. A generalization of the gamma distribution. *Ann. Math. Statistics*, 1962, vol. 33, pp. 1187–1192.
2. Kudryavtsev A. A. On the representation of the gamma exponential and generalized negative binomial distributions. *Informatika i yeye primeneniya* [Computer science and its applications], 2019, vol. 13, issue 4, pp. 76–80 (In Russian).
3. Korolev V. Yu., Krylov V. A., Kuzmin V. Yu. Stability of finite mixtures of generalized gamma distributions with respect to perturbations of parameters. *Informatika i yeye primeneniya* [Computer science and its applications], 2011, vol. 5, issue 1, pp. 31–38 (In Russian).
4. Kudryavtsev A. A. A priori generalized gamma distribution in Bayesian balance models. *Informatika i yeye primeneniya* [Computer science and its applications], 2019, vol. 13, issue 3, pp. 27–33 (In Russian).
5. Zaks L. M., Korolev V. Yu. Generalized dispersion gamma distributions as the limit for random sums. *Informatika i yeye primeneniya* [Computer science and its applications], 2013, vol. 7, issue 1, pp. 105–115 (In Russian).
6. Kouzov P. A. *Osnovy analiza dispersionnogo sostava promyshlennykh pyley i izmel'chennykh materialov* [Principles of analysis of variance and composition of industrial dust from grinding materials]. Leningrad, Khimiya Publ., 1987. 264 p. (In Russian).
7. Levdanskiy E. I., Volk A. M., Plekhov I. M. On the particle distribution law in crushing. *Tekhnicheskiye osnovy khimicheskoy tekhnologii* [Technical Foundations of Chemical Engineering], 1986, no 5, pp. 672–677 (In Russian).
8. Volk A. M. Generalized Gamma-distribution. *Aktual'nyye problemy informatiki: sb. trudov VI Mezhdunoy nauch. konf., 26–30 okt. 1998. V 3 ch. Ch. 2* [Actual problems of informatics: collection of works of the VI International scientific conference 26–30 October 1998. In 3 parts. Part 2]. Minsk, BGU Publ., 1998, pp. 426–432 (In Russian).
9. Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N. *Odnomernyy'e nepreryvny'e raspredeleniya. V 2 ch. Ch. 1* [One-dimensional continuous distributions. In 2 parts. Part 1]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy Publ., 2010. 703 p. (In Russian).
10. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nyye funktsii: Formuly, grafiki, tablitsy* [Special functions: Formulas, graphs, tables]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 458 p. (In Russian).
11. Kramer G. *Matematicheskiye metody statistiki: Osnovy modelirovaniya i pervichnaya obrabotka dannykh* [Mathematical Methods of Statistics: Basics of modeling and primary data processing]. Moscow, Mir Publ., 1975. 648 p. (In Russian).
12. Lehman E. *Teoriya tochechnogo otsenivaniya* [The theory of point estimation]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. Publ., 1991. 448 p. (In Russian).

### Информация об авторе

**Волк Анатолий Матвеевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: volk@belstu.by

### Information about the author

**Volk Anatoliy Matveevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: volk@belstu.by

Поступила после доработки 06.02.2023

УДК 517.977

**А. А. Якименко**

Белорусский государственный технологический университет

**МОДАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ  
ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА**

В публикации рассматривается задача модальной управляемости для двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями. Дается определение задачи модального управления для исследуемой системы. Такая задача решена в случае действительных различных корней одного квадратного уравнения, коэффициенты которого выписываются по параметрам исходной системы. В статье получены регуляторы по типу обратной связи, решающие задачу модального управления, как элементарные функции коэффициентов системы. Приведен пример решения задачи модального управления для рассматриваемой системы.

**Ключевые слова:** запаздывающие системы, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

**Для цитирования:** Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 15–19. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-3.

**A. A. Yakimenka**

Belarusian State Technological University

**MODAL CONTROLLABILITY OF ONE TWO-DIMENSIONAL  
DELAYED SYSTEM**

The publication deals with the problem of modal controllability for a two-dimensional stationary dynamical system with a retarded argument with one input and two commensurate delays. The definition of the modal control problem for the system under study is given. Such a problem is solved in the case of real different roots of one quadratic equation, the coefficients of which are written out according to the parameters of the original system. In the article, feedback controllers are obtained that solve the problem of modal control as elementary functions of the system coefficients. An example of solving the problem of modal control for the system under consideration is given.

**Keywords:** retarded systems, modal control, regulators, feedback control, delay.

**For citation:** Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 15–19. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-3 (In Russian).

**Введение.** Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа [1–9] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. В данной работе решается задача модального управления для двумерной стационарной динамической системы с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями. Получены регуляторы по принципу обратной связи, решающие задачу модального управления.

**Основная часть.** Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 x(t-2h) + bu(t), \quad (1)$$

где  $A_j$ ,  $j = 0, 1, 2$  – постоянные  $(2 \times 2)$ -матрицы;  $h > 0$  – постоянное запаздывание;  $b$  – постоянный 2-вектор;  $u$  – скалярное управление. Не ограничивая общности, можно считать, что  $b' = (0 \ 1)$  (штрих  $(\cdot)'$  означает транспонирование).

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\det[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h}] \equiv \\ \equiv \lambda^2 + (\alpha_{10} + \alpha_{11} e^{-\lambda h} + \alpha_{12} e^{-2\lambda h}) \lambda + \\ + \alpha_{00} + \alpha_{01} e^{-\lambda h} + \alpha_{02} e^{-2\lambda h} + \alpha_{03} e^{-3\lambda h} + \alpha_{04} e^{-4\lambda h}, \quad (2)$$

где  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $e^{-j\lambda h}$  – оператор сдвига ( $e^{-j\lambda h} x(t) \equiv x(t - jh)$ ).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^M q'_{ij} x^{(i)}(t - jh) +$$



$$+ \int_{-h}^0 g'(s)x(t+s)ds, \quad (3)$$

где  $L, M \in \mathbb{N}$ ,  $q_{00}$ ,  $q_{ij}$  – 2-векторы;  $g(s)$ ,  $s \in [-h, 0]$  – непрерывная 2-вектор-функция;

$$x^{(i)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t), \quad x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

В частотной области регулятор (3) имеет вид

$$U(\lambda) = q'_{00} + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^M q'_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} + G(\lambda), \quad (4)$$

где  $G(\lambda)$  – целая функция, определяющая интегральную часть (3).

**Определение.** Система (1) модально управляема регулятором вида (3), если для наперед заданных чисел  $\tilde{\alpha}_{ij}$ ,  $i=0, j=0, 1, 2, 3, 4$ ;  $i=1, j=0, 1, 2$  найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (3) будет иметь вид (ср. с (2))

$$\begin{aligned} \det[\lambda M_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h} - bU(\lambda)] &\equiv \\ &\equiv \lambda^2 + (\tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{12} e^{-2\lambda h})\lambda + \\ &+ \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{02} e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{03} e^{-3\lambda h} + \tilde{\alpha}_{04} e^{-4\lambda h}. \end{aligned}$$

Обозначим  $m = e^{-\lambda h}$  – оператор сдвига,  $A(m) = A_0 + A_1 m + A_2 m^2$ . Пусть матрица  $A(m)$  имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 m & b_0 + b_1 m + m^2 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{21}(m) &= a_{210} + a_{211}m + a_{212}m^2; \\ a_{22}(m) &= a_{220} + a_{221}m + a_{222}m^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Регулятор, решающий задачу модального управления, будем искать в виде

$$U(\lambda, m) = [\eta_1(\lambda, m) \quad \eta_2(\lambda, m)]. \quad (6)$$

Компоненты регулятора (6) разделим на дифференциально-разностную (ей соответствует некоторый квазиполином) и интегральную части:

$$\begin{aligned} \eta_1(\lambda, m) &= \eta_{11}(m) + \eta_{12}(\lambda, m); \\ \eta_2(\lambda, m) &= \eta_{21}(m) + \eta_{22}(\lambda, m), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\eta_{11}(m), \eta_{21}(m)$  – полиномы относительно  $m$ ;  $\eta_{12}(\lambda, m), \eta_{22}(\lambda, m)$  соответствуют интегральной части. Будем искать эти функции в следующем виде:

$$\eta_{12}(\lambda, m) = c_0 \frac{m-k}{\lambda-\xi};$$

$$\eta_{22}(\lambda, m) = (c_1 + c_2 m) \frac{m-k}{\lambda-\xi},$$

где  $k = e^{-\xi h}$ ;  $c_0, c_1, c_2$  – некоторые числа, подлежащие определению. Характеристическое уравнение замкнутой регулятором (6) системы (1) примет вид

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ a_{21}(m) + \eta_{11} + \eta_{12} & a_{22}(m) + \eta_{21} + \eta_{22} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ a_{21}(m) + \eta_{11} & a_{22}(m) + \eta_{21} - \lambda \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ \eta_{12} & \eta_{22} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее слагаемое в (8) имеет вид

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ \eta_{12} & \eta_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ c_0 \frac{m-k}{\lambda-\xi} & (c_1 + c_2 m) \frac{m-k}{\lambda-\xi} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{m-k}{\lambda-\xi} \begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ c_0 & c_1 + c_2 m \end{vmatrix} = \\ &= \frac{m-k}{\lambda-\xi} \left( (a_0 + a_1 m - \lambda)(c_1 + c_2 m) - c_0(b_0 + b_1 m + m^2) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку для модальной управляемости определитель замкнутой системы должен быть квазиполиномом, подберем  $\xi, c_0, c_1, c_2$  таким образом, чтобы выражение (9) представляло собой квазиполином. Выделив в (9) целую часть по переменной  $\lambda$ , получим

$$\begin{aligned} &-(c_1 + c_2 m)(m-k) + \frac{m-k}{\lambda-\xi} \left( (a_1 c_2 - c_0) m^2 + \right. \\ &\left. + (a_0 c_2 + a_1 c_1 - b_1 c_0 - c_2 \xi) m + a_0 c_1 - b_0 c_0 - c_1 \xi \right). \end{aligned}$$

Для того чтобы последнее выражение было квазиполиномом,  $c_0, c_1, c_2$  должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} a_1 c_2 - c_0 = 0, \\ a_0 c_2 + a_1 c_1 - b_1 c_0 - c_2 \xi = 0, \\ a_0 c_1 - b_0 c_0 - c_1 \xi = 0. \end{cases}$$

Перепишем последнюю систему в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & a_1 \\ -b_1 & a_1 & a_0 - \xi \\ -b_0 & a_0 - \xi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Чтобы система (10) имела нетривиальное решение, определитель матрицы системы должен быть равен нулю. Получим следующее уравнение:

$$\xi^2 + (b_1 a_1 - 2a_0)\xi + a_0^2 + b_0 a_1^2 - a_0 a_1 b_1 = 0. \quad (11)$$

Пусть корни уравнения (11) действительны и различны.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a_0 - \frac{a_1 b_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 b_1^2 - 4a_1^2 b_0}}{2}; \\ \xi_2 &= a_0 - \frac{a_1 b_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 b_1^2 - 4a_1^2 b_0}}{2}, \end{aligned} \quad (12)$$

что эквивалентно условию

$$a_1^2 b_1^2 - 4a_1^2 b_0 > 0. \quad (13)$$

Нетрудно проверить, что нетривиальные решения системы (10)  $c_{ij}$ ,  $i=0, 1, 3, j=1, 2$ , соответствующие корням  $\xi_i$  уравнения (11), определенным в (12), имеют вид

$$\begin{aligned} c_{01} &= a_1 t_1, c_{11} = \frac{a_1 b_1 + \sqrt{a_1^2 b_1^2 - 4a_1^2 b_0}}{2a_1} t_1, c_{21} = t_1, t_1 \in \mathbb{R}; \\ c_{02} &= a_1 t_2, c_{12} = \frac{a_1 b_1 - \sqrt{a_1^2 b_1^2 - 4a_1^2 b_0}}{2a_1} t_2, c_{22} = t_2, t_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Обозначим  $k_1 = e^{-\xi_1 h}$ ,  $k_2 = e^{-\xi_2 h}$ . В качестве компоненты  $\eta_{12}(\lambda, m)$  возьмем

$$\eta_{12}(\lambda, m) = a_1 t_1 \frac{m - k_1}{\lambda - \xi_1} + a_1 t_2 \frac{m - k_2}{\lambda - \xi_2}, \quad (14)$$

а в качестве  $\eta_{22}(\lambda, m)$

$$\begin{aligned} \eta_{22}(\lambda, m) &= \left( \frac{a_1 b_1 + \sqrt{a_1^2 b_1^2 - 4a_1^2 b_0}}{2a_1} t_1 + t_1 m \right) \frac{m - k_1}{\lambda - \xi_1} + \\ &+ \left( \frac{a_1 b_1 - \sqrt{a_1^2 b_1^2 - 4a_1^2 b_0}}{2a_1} t_2 + t_2 m \right) \frac{m - k_2}{\lambda - \xi_2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Замкнем систему (1) регулятором

$$\begin{aligned} U(\lambda, m) &= \\ &= [\eta_{11}(\lambda, m) - a_{21}(m) \quad \eta_{22}(\lambda, m) - a_{22}(m)], \end{aligned} \quad (16)$$

где соответствующие компоненты регулятора определены в (14), (15). Определитель замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} &\lambda^2 - (ma_1 + a_0 + \eta_{21}(m))\lambda + a_1 m \eta_{21}(m) - \\ &- b_1 \left( m \eta_{11}(m) + \frac{t_1 + t_2}{2} \right) + a_0 \eta_{21}(m) - b_0 \eta_{11}(m) - \\ &- m \left( m \eta_{11}(m) + t_1 + t_2 \right) - \frac{(t_1 - t_2) \sqrt{a_1^2 (b_1^2 - 4b_0)}}{2a_1}. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\mu_1 = \tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} m + \tilde{\alpha}_{12} m^2, \quad (17)$$

$$\mu_2 = \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01} m + \tilde{\alpha}_{02} m^2 + \tilde{\alpha}_{03} m^3 + \tilde{\alpha}_{04} m^4, \quad (18)$$

где  $\tilde{\alpha}_{ij}$ ,  $i=0, j=0, 1, 3, 4$ ;  $i=1, j=0, 1, 2$  – произвольные числа. Потребуем, чтобы

$$ma_1 + a_0 + \eta_{21}(m) = -\mu_1.$$

Тогда

$$\eta_{21}(m) = -\mu_1 - ma_1 - a_0. \quad (19)$$

Замкнутая регулятором (16) с учетом (19) система (1) имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + \mu_1 \lambda - m^2 (a_1^2 + \eta_{11}(m) + t_1 + t_2) - m (2a_0 a_1 + \\ &+ a_1 \mu_1 + b_1 \eta_{11}(m) + \frac{b_1 (t_1 + t_2)}{2} - k_1 t_1 - k_2 t_2 + \\ &+ \frac{(t_1 - t_2) \sqrt{a_1^2 (b_1^2 - 4b_0)}}{2a_1}) + \frac{b_1 k_1 t_1 + b_1 k_2 t_2}{2} + \\ &+ \frac{(k_1 t_1 - k_2 t_2) \sqrt{a_1^2 (b_1^2 - 4b_0)}}{2a_1} - a_0^2 - a_1 \mu_1 - b_0 \eta_{11}(m). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$a_1^2 + \eta_{11}(m) + t_1 + t_2 = 0.$$

Отсюда

$$\eta_{11}(m) = -t_1 - t_2 - a_1^2. \quad (20)$$

Замкнутая регулятором (16) с учетом (19), (20) система (1) имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + \mu_1 \lambda - m (-b_1 a_1^2 + a_1 (\mu_1 + 2a_0) - k_1 t_1 - k_2 t_2 - \\ &- \frac{(t_1 + t_2) b_1}{2} + \frac{(t_2 - t_1) \sqrt{a_1^2 (b_1^2 - 4b_0)}}{2a_1}) + \end{aligned}$$

$$+b_1 a_1^2 - a_0^2 - a_0 \mu_1 + b_0 (t_1 - t_2) + \frac{b_1 (k_1 t_1 + k_2 t_2)}{2} - \frac{(k_2 t_2 - k_1 t_1) \sqrt{a_1^2 (b_1^2 - 4b_0)}}{2a_1} = 0.$$

Потребуем, чтобы коэффициент при  $m$  в последнем соотношении был равен нулю. Выразив отсюда  $t_1$ , получим

$$t_1 = \frac{-t_2 \sqrt{b_1^2 - 4b_0} - 2a_1^2 b_1 + (4a_0 + 2\mu_1) a_1 - t_2 (b_1 + 2k_2)}{-\sqrt{b_1^2 - 4b_0} + b_1 + 2k_1}. \quad (21)$$

Потребуем теперь, чтобы

$$+b_1 a_1^2 - a_0^2 - a_0 \mu_1 + b_0 (t_1 - t_2) + \frac{b_1 (k_1 t_1 + k_2 t_2)}{2} - \frac{(k_2 t_2 - k_1 t_1) \sqrt{a_1^2 (b_1^2 - 4b_0)}}{2a_1} = \mu_2.$$

Выразив отсюда  $t_2$ , с учетом (21), получим

$$t_2 = 1 / \left( \left( (-b_1 - 2k_2) k_1 - k_2 b_1 - 2b_0 \right) \sqrt{b_1^2 - 4b_0} + 4(k_1 - k_2) \left( -\frac{b_1^2}{4} + b_0 \right) \right) \left( \left( a_1^2 b_0 - a_0^2 - \mu_1 a_0 - \mu_2 - 2a_1 \left( -\frac{a_1 b_1}{2} + a_0 + \frac{\mu_1}{2} \right) k_1 \right) \sqrt{b_1^2 - 4b_0} + \left( a_1^2 b_1^2 - 2a_1 \left( a_0 + \frac{\mu_1}{2} \right) b_1 - 2a_1^2 b_0 + 2a_0^2 + 2\mu_1 a_0 + 2\mu_2 \right) k_1 + \left( a_1^2 b_0 + a_0^2 + \mu_1 a_0 + \mu_2 \right) b_1 - 4a_1 \left( a_0 + \frac{\mu_1}{2} \right) b_0 \right). \quad (22)$$

Замкнутая регулятором (16) с учетом (19), (20), (21), (22) система (1) имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 = 0,$$

что, с учетом (17), (18), свидетельствует о решении задачи модального управления. Из (21) и (22) следует, что регуляторы, решающие задачу модального управления, могут быть построены при выполнении следующих условий:

$$-\sqrt{b_1^2 - 4b_0} + b_1 + 2k_1 \neq 0; \\ ((-b_1 - 2k_2) k_1 - k_2 b_1 - 2b_0) \sqrt{b_1^2 - 4b_0} +$$

$$+4(k_1 - k_2) \left( -\frac{b_1^2}{4} + b_0 \right) \neq 0.$$

**Пример.** Рассмотрим систему (1) с матрицами

$$A_0 = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица  $A(m)$  имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} 3-m & -8+2m+m^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система (10) записывается в виде

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \xi-3 \\ -8 & \xi-3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Уравнение (11) примет вид

$$\xi^2 - 8\xi + 7 = 0,$$

корни которого  $\xi_1 = 1, \xi_2 = 7$ .

Нетривиальные решения системы (23), соответствующие корню  $\xi_1 = 1$ :  $c_{10} = -t_1, c_{11} = 4t_1, c_{12} = t_1$ , а корню  $\xi_2 = 7$ :  $c_{20} = -t_2, c_{21} = -2t_2, c_{22} = t_2$ .

Выполнив все вычисления, заключим, что компоненты регулятора, решающего задачу модального управления, имеют вид

$$\eta_{11}(m) = \frac{4 \frac{7\mu_1 + \mu_2 + 49}{-6k_2 - 24} + \mu_1 + k_2 \frac{7\mu_1 + \mu_2 + 49}{-6k_2 - 24} + 8}{k_1 - 2} -$$

$$-\frac{7\mu_1 + \mu_2 + 49}{-6k_2 - 24} - 1;$$

$$\eta_{21}(m) = m - \mu_1 - 3;$$

$$\eta_{12}(\lambda, m) = \frac{m - k_1}{\lambda - 1} \times$$

$$\times \left( 4 \frac{7\mu_1 + \mu_2 + 49}{-6k_2 - 24} + \mu_1 + k_2 \frac{7\mu_1 + \mu_2 + 49}{-6k_2 - 24} + 8 \right) +$$

$$\frac{7\mu_1 + \mu_2 + 49}{-6k_2 - 24} + \frac{m - k_2}{\lambda - 7} \frac{-6k_2 - 24}{k_1 - 2};$$

$$\eta_{22}(\lambda, m) = \frac{m - k_1}{\lambda - 1} \times$$

$$\times \left( 4 \frac{7\mu_1 + \mu_2 + 49}{-6k_2 - 24} + \mu_1 + k_2 \frac{7\mu_1 + \mu_2 + 49}{-6k_2 - 24} + 8 +$$

$$+m \left( 4 \frac{7\mu_1 + \mu_2 + 49}{-6k_2 - 24} + \mu_1 + k_2 \frac{7\mu_1 + \mu_2 + 49}{-6k_2 - 24} \right) + \\ + \frac{m - k_2}{\lambda - 7} \left( -2 \frac{7\mu_1 + \mu_2 + 49}{-6k_2 - 24} + m \frac{7\mu_1 + \mu_2 + 49}{-6k_2 - 24} \right).$$

Нетрудно убедиться, что  $k_1 - 2 \neq 0$  и  $-6k_2 - 24 \neq 0$ .

**Заключение.** В статье получен способ нахождения регуляторов по принципу обратной связи, решающих задачу модального управления для двумерной системы запаздывающего типа с двумя соизмеримыми запаздываниями и одним входом. Указаны дополнительные условия существования таких регуляторов. Также рассмотрен иллюстративный пример

### Список литературы

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.
2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London: Pitman Press, 1984. 362 p.
3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1967. Vol. AC-12, no. 6. P. 660–665.
4. Кириллова Ф. М., Марченко В. М. Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздывающим аргументом. Минск, 1978. 28 с. (Препринт / Акад. наук Белорус. Сов. Социалист. Респ. № 7 (39)).
5. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circuits Systems Signal Process. 1986. Vol. 5, no. 1. P. 69–84.
6. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.
7. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.
8. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 25–27.
9. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1 (206). С. 5–8.

### References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).
2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London, Pitman Press Publ., 1984. 362 p.
3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1967, vol. AC-12, no. 6, pp. 660–665.
4. Kirillova F. M., Marchenko V. M. *Funktsional'nyye preobrazovaniyya i nekotoryye kanonicheskiye formy v lineynykh sistemakh s zapazdyvayushchim argumentom* [Functional transforms and some canonical forms for linear retarded systems]. Minsk, 1978. 28 p. Preprint Institute of mathematics AS BSSR, no. 7 (39) (In Russian).
5. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems. *Circuits Systems Signal Process*, 1986, vol. 5, no. 1, pp. 69–84.
6. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–7 (In Russian).
7. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).
8. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 25–27 (In Russian).
9. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).

### Информация об авторе

**Якименко Андрей Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

### Information about the author

**Yakimenka Andrei Aliksandravich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила после доработки 30.11.2022

УДК 514.76

**Н. П. Можей**

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

**СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ,  
НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ**

В работе рассматриваются трехмерные симметрические однородные пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований с неразрешимым стабилизатором. Цель работы – описание всех таких пространств, не допускающих инвариантных эквиаффинных связностей. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, симметрическое пространство, каноническое разложение, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквиаффинная связность. В основной части работы для трехмерных симметрических однородных пространств неразрешимых групп Ли определено, при каких условиях пространство не допускает эквиаффинных связностей. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах. Исследования основаны на применении свойств однородных пространств и структур на них и носят в основном локальный характер. Особенностью представленных методов является использование чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и связностей на них.

**Ключевые слова:** эквиаффинная связность, группа преобразований, симметрическое пространство, тензор кручения.

**Для цитирования:** Можей Н. П. Симметрические пространства неразрешимых групп Ли, не допускающие эквиаффинных связностей // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 20–23. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-4.

**N. P. Mozhey**

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**SYMMETRIC SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS THAT DO NOT ADMIT  
EQUIAFFINE CONNECTIONS**

The paper considers three-dimensional symmetric homogeneous spaces on which an unsolvable group of transformations with an unsolvable stabilizer acts. The purpose of this work is to describe all such spaces that do not admit invariant equiaffine connections. The basic notions, such as isotropically-faithful pair, symmetric space, canonical decomposition, affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, equiaffine connection are defined. In the main part of the work for three-dimensional symmetric homogeneous spaces of unsolvable Lie groups, it is determined under what conditions the space does not admit equiaffine connections. The results can be used in the study of manifolds, as well as have applications in various fields of mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are connected with the study of in-variant objects on homogeneous spaces. Studies are based on the application of properties of the homogeneous spaces and structures on them and they mainly have local character. The peculiarity of presented techniques is the use of purely algebraic approach to the description of manifolds and connections on them.

**Keywords:** equiaffine connection, transformation group, symmetric space, torsion tensor.

**For citation:** Mozhey N. P. Symmetric spaces of unsolvable Lie groups that do not admit equiaffine connections. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 20–23. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-4 (In Russian).

**Введение.** Цель работы – описать трехмерные симметрические однородные пространства, не допускающие эквиаффинных связностей. Симметрическое пространство – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении (см. [1]). Геодезическая симметрия относительно любой точки такого пространства есть автоморфизм, причем аффинная

связность переходит в себя. Примерами симметрических пространств могут служить пространства постоянной кривизны, классические области в комплексном аффинном пространстве и т. д. Симметрические римановы пространства впервые исследовал П. А. Широков [2]. Трехмерные симметрические однородные пространства с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором изучались

в работе [3], разумеется, такое пространство всегда допускает аффинную связность. Аффинная связность является эквиваффинной, если позволяет параллельную форму объема (см. [4]). В данной работе определено, при каких условиях указанные пространства не допускают эквиваффинных связностей.

**Основная часть.** Пусть  $M$  – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа  $\bar{G}$ ,  $G = \bar{G}_x$  – стабилизатор произвольной точки  $x \in M$ . Проблема классификации однородных пространств  $(M, \bar{G})$  равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли  $(\bar{G}, G)$ . Пусть  $\bar{\mathfrak{g}}$  – алгебра Ли группы Ли  $\bar{G}$ , а  $\mathfrak{g}$  – подалгебра, соответствующая подгруппе  $G$ . Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление  $\mathfrak{g}$ . *Симметрическое* пространство есть тройка  $(\bar{G}, G, \sigma)$ , где  $\sigma$  – инволютивный автоморфизм, такой, что  $\sigma(\mathfrak{g}) = s_o \mathfrak{g} s_o^{-1}$ ,  $\mathfrak{g} \in \bar{G}$ ,  $s_o$  – симметрия  $M$ ,  $o$  – неподвижная точка  $s_o$ . Поскольку  $M = \bar{G}/G$  редуктивно (а  $\bar{G}$  транзитивна), все симметрические пространства являются изотропно-точными. Поскольку  $\sigma$  инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и  $-1$ , а  $\mathfrak{g}$  – собственное подпространство для 1. Если  $\mathfrak{m}$  – собственное подпространство для  $-1$ , то разложение  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$  называется *каноническим разложением* для симметрической алгебры Ли  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ , причем  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ ,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ ,  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$ . Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к  $\mathfrak{g}$  в  $\bar{\mathfrak{g}}$ , и факторпространство  $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ . *Аффинной связностью* на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется отображение  $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ , такое, что его ограничение на  $\mathfrak{g}$  есть изотропное представление подалгебры  $\mathfrak{g}$ , а все отображение является  $\mathfrak{g}$ -инвариантным, инвариантные аффинные связности на  $(M, \bar{G})$  находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [5]) со связностями на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ . Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для  $\bar{G}$  должно быть точным, если  $G$  эффективна на  $\bar{G}/G$  [6], соответственно, симметрическое пространство всегда допускает аффинную связность. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли  $G$ , то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия.

Тензоры кручения  $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$  и кривизны  $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$  имеют вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m;$$

$$R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ . Будем говорить, что  $\Lambda$  имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если  $T = 0$ . Определим тензор Риччи  $Ric \in \text{Inv}T_2(\mathfrak{m}): Ric(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$ . Будем говорить, что аффинная связность  $\Lambda$  является *локально эквиваффинной*, если  $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$  для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$  (то есть  $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$ ). Аффинная связность  $\Lambda$  с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиваффинна [4].

Под *эквиваффинной* связностью будем понимать аффинную связность  $\Lambda$  (без кручения), для которой  $\text{tr}\Lambda(x) = 0$  для всех  $x \in \bar{\mathfrak{g}}$ . В этом случае очевидно, что  $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$ .

Будем описывать пару  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  при помощи таблицы умножения алгебры  $\bar{\mathfrak{g}}$ . Через  $\{e_1, \dots, e_n, u_1, u_2, u_3\}$  обозначим базис  $\bar{\mathfrak{g}}$  ( $n = \dim \mathfrak{g}$ ), причем алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  порождается  $e_1, \dots, e_n$ , а  $\{u_1, u_2, u_3\}$  – базис  $\mathfrak{m}$ . Для нумерации подалгебр используем запись  $d.n$ , а для нумерации пар – запись  $d.n.m$ , соответствующие приведенным в источнике [3], здесь  $d$  – размерность подалгебры,  $n$  – номер подалгебры в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , а  $m$  – номер пары  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ . Поскольку ограничение  $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$  на  $\mathfrak{g}$  – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на  $\mathfrak{m}$ . Выпишем ее через образы базисных векторов  $\Lambda(u_1)$ ,  $\Lambda(u_2)$ ,  $\Lambda(u_3)$ , запишем тензор кривизны  $R$  его значениями  $R(u_1, u_2)$ ,  $R(u_1, u_3)$ ,  $R(u_2, u_3)$ , а тензор кручения  $T$  – его значениями  $T(u_1, u_2)$ ,  $T(u_1, u_3)$ ,  $T(u_2, u_3)$ . Будем говорить, что связность *нулевая*, если  $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$ . Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал  $\mathfrak{a}$  в алгебре Ли  $\bar{\mathfrak{g}}$  такой, что  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$ . Тривиальную пару типа  $d.n$  обозначаем  $d.n.1$ .

**Теорема. А)** Любое трехмерное симметрическое тривиальное однородное пространство  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  такое, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  и  $\mathfrak{g}$  неразрешимы, не допускающее эквиваффинных связностей, локально имеет вид  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$ , где  $\mathfrak{g}$  (подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ ) сопряжена только одной из следующих подалгебр:

$$4.1. \begin{bmatrix} x & z \\ u & y \end{bmatrix}; 4.2. \begin{bmatrix} \lambda x + y & z \\ u & \lambda x - y \\ & & x \end{bmatrix}, \lambda \neq -1/2;$$

$$4.3. \begin{bmatrix} x+y & z \\ u & x & z \\ & & u & x-y \end{bmatrix}; 4.5. \begin{bmatrix} x & z & y \\ -z & x & u \\ -y & -u & x \end{bmatrix};$$

$$5.1. \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \\ & & z \end{bmatrix}; 6.1. \begin{bmatrix} x & z & w \\ u & y & v \end{bmatrix};$$

$$6.2. \begin{bmatrix} \lambda x + y & z & w \\ u & \lambda x - y & v \\ & & x \end{bmatrix}, \lambda \neq -1/2;$$

$$6.3. \begin{bmatrix} v & w \\ x & z \\ y & u \end{bmatrix}; 6.4. \begin{bmatrix} x & v & w \\ \lambda x + y & z \\ & & u & \lambda x - y \end{bmatrix}, \lambda \neq -1/2;$$

$$7.1. \begin{bmatrix} x & u & t \\ v & y & w \\ & & z \end{bmatrix}; 7.2. \begin{bmatrix} x & w & t \\ & y & u \\ & & v & z \end{bmatrix}.$$

Также при  $\dim \mathfrak{g} = 9$  подалгебра  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ .

Б) Любое трехмерное симметрическое не-тривиальное однородное пространство  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  такое, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  и  $\mathfrak{g}$  неразрешимы, не допускающее эквиаффинных связностей, локально эквивалентно одному и только одному из следующих пространств:

6.1.2.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	$e_5$	$-e_6$	$u_1$	$-u_2$	0
$e_2$	$-2e_2$	0	$e_1$	0	0	$e_5$	0	$u_1$	0
$e_3$	$2e_3$	$-e_1$	0	0	$e_6$	0	$u_2$	0	0
$e_4$	0	0	0	0	$e_5$	$e_6$	$u_1$	$u_2$	0
$e_5$	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	$u_1$
$e_6$	$e_6$	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	$u_2$
$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$e_5$
$u_2$	$u_2$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$e_6$
$u_3$	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_5$	$-e_6$	0

6.1.3.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	$e_5$	$-e_6$	$u_1$	$-u_2$	0
$e_2$	$-2e_2$	0	$e_1$	0	0	$e_5$	0	$u_1$	0
$e_3$	$2e_3$	$-e_1$	0	0	$e_6$	0	$u_2$	0	0
$e_4$	0	0	0	0	$e_5$	$e_6$	$u_1$	$u_2$	0
$e_5$	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	$u_1$
$e_6$	$e_6$	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	$u_2$
$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_5$
$u_2$	$u_2$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_6$
$u_3$	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$e_5$	$e_6$	0

Здесь подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметра  $\lambda$  не сопряжены друг другу; если на параметры не накладываются дополнительные условия, то

предполагается, что они пробегают все  $\mathbb{R}$ , также предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат  $\mathbb{R}$ . Базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

В работе [3] приведен список трехмерных симметрических однородных пространств, таких, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  и  $\mathfrak{g}$  неразрешимы, соответственно, для доказательства этой теоремы достаточно выбрать из них пары, не допускающее эквиаффинных связностей.

Рассмотрим, например,  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  – трехмерное симметрическое однородное пространство 6.1.1 (или 6.1.2, 6.1.3), тогда инвариантная аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее  $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

В случае 6.1.2 тензор кривизны примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

А в случае 6.1.3 – вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения –

$$(0, 0, 0), (-p_{1,3} + r_{1,1}, 0, 0), (0, -p_{1,3} + r_{1,1}, 0).$$

Алгебра голономии инвариантной связности на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  – это подалгебра алгебры  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  вида  $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$ , где  $V$  – подпространство, порожденное множеством  $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ . Алгебры голономии указанных связностей в случаях 6.1.2 при  $p_{1,3}^2 \neq 1$  (при  $p_{1,3}^2 = 1$  алгебра голономии нулевая) и 6.1.3 имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если  $T = 0$  ( $\Lambda$  является связностью без кручения), то  $r_{1,1} = p_{1,3}$ . Имеем  $\text{tr} \Lambda([x, y]) = 0$  для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ , тензор Риччи является симметрическим, то есть связность вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3} \end{pmatrix}$$

является локально эквиваффинной. Однако, поскольку  $\text{tr}\Lambda(e_4) \neq 0$ , то есть  $\Lambda(\mathfrak{g}) \notin \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$ , связность не является эквиваффинной.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. В случаях 4.2.1, 4.3.1, 4.5.1, 5.1.1, 6.2.1, 6.3.1, 6.4.1, 7.1.1, 7.2.1, 9.1.1 локально эквиваффинная связность (без кручения) тривиальная, а в случае 4.1.1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Соответственно, в случаях 4.2.1 ( $\lambda = -1/2$ ), 6.2.1 ( $\lambda = -1/2$ ), 6.4.1 ( $\lambda = -1/2$ ) эквиваффинная связность тривиальная, в остальных случаях, приведенных в теореме, пространство не допускает эквиваффинных связностей, поскольку даже  $\Lambda(\mathfrak{g}) \notin \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$ .

**Заключение.** Таким образом, для всех трехмерных симметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором определено, при каких условиях пространство не допускает эквиваффинных связностей. Полученные результаты могут найти приложение в общей теории относительности (которая с математической точки зрения базируется на геометрии искривленных пространств), в ядерной физике и физике элементарных частиц, а также при конструировании математических моделей реальных процессов.

### Список литературы

1. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Моск. ун-т, 1960. 307 с.
2. Широков П. А. Симметрические пространства первого класса // Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. С. 366–383.
3. Можей Н. П. Симметрические однородные пространства неразрешимых групп Ли и связности на них // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. 2018. № 2 (52). С. 15–23.
4. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. 263 p.
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Journ. Math. 1954. Vol. 76, no. 1. P. 33–65.
6. Kobayashi S. Transformation groups in differential geometry. Berlin; Heidelberg; New York: Springer: Verlag, 1972. 182 p.

### References

1. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere* [Riemannian geometry in an orthogonal frame]. Moscow, Moskovskiy universitet Publ., 1960. 307 p. (In Russian).
2. Shirokov P.A. Symmetric spaces of the first class. *Izbrannyye raboty po geometrii* [Selected works on geometry]. Kazan, Kazanskiy universitet Publ., 1966, pp. 366–383 (In Russian).
3. Mozhey N. P. Symmetric homogeneous spaces of unsolvable Lie groups and connections on them. [Bulletin of the Mogilev State University named A. A. Kuleshov], series B, Natural sciences: mathematics, physics, biology, 2018, no. 2 (52), pp. 15–23 (In Russian).
4. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge, Cambridge Univ. Press Publ., 1994. 263 p.
5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. Journ. Math.*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65.
6. Kobayashi S. Transformation groups in differential geometry. Berlin; Heidelberg; New York, Springer: Verlag Publ., 1972. 182 p.

### Информация об авторе

**Можей Наталья Павловна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

### Information about the author

**Mozhey Natalya Pavlovna** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 27.12.2022



# МЕХАНИКА MECHANICS

---

УДК 531.19

**Р. Н. Ласовский, Э. Э. Бильданов, Д. В. Гапанюк**  
Белорусский государственный технологический университет

## РЕЛАКСАЦИЯ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА В РЕШЕТОЧНЫХ СИСТЕМАХ С ОТТАЛКИВАНИЕМ БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ

Исследована двумерная решеточная модель с отталкиванием ближайших соседей. В данной модели с помощью численного решения уравнения баланса числа частиц по алгоритму Эйлера и компьютерного моделирования по методу Монте-Карло изучено пространственное распределение параметра порядка. Параметр порядка определялся в упорядоченной и неупорядоченной фазах при начальном распределении концентрации на подрешетках, не соответствующем равновесному. Показано появление релаксационных областей (слоев со значением параметра порядка, отличным от равновесного), ширина которых растет вместе со средней концентрацией в системе, что может быть обусловлено увеличением корреляционных эффектов. Сравнение результатов численного решения уравнения баланса числа частиц и результатов моделирования по методу Монте-Карло выявило заметное отличие ширины указанных областей.

**Ключевые слова:** решеточная система, химический потенциал, отталкивание ближайших соседей, метод Монте-Карло, параметр порядка.

**Для цитирования:** Ласовский Р. Н., Бильданов Э. Э., Гапанюк Д. В. Релаксация параметра порядка в решеточных системах с отталкиванием ближайших соседей // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 24–28. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-5.

**R. N. Lasovsky, E. E. Bildanau, D. V. Gapanjuk**  
Belarusian State Technological University

## RELAXATION OF THE ORDER PARAMETER IN LATTICE SYSTEMS WITH NEAREST NEIGHBOR REPULSION

A two-dimensional lattice model with repulsion of nearest neighbors is studied. In this model, using the numerical solution of the balance equation for the number of particles by the Euler algorithm and computer simulation by the Monte Carlo method, the spatial distribution of the order parameter was studied. The order parameter was determined in the ordered and disordered phases at an initial concentration distribution on the sublattices that did not correspond to the equilibrium one. The appearance of relaxation regions (layers with a value of the order parameter different from the equilibrium value) is shown. The width of these regions increases with the average concentration in the system, which may be due to an increase in correlation effects. Comparison of the results of the numerical solution of the equation for the balance of the number of particles and the results of simulation by the Monte Carlo method revealed a noticeable difference in the widths of these regions.

**Keywords:** lattice system, chemical potential, nearest neighbor repulsion, Monte-Carlo method, order parameter.

**For citation:** Lasovsky R. N., Bildanau E. E., Gapanjuk D. V. Relaxation of the order parameter in lattice systems with nearest neighbor repulsion. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 24–28. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-5 (In Russian).

**Введение.** При помощи решеточных систем взаимодействующих частиц можно моделировать многие физико-химические, механические, информационные процессы и явления. В частности, при наличии притяжения между подвиж-

ными частицами (атомами или молекулами) в решеточной системе возникает фазовый переход первого рода, при котором система расслаивается на две фазы – решеточный газ и решеточную жидкость [1, 2]. Равновесные свойства

и диффузионные характеристики решеточных систем при учете взаимодействия между ближайшими соседями были достаточно подробно изучены с помощью компьютерного моделирования и статистико-механических методов [2, 3]. При некоторых условиях, в частности, при отталкивании между частицами, в решеточном флюиде наблюдается фазовый переход второго рода типа порядок – беспорядок [4], и система «расслаивается» на две подрешетки (рис. 1).

Прямое моделирование методом Монте-Карло показывает, что такое расслоение обеспечивается при учете короткодействующего отталкивательного взаимодействия между ближайшими соседями при температурах ниже критической и соответствующих плотностях [2, 3].

С энергетической точки зрения понятно, что минимальной (нулевой) энергии взаимодействия частиц системы при половинном заполнении решетки соответствует (в двумерном случае) их распределение по узлам в шахматном порядке. С более общих позиций известно, что радиус статистических корреляций превышает радиус межчастичных взаимодействий, что может приводить при определенных условиях к образованию дальнего порядка и фазовым переходам второго рода даже в случае короткодействующих взаимодействий вследствие эстафетного механизма передачи корреляций.

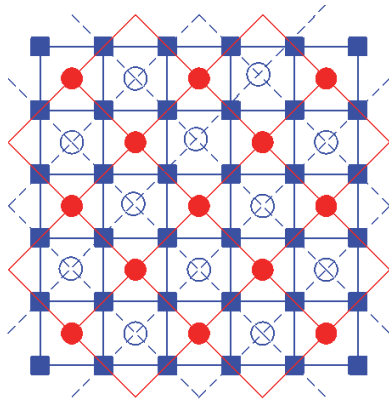


Рис. 1. Разделение решетки на систему из двух подрешеток. Квадраты соответствуют атомам кристаллической подложки, светлые и темные круги – узлам подрешеток  $a$  и  $b$ . Упорядоченная фаза соответствует случаю, когда концентрация на подрешетках неодинаковая

Фазовые переходы второго рода при отталкивании ближайших соседей на квадратной решетке воспроизведены в квазихимическом приближении в монографии [2]. В работе [5] было исследована временная релаксация параметра порядка в решеточных системах с отталкиванием ближайших соседей. При этом распределение концентрации частиц в этих системах было одинаковым во всех слоях.

В данной работе исследуется пространственная релаксация параметра порядка в сильно неравновесной решеточной системе.

**Исследование параметра порядка с помощью уравнения баланса числа частиц.** Как было показано в работе [5], скорость изменения средней плотности  $\rho_i^\alpha$  ( $\alpha = a, b$ ) частиц в  $i$ -м узле решеточной модели определяется уравнением баланса числа частиц:

$$\frac{\partial \rho_i^\alpha}{\partial t} = \sum_{j=1}^z I_{ji}^{\bar{\alpha}\alpha}, \quad (1)$$

где  $I_{ji}^{\bar{\alpha}\alpha}$  – средний поток частиц из оккупированного узла с радиус-вектором  $\mathbf{r}_j^{\bar{\alpha}}$  в соседний свободный узел с радиус-вектором  $\mathbf{r}_i^\alpha$  через общую границу их ячеек. Черта над греческим индексом используется для обозначения сопряженной подрешетки: если  $\alpha = a$ , то  $\bar{\alpha} = b$ , если  $\alpha = b$ , то  $\bar{\alpha} = a$ .

$$I_{ji}^{\bar{\alpha}\alpha} = (U_j^{\bar{\alpha}} - U_i^\alpha) F(0_j^{\bar{\alpha}}, 0_i^\alpha). \quad (2)$$

Здесь  $F(0_i^\alpha, 0_j^{\bar{\alpha}})$  – неравновесная функция распределения вакансий, равная вероятности двум узлам  $i$  и  $j$  быть не занятыми частицами;

$$U_i^\alpha = w_0 e^{\beta \mu_i^\alpha}, \quad (3)$$

$w_0$  – характерная частота колебаний частиц вблизи решеточных узлов;  $\beta = (k_B T)^{-1}$  – обратная температура;  $\mu_i^\alpha$  – значения неравновесных химических потенциалов.

Величины, определяющие потоки (2), находятся с помощью выражений [5], в которых приняты обозначения  $\rho_i^\alpha = \rho_{i_i}^\alpha$  и  $\rho_{0_i}^\alpha = 1 - \rho_{i_i}^\alpha$ :

$$e^{\beta \mu_i^\alpha} = \left( \rho_{i_i}^\alpha / \rho_{0_i}^\alpha \right) / \prod_{j \neq i} \zeta_{ji}^{\bar{\alpha}\alpha}; \quad (4)$$

$$F(n_i^\alpha, n_j^{\bar{\alpha}}) = \frac{W_{(n_i, n_j)}^{\alpha \bar{\alpha}} \rho_{n_i}^\alpha \rho_{n_j}^{\bar{\alpha}} M_{n_i}^\alpha M_{n_j}^{\bar{\alpha}}}{\eta_{ji}^{\bar{\alpha}\alpha}(n_i) \eta_{ij}^{\alpha\bar{\alpha}}(n_j) K_{ji}^{\bar{\alpha}\alpha}}; \quad (5)$$

$$W_{(n_i, n_j)}^{\alpha \bar{\alpha}} = \exp(-\beta J n_i^\alpha n_j^{\bar{\alpha}}); \quad (6)$$

$$M_{n_i}^\alpha = e^{\beta \mu_i^\alpha n_i}, \quad K_{ij}^{\alpha \bar{\alpha}} = \chi_j^{\bar{\alpha}}(0_i^\alpha) \chi_i^\alpha(0_j^{\bar{\alpha}}); \quad (7)$$

$$\chi_j^{\bar{\alpha}}(n_i^\alpha) = e^{-\beta \phi_j^{\bar{\alpha}}(n_i^\alpha)}; \quad (8)$$

$$\eta_{ji}^{\bar{\alpha}\alpha}(0_i) = 1, \quad \eta_{ji}^{\bar{\alpha}\alpha}(1_i) = \zeta_{ji}^{\bar{\alpha}\alpha}, \quad (9)$$

где  $\phi_j^{\bar{\alpha}}(n_i^\alpha)$  – средний потенциал частицы, фиксированной в узле  $i$  подрешетки  $\alpha$  в поле частицы, расположенной в узле  $j$  подрешетки  $\bar{\alpha}$ ;  $n_i$  – числа заполнения ( $n_i = 1$ , если узел  $i$  занят частицей, и  $n_i = 0$ , если он вакантен);  $J$  – энергия взаимодействия частиц, расположенных в двух

соседних узлах, принадлежащих разным подрешеткам; функции  $\zeta_{ji}^{\alpha\alpha}$  и  $\zeta_{ij}^{\alpha\bar{\alpha}}$  находятся как положительные корни системы квадратных уравнений:

$$\rho_{0_i}^{\alpha} (\zeta_{ji}^{\alpha\bar{\alpha}})^2 + \zeta_{ji}^{\alpha\bar{\alpha}} (\rho_{1_j}^{\alpha} - \rho_{0_j}^{\bar{\alpha}} - W(\rho_{1_j}^{\bar{\alpha}} - \rho_{1_i}^{\alpha})) - W\rho_{1_i}^{\alpha} = 0; \quad (10)$$

$$\rho_{0_j}^{\bar{\alpha}} (\zeta_{ij}^{\alpha\bar{\alpha}})^2 + \zeta_{ij}^{\alpha\bar{\alpha}} (\rho_{1_j}^{\bar{\alpha}} - \rho_{0_i}^{\alpha} - W(\rho_{1_i}^{\alpha} - \rho_{1_j}^{\bar{\alpha}})) - W\rho_{1_j}^{\bar{\alpha}} = 0, \quad (11)$$

где  $W = \exp(-\beta J)$ .

Для исследования параметра порядка в решеточной системе, определяемого выражением  $\delta\rho_i = (\rho_i^a - \rho_i^b) / 2$ , задавалось начальное распределение концентрации на подрешетках. Далее с использованием формул (4)–(11) вычислялись потоки (2). Затем с помощью алгоритма Эйлера численно интегрировалось уравнение (1), что позволило найти изменения плотностей в каждом узле подрешеток  $a$  и  $b$  исходной решетки. При этом шаг интегрирования по времени  $\Delta t$  выбирался так, чтобы обеспечить сходимость решения и его точность ( $\Delta t = 10^{-4}$ ).

#### Моделирование по методу Монте-Карло.

Для моделирования рассматриваемой системы по методу Монте-Карло (МКМ) с помощью генератора случайных чисел выбирается подвижная частица, занимающая ячейку  $i$ . После этого случайным образом определяется направление ее возможного перехода в одну из соседних ячеек, называемую ячейкой-приемником. Если число заполнения ячейки-приемника  $j$  оказывается равным 1, то переход считается невозможным. Тем не менее попытка этого перехода учитывается. Если число заполнения ячейки-приемника равно 0, то определяется вероятность перехода частицы:

$$w_i = \exp(J(z_i - z_{\max}) / k_B T), \quad (12)$$

где  $z_i$  – число ближайших соседей выбранного узла;  $z_{\max} = 3$  – максимально возможное число ближайших соседей прыгающей частицы (вводится для того, чтобы максимально возможная вероятность не превышала единицу).

Далее генерируется равномерно распределенное случайное число  $p_r$  из диапазона  $[0; 1]$ , которое сопоставляется с  $w_i$ . Если  $w_i \geq p_r$ , то переход считается произошедшим, если  $w_i < p_r$ , то переход отклоняется. Повторение описанной процедуры  $L$  раз (равному числу частиц) формирует один шаг алгоритма Монте-Карло (МКШ). На процесс эквипробизации отводилось 1000 МКШ, которые не учитывались при моделировании.

Моделировалась система размером  $100 \times 100$  ячеек, в которой начальное распределение концентрации не соответствует равновесному, т.е. в неупорядоченной фазе значение параметра порядка

задавалось максимально возможным, а в упорядоченной – нулю. В дальнейшем в первом и последнем слоях параметр порядка сохранял указанные значения. В вертикальном направлении на систему накладывались периодические граничные условия.

**Результаты и их обсуждение.** На рис. 2 и 3 показано распределение параметра порядка в описанной выше системе в упорядоченной и неупорядоченной фазах, полученные с помощью прямого моделирования по методу Монте-Карло.

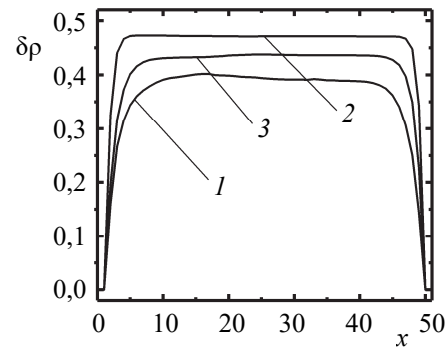


Рис. 2. Распределение параметра порядка в упорядоченной фазе при температуре 0,8 в единицах критической и средней концентрации в системе  $c = 0,45$  (1); 0,50 (2); 0,55 (3)

При этом ширина релаксационных областей растет вместе со средней концентрацией в системе, что может быть обусловлено увеличением корреляционных эффектов.

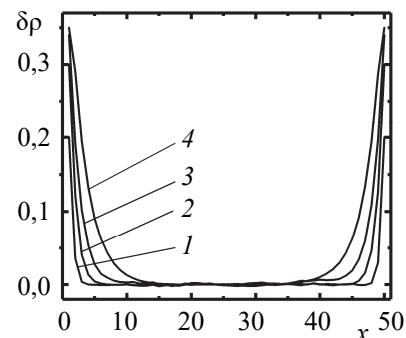


Рис. 3. Распределение параметра порядка в неупорядоченной фазе при температуре 0,8 в единицах критической и средней концентрации в системе  $c = 0,20$  (1); 0,25 (2); 0,30 (3); 0,65 (4)

Как видно из рисунков, на краях системы существуют релаксационные области (слои со значением параметра порядка, отличным от равновесного).

На рис. 4 и 5 показано сравнение результатов, полученных с помощью моделирования по методу Монте-Карло и численного решения уравнения баланса (1). Как видно из рисунков, ширина релаксационных областей, полученных численным решением, заметно меньше. Это может быть результатом флуктуаций при МКМ.

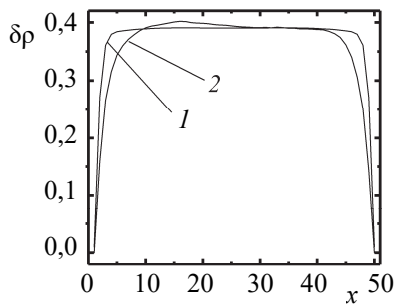


Рис. 4. Распределение параметра порядка в упорядоченной фазе при температуре 0,8 в единицах критической и средней концентрации в системе  $c = 0,45$ . 1 – определено решением уравнения баланса; 2 – МКМ

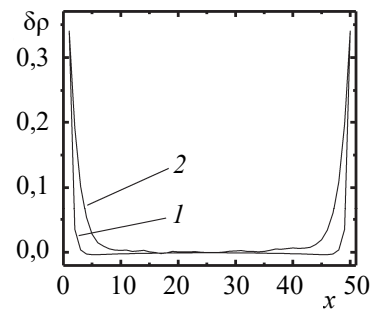


Рис. 5. Распределение параметра порядка в неупорядоченной фазе при температуре 0,8 в единицах критической и средней концентрации в системе  $c = 0,35$ . 1 – определено решением уравнения баланса; 2 – МКМ

**Заключение.** Исследована двумерная решеточная модель с отталкиванием ближайших соседей. В данной модели с помощью численного решения уравнения баланса числа частиц и компьютерного моделирования по методу Монте-Карло исследовано пространственное распределение параметра порядка в упорядоченной и неупорядоченной фазах при начальном распределении концентрации на подрешетках, не соответствующем равновесному.

Показано, появление релаксационных областей (слоев со значением параметра порядка, отличным от равновесного), ширина которых растет вместе со средней концентрацией в системе, что может быть обусловлено увеличением корреляционных эффектов. Сравнение результатов численного решения и результатов моделирования по методу Монте-Карло выявило заметное отличие ширины указанных областей.

#### Список литературы

1. Хуанг К. Статистическая механика. М.: Мир, 1966. 521 с.
2. Вихренко В. С., Грода Я. Г., Бокун Г. С. Равновесные и диффузионные характеристики интеркаляционных систем на основе решеточных моделей: монография. Минск: БГТУ, 2008. 326 с.
3. Ласовский Р. Н., Бокун Г. С., Вихренко В. С. Концентрационная кинетика интеркаляционных систем // Электрохимия. 2010. Т. 46, № 4. С. 411–422.
4. Kutner R., Binder K., Kehr K. W. Diffusion in concentrated lattice gases. V. Particles with repulsive nearest-neighbor interaction on the face-centered-cubic lattice // Phys. Rev. B. 1983. Vol. 28. P. 1846–1858.
5. Бокун Г. С., Ласовский Р. Н., Вихренко В. С. Кинетика структурных превращений в решеточной системе // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2008. Вып. XVI С. 35–38.

#### References

1. Huang K. *Statisticheskaya mekhanika* [Statistical mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1966. 521 p. (In Russian).
2. Vikhrenko V. S., Groda Ya. G., Bokun G. S. *Ravnovesnyye i diffuzionnyye kharakteristiki interkalyatsionnykh system na osnove reshetochnykh modeley: monografiya* [Equilibrium and diffusion characteristics of intercalation systems based on lattice models: monograph]. Minsk, BGTU Publ., 2008. 326 p. (In Russian).
3. Lasovsky R. N., Bokun G. S., Vikhrenko V. S. Concentration kinetics of intercalation systems. *Elektrokhimia* [Electrochemistry], 2010, vol. 46, no. 4, pp. 389–400 (In Russian).
4. Kutner R., Binder K., Kehr K. W. Diffusion in concentrated lattice gases. V. Particles with repulsive nearest-neighbor interaction on the face-centered-cubic lattice. *Phys. Rev. B*, 1983, vol. 28, pp. 1846–1858.
5. Bokun G. S., Lasovsky R. N., Vikhrenko V. S. Kinetics of structural transformations in a lattice system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physics and Mathematics. Informatics, 2008, issue XVI, pp. 35–38 (In Russian).

#### Информация об авторах

**Ласовский Руслан Николаевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: lasovsky@tut.by

**Бильданов Эльдар Эмирович** – магистр технических наук, ассистент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: eldar.bildanov@gmail.com

**Гапанюк Дмитрий Владимирович** – кандидат физико-математических наук, проректор по воспитательной работе. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: gapdm@mail.ru

**Information about the authors**

**Lasovsky Ruslan Nikolaevich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Mechanics and Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lasovsky@tut.by

**Bildanau Eldar Emiravich** – Master of Engineering, PhD student, the Department of Mechanics and Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: eldar.bildanov@gmail.com

**Gapanjuk Dmitry Vladimirovich** – PhD (Physics and Mathematics), Vice-rector for Student Affairs. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gapdm@mail.ru

*Поступила после доработки 27.01.2023*

# ФИЗИКА PHYSICS

---

УДК 535.34+541.65

**Н. Н. Крук**

Белорусский государственный технологический университет

## **СПИН-ОРБИТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В *ОРТО*-АРИЛ-ЗАМЕЩЕННЫХ КОРРОЛАХ И ПОРФИРИНАХ**

В работе исследованы закономерности спин-орбитальных взаимодействий, обусловленных присоединением *орто*-замещенных атомами галогенов арильных групп в  $C_m$ -положения тетрапиррольного макроцикла свободных оснований корролов и порфиринов. Проанализирована взаимосвязь константы скорости интеркомбинационной конверсии  $k_{ST}$  и суммы квадратов констант спин-орбитальной связи  $\Sigma\zeta^2$  атомов галогенов. Установлено, что внутренний эффект тяжелого атома, обусловленный влиянием атомов галогенов, в порфиринах приводит к вдвое большей скорости возрастания интеркомбинационной конверсии по сравнению с корролами. Данную закономерность предложено объяснить существенными различиями в величине энергетического зазора между нижним возбужденным синглетным  $S_1$  и триплетным  $T_1$  состояниями  $\Delta E(S_1-T_1)$ . Одно и то же спин-орбитальное возмущение приводит к большим изменениям константы скорости интеркомбинационной конверсии  $k_{ST}$  в случае меньшего энергетического зазора. Обнаруженная корреляция может быть использована для оценки энергии нижнего триплетного  $T_1$  состояния в гомологических рядах тетрапиррольных соединений, различающихся архитектурой периферического замещения, причем для этого необходимо знать только фотофизические характеристики нижнего возбужденного синглетного  $S_1$  состояния.

**Ключевые слова:** порфирин, коррол, спин-орбитальные взаимодействия, *орто*-арил-замещение, интеркомбинационная конверсия.

**Для цитирования:** Крук Н. Н. Спин-орбитальные взаимодействия в *орто*-замещенных корролах и порфиринах // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 29–33. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-6.

**M. M. Kruk**

Belarusian State Technological University

## **SPIN-ORBIT INTERACTIONS IN *ORTHO*-ARYL-SUBSTITUTED CORROLES AND PORPHYRINS**

The regularities of spin-orbit interactions caused by the attachment of aryl groups with *ortho*-substituted halogen atoms to the  $C_m$ -positions of the tetrapyrrolic macrocycle of the free base corroles and porphyrins have been studied in this work. The relationship between the intersystem crossing rate constant  $k_{ST}$  and the sum of the spin-orbit coupling constants squared  $\Sigma\zeta^2$  of halogen atoms was analyzed. It has been established that the internal heavy atom effect, caused by halogen atoms, in porphyrins leads to two-fold increase in the rate of the intersystem crossing growth as compared to corroles. It is proposed that this is due to significant differences in the energy gap between the lowest excited singlet  $S_1$  and triplet  $T_1$  states  $\Delta E(S_1-T_1)$ . The same spin-orbit perturbation leads to larger changes in the intersystem crossing rate constant  $k_{ST}$  in case of smaller energy gap. The correlation found can be used to estimate the energy of the lowest triplet  $T_1$  state in the homologous series of tetrapyrrolic compounds differing in the architecture of peripheral substitution, and for this one need to know only the photophysical characteristics of the lowest excited singlet  $S_1$  state.

**Keywords:** porphyrin, corrole, spin-orbit interactions, *ortho*-aryl-substitution, intersystem crossing.

**For citation:** Kruk M. M. Spin-orbit interactions in *ortho*-aryl-substituted corroles and porphyrins. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 29–33. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-6 (In Russian).

**Введение.** Доминирующим каналом дезактивации энергии электронного возбуждения тетрапиррольных соединений и их халькоген-замещенных аналогов является интеркомбинационная  $S_1-T_1$  конверсия, квантовый выход  $\Phi_{ST}$  которой в некоторых случаях может достигать 1 [1]. Доля молекул, которые дезактивируются через триплетное  $T_1$  состояние, зависит от силы внутримолекулярных спин-орбитальных взаимодействий, приводящих к смешиванию синглетных и триплетных состояний [2, 3]. Внутримолекулярным спин-орбитальным взаимодействием можно управлять посредством изменения архитектуры периферического замещения. Модификация макроцикла атомами (группами, содержащими атомы) с большой константой спин-орбитальной связи  $\zeta$  позволяет изменять константу скорости интеркомбинационной конверсии  $k_{ST}$  в широких пределах – эффект внутреннего тяжелого атома [1–3]. Следует отметить, что возмущающее влияние тяжелых атомов существенно зависит от их локализации в молекуле. Наибольшее влияние оказывают те атомы, которые вовлечены непосредственно в цепь макроциклического сопряжения, поэтому для гетерозамещенных аналогов порфиринов существенное возрастание силы спин-орбитальных взаимодействий наблюдается при относительно небольших изменениях константы спин-орбитальной связи  $\zeta$ . Так, например, при замене пиррола ( $\zeta_N = 78 \text{ см}^{-1}$ ) фураном ( $\zeta_O = 154 \text{ см}^{-1}$ ) либо тиофеном ( $\zeta_S = 365 \text{ см}^{-1}$ ) рост константы скорости интеркомбинационной конверсии  $k_{ST}$  значительно превышает таковой при хелатировании в ядре макроцикла иона цинка ( $\zeta_{Zn} = 390 \text{ см}^{-1}$ ) [3, 4]. Спин-орбитальное взаимодействие при периферическом замещении макроцикла также зависит от характера электронной коммуникации тяжелых атомов с макроциклом и расстояния между ними. Наибольшее возмущение достигается при непосредственном присоединении тяжелых атомов к скелетным атомам углерода, и по мере удаления тяжелых атомов от  $\pi$ -системы спин-орбитальное взаимодействие убывает. Отметим, что при наличии нескольких возмущающих центров могут наблюдаться как аддитивные, так и субтрактивные эффекты, обусловленные тем, что вклады различных центров в матричный элемент перехода могут иметь различные знаки [3, 5].

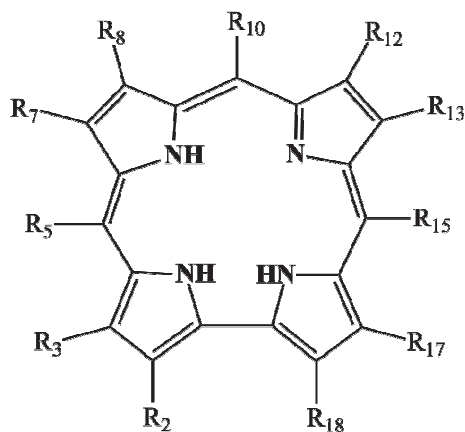
Спин-орбитальные взаимодействия, обусловленные присоединением некоторого периферического заместителя, также могут различаться для макрогетероциклов различного строения. Во-первых, возмущающее действие заместителя будет зависеть от электронной структуры молекулы, определяющей вероятности излучательных и безызлучательных переходов, взаимное

расположение синглетных и триплетных уровней энергии и др. Во-вторых, модифицируемые макроциклы могут иметь существенно различное исходное спин-орбитальное взаимодействие, по сравнению с которым дополнительное спин-орбитальное возмущение, вносимое периферическим замещением, будет либо пренебрежимо малым, либо весьма значительным.

В настоящей работе мы провели сравнительное исследование влияния спин-орбитальных взаимодействий, обусловленных присоединением к макроциклу арильных фрагментов, замещенных в орто-положениях атомами галогенов, на константу скорости интеркомбинационной  $S_1-T_1$  конверсии в свободных основаниях корролов и порфиринов. В качестве объектов исследования были выбраны свободные основания корролов 1–4 и порфиринов 5–7, различающиеся количеством и природой атомов галогенов в орто-положениях арильных заместителей в  $C_m$ -положениях тетрапиррольного макроцикла. Молекулярная структура исследованных соединений 1–7 приведена на рис. 1.

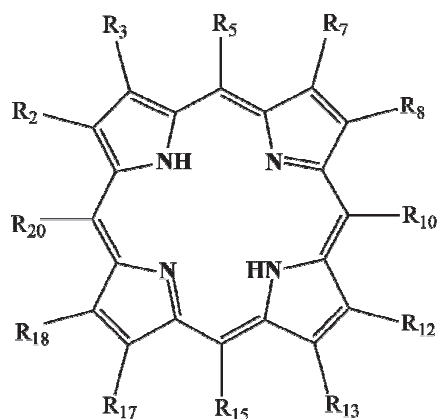
**Основная часть.** Фотофизические характеристики свободных оснований корролов являлись предметом многочисленных исследований [6–10 и ссылки в них]. Анализ полученных результатов однозначно указывает на то, что присоединение к макроциклу периферических заместителей, содержащих атомы галогенов, приводит к тушению флуоресценции и увеличению квантового выхода интеркомбинационной конверсии. Данные тенденции указывают на усиление спин-орбитальных взаимодействий. Действительно, константа спин-орбитальной связи  $\zeta$  атомов галогенов высока и быстро увеличивается с порядковым номером элемента:  $\zeta_F = 269 \text{ см}^{-1}$ ,  $\zeta_{Cl} = 587 \text{ см}^{-1}$ ,  $\zeta_{Br} = 2460 \text{ см}^{-1}$  [11], что позволяет варьировать спин-орбитальные возмущения в широких пределах путем изменения количества заместителей и природы галогенов. Представляет значительный интерес сопоставить величину эффекта внутреннего тяжелого атома в корролах и порфиринах, которые имеют существенно различные молекулярную конформацию и электронную структуру [1].

Несмотря на большое число известных галогенпроизводных свободных оснований порфиринов и корролов, критерию сравнительного анализа, требующего одинаковой архитектуры периферического замещения, удовлетворяет очень ограниченное число производных, в которых арильные группы, имеющие в орто-положениях атомы галогенов, присоединены к  $C_m$ -атомам тетрапиррольного макроцикла. Значения константы скорости интеркомбинационной  $S_1-T_1$  конверсии  $k_{ST}$  для свободных оснований корролов 1–4 взяты из наших предыдущих работ [7, 9], а для порфиринов 5–7 – из работы [12].



а

- 1 –  $R_2 = R_3 = R_7 = R_8 = R_{12} = R_{13} = R_{17} = R_{18} = H$   
 $R_{10} = 4,6\text{-дихлоропиримидин-5-ил}$   
 $R_5 = R_{15} = \text{мезитил}$
- 2 –  $R_2 = R_3 = R_7 = R_8 = R_{12} = R_{13} = R_{17} = R_{18} = H$   
 $R_{10} = \text{фенил}$   
 $R_5 = R_{15} = 4,6\text{-дихлоропиримидин-5-ил}$
- 3 –  $R_2 = R_3 = R_7 = R_8 = R_{12} = R_{13} = R_{17} = R_{18} = H$   
 $R_5 = R_{10} = R_{15} = 4,6\text{-дихлоропиримидин-5-сульфометил}$
- 4 –  $R_2 = R_3 = R_7 = R_8 = R_{12} = R_{13} = R_{17} = R_{18} = H$   
 $R_{10} = 4,6\text{-дибромфенил}$   
 $R_5 = R_{15} = 4,6\text{-дихлоропиримидин-5-ил}$



б

- 5 –  $R_2 = R_3 = R_7 = R_8 = R_{12} = R_{13} = R_{17} = R_{18} = H$   
 $R_5 = R_{10} = R_{15} = R_{20} = 2,6\text{-дифторфенил}$
- 6 –  $R_2 = R_3 = R_7 = R_8 = R_{12} = R_{13} = R_{17} = R_{18} = H$   
 $R_5 = R_{10} = R_{15} = R_{20} = 2,6\text{-дихлорфенил}$
- 7 –  $R_2 = R_3 = R_7 = R_8 = R_{12} = R_{13} = R_{17} = R_{18} = H$   
 $R_5 = R_{10} = R_{15} = R_{20} = 2\text{-хлорфенил}$

Рис. 1. Структура исследованных соединений:

а – свободные основания корролов 1–4;

б – свободные основания порфиринов 5–7

На рис. 2 приведены зависимости константы скорости интеркомбинационной  $S_1-T_1$  конверсии  $k_{ST}$  от суммы квадратов констант спин-орбитальной связи  $\sum \zeta^2$  орто-групп арильных заместителей макроцикла в двойных логарифмических

координатах. Очевидно, что как для порфиринов, так и для корролов зависимость имеет линейный характер, однако коэффициент наклона  $a$  линейной зависимости  $\lg k_{ST} = a \lg \sum \zeta^2 + b$  для исследованных порфиринов в 2,1 раза больше, чем для корролов. Одинаковое по величине спин-орбитальное возмущение в случае корролов приводит к меньшему росту константы скорости  $k_{ST}$ . Здесь необходимо отметить, что совпадение константы скорости интеркомбинационной конверсии для производных с четырьмя атомами С1 является случайным.

Необходимо выяснить, в чем заключается причина более слабого эффекта внутреннего тяжелого атома в случае корролов. По нашему мнению, причина заключается в различии в величине энергетического зазора между нижним возбужденным синглетным  $S_1$  и триплетным  $T_1$  состояниями  $\Delta E(S_1-T_1)$ . Известно, что вероятность безызлучательного перехода между двумя состояниями обратно пропорциональна величине энергетического зазора между ними [2]. Величина  $\Delta E(S_1-T_1)$  для порфиринов 5–7 изменяется слабо, и ее среднее значение равно 0,472 эВ. В то же время свободные основания корролов характеризуются существенно большим значением  $\Delta E(S_1-T_1)$  по сравнению со свободными основаниями порфиринов [9]. У исследованных корролов 1–4 среднее значение величины зазора  $\Delta E(S_1-T_1) = 0,675$  эВ. Очевидно, что в последнем случае при прочих равных условиях константа скорости интеркомбинационной конверсии  $k_{ST}$  должна быть ниже.

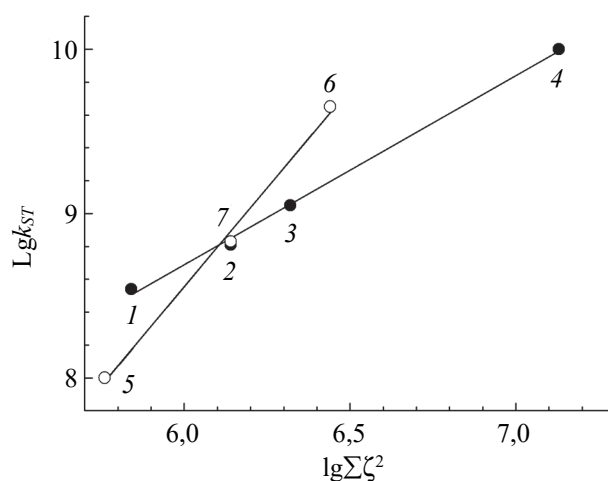


Рис. 2. Зависимость константы скорости интеркомбинационной  $S_1-T_1$  конверсии  $k_{ST}$  от суммы квадратов констант спин-орбитальной связи  $\sum \zeta^2$  орто-групп арильных заместителей макроцикла в двойных логарифмических координатах. Линии показывают результаты линейной регрессии для корролов 1–4 и порфиринов 5–7



Частное коэффициента наклона прямой  $a$  и логарифма  $\Delta E(S_1-T_1)$  пропорционально величине изменения константы скорости интеркомбинационной конверсии  $k_{ST}$ , отнесенной к единичному энергетическому  $S_1-T_1$  интервалу. Оценки показали, что для корролов и порфиринов эти значения отличаются не более чем на 10%, что, по нашему мнению, указывает на правильность предложенного объяснения.

Обнаруженную взаимосвязь можно использовать для оценки энергии нижнего триплетного  $T_1$  состояния в гомологических рядах тетрапиррольных соединений, различающихся величиной спин-орбитального возмущения за счет изменения архитектуры периферического замещения. Достоинством предлагаемого подхода является то, что для оценки используются только спектральные и фотофизические характеристики нижнего синглетного  $S_1$  состояния: положение максимума 0–0 полосы в спектре флуоресценции, квантовый выход  $\Phi_{фл}$  и время жизни флуоресценции  $\tau_{фл}$ .

**Заключение.** В работе изучена взаимосвязь константы скорости интеркомбинационной конверсии  $k_{ST}$  и суммы квадратов констант спин-орбитальной связи  $\sum \zeta^2$  атомов галогенов в свободных основаниях корролов и порфиринов, замещенных в  $C_m$ -положениях макроцикла арильными группами с атомами галогенов в орто-положениях. Установлено, что свободные основания корролов характеризуются более слабым ростом константы скорости интеркомбинационной конверсии  $k_{ST}$  по сравнению с порфиринами, который предложено объяснить увеличением энергетического интервала  $\Delta E(S_1-T_1)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция 2025» (подпрограмма «Междисциплинарные исследования и новые зарождающиеся технологии», задание шифр 3.03.10 (НИР 2)) и гранта Президента Республики Беларусь в сфере науки на 2023 г. (Круку Н. Н.).

### Список литературы

1. Крук Н. Н. Строение и оптические свойства тетрапиррольных соединений. Минск: БГТУ, 2019. 216 с.
2. McGlynn S. P., Azumi T., Kinoshita M. Molecular spectroscopy of the triplet state. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1969. 448 p.
3. Соловьев К. Н., Борисевич Е. А. Внутримолекулярный эффект тяжелого атома в фотофизике органических молекул // Усп. физ. наук. 2005. Т. 175, № 3. С. 247–270.
4. Heteroatom role in the formation of spectral-luminescent properties of 21-thia and 21,23-thia-5,10,15,20-tetraphenylporphyrin in solutions / I. V. Vershilovskaya [et al.] // Journ. Appl. Spectr. 2020. Vol. 87, no. 2. P. 201–207.
5. Деструктивная интерференция спин-орбитальных возмущений в металлокомплексах галогенпроизводных тетрафенилхлорина / Е. А. Борисевич [et al.] // Опт. и спектр. 1984. Т. 56, № 3. С. 414–419.
6. Photophysical characterization of free-base corroles, promising chromophores for light energy conversion and singlet oxygen generation / B. Ventura [et al.] // New J. Chem. 2005. Vol. 29. P. 1559–1566.
7. Luminescence of meso-pyrimidinylcorroles: relationship with substitution pattern and heavy atom effect / F. Nastasi [et al.] // Photochem. Photobiol. Sci. 2011. Vol. 10. P. 143–150.
8. Unraveling the fluorescence features of individual corrole NH tautomers / M. M. Kruk [et al.] // J. Phys. Chem., A. 2012. Vol. 116, no. 44. P. 10695–10703.
9. Phosphorescence of free base corroles / V. N. Knuykshto [et al.] // RCS Advances. 2016. Vol. 6. P. 43911–43915.
10. Vestfrid J., Goldberg I., Gross Z. Tuning the photophysical and redox properties of metallocorroles by iodination // Inorg. Chem. 2014. Vol. 53. P. 10536–10542.
11. Murov S. L., Carmichael I., Hug G. L. Handbook of photochemistry. New-York: Marcel Dekker, 1993. 420 p.
12. Heavy-atom effect on metalloporphyrins and polyhalogenated porphyrins / E. G. Azenha [et al.] // Chem. Phys. 2002. Vol. 280. P. 177–190.

### References

1. Kruk M. M. *Stroyeniye i opticheskiye svoystva tetrapirrol'nykh soyedineniy* [Structure and optical properties of tetrapyrrolic compounds]. Minsk, BGTU Publ., 2019. 216 p. (In Russian).
2. McGlynn S. P., Azumi T., Kinoshita M. Molecular spectroscopy of the triplet state. New Jersey, Prentice-Hall, Inc. Publ., 1969. 448 p.
3. Solovyov K. N., Borisevich E. A. Intramolecular heavy-atom effect in the photophysics of organic molecules. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Progress in Physics], 2005, vol. 175, no. 3, pp. 247–270 (In Russian).

4. Vershilovskaya I. V., Liulkovich L. S., Pukhovskaya S. G., Ivanova Yu. B., Plotnikova A. O., Kruk M. M. Heteroatom role in the formation of spectral-luminescent properties of 21-thia and 21,23-thia-5,10,15,20-tetraphenylporphyrin in solutions. *Journ. Appl. Spectr.*, 2020, vol. 87, no. 2, pp. 201–207.
5. Borisevich E. A., Egorova G. D., Knuykshto V. N., Solovyov K. N. Destructive interference of spin-orbit perturbations in metallocomplexes of tetraphenylchlorin halogenderivatives. *Optika i spektroskopiya* [Optics and Spectroscopy], 1984, vol. 56, no. 3, pp. 414–419 (In Russian).
6. Ventura B., Esposito A. D., Koszarna B., Gryko D. T., Flamigni L. Photophysical characterization of free-base corroles, promising chromophores for light energy conversion and singlet oxygen generation. *New J. Chem.*, 2005, vol. 29, pp. 1559–1566.
7. Nastasi F., Campagna S., Ngo T. H., Dehaen W., Maes W., Kruk M. Luminescence of meso-pyrimidinylcorroles: relationship with substitution pattern and heavy atom effect. *Photochem. Photobiol. Sci.*, 2011, vol. 10, pp. 143–150.
8. Kruk M. M., Ngo T. H., Verstappen P., Starukhin A. S., Hofkens J., Dehaen W., Maes W. Unraveling the fluorescence features of individual corrole NH tautomers. *J. Phys. Chem., A*, 2012, vol. 116, no. 44, pp. 10695–10703.
9. Knuykshto V. N., Ngo H. T., Dehaen W., Maes W., Kruk M. M. Phosphorescence of free base corroles. *RCS Advances*, 2016, vol. 6, pp. 43911–43915.
10. Vestfrid J., Goldberg I., Gross Z. Tuning the photophysical and redox properties of metallocorroles by iodination. *Inorg. Chem.*, 2014, vol. 53, pp. 10536–10542.
11. Murov S. L., Carmichael I., Hug G. L. Handbook of photochemistry. New-York, Marcel Dekker Publ., 1993. 420 p.
12. Azenha E. G., Serra A. C., Pineiro M., Pereira M. M., Seixas de Melo J., Arnaut L. G., Fromosinho S. J., Rocha Gonsalves A. M. d'A. Heavy-atom effect on metalloporphyrins and polyhalogenated porphyrins. *Chem. Phys.*, 2002, vol. 280, pp. 177–190.

#### Информация об авторе

**Крук Николай Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Сverdlova, 13а, Республика Беларусь). E-mail: m.kruk@belstu.by

#### Information about the author

**Kruk Mikalai Mikalaevich** – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: m.kruk@belstu.by

Поступила 26.12.2022

УДК 535.37+541.65+543.4

**Н. Н. Крук<sup>1</sup>, Л. Л. Гладков<sup>2</sup>, Д. В. Кленецкий<sup>1</sup>, А. Б. Крылов<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup>Белорусская государственная академия связи**МОЛЕКУЛЯРНАЯ КОНФОРМАЦИЯ И АРОМАТИЧНОСТЬ  
N-ЗАМЕЩЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОРФИНА**

С использованием метода функционала плотности рассчитана конформация молекулы порфина и двух его N-замещенных производных. Установлено, что при замещении протона в пиррольном фрагменте макроцикла  $\text{CH}_3$  либо  $\text{CF}_3$  группой формируется неплоский конформер. При этом значительный наклон замещаемого пиррольного кольца по отношению к средней плоскости макроцикла сопровождается значительной пирамидализацией атома азота: в порphine  $\text{H}_2\text{P}$  атом азота имеет  $sp^2$  гибридизацию, в  $\text{H}(\text{N}-\text{CH}_3)\text{P}$  порфирине показатель степени гибридизации  $\lambda^2$  увеличивается до 2,208, а в  $\text{H}(\text{N}-\text{CF}_3)\text{P}$  порфирине  $\lambda^2 = 2,667$ . Молекулярные орбитали макроцикла испытывают существенные сдвиги, величина и направление которых определяются свойствами заместителей. По сравнению с молекулой порфина энергия орбиталей увеличивается при присоединении электронодонорной  $\text{CH}_3$  группы и уменьшается при присоединении электроноакцепторной  $\text{CF}_3$  группы. В последнем случае значительное смещение электронной плотности с атома азота на  $\text{CF}_3$  группу приводит к тому, что изменяется порядок следования двух нижних вакантных молекулярных орбиталей. С использованием модели гармонического осциллятора для ароматичности (НОМА) рассчитаны индексы ароматичности  $I_{\text{НОМА}}$  макроцикла для аннуленоподобного 18-членного контура сопряжения и 22-членного контура сопряжения Шлейера. Показано, что N-замещение ухудшает сопряжение по внутреннему фрагменту  $\text{C}_a-\text{N}-\text{C}_a$  пиррольного кольца за счет пирамидализации атома азота, при этом одновременно возрастает индекс ароматичности НОМА 18-членного контура  $\pi$ -сопряжения через внешний фрагмент  $\text{C}_a-\text{C}_b-\text{C}_b-\text{C}_a$  пиррольного кольца. Величина индекса ароматичности  $I_{\text{НОМА}}$  для каждого из исследованных контуров сопряжения линейно зависит от степени гибридизации пиррольного атома азота. Предполагается, что управление гибридизацией атомов посредством замещения в ядре и на периферии тетрапиррольного макроцикла может быть положено в основу способа направленного изменения его ароматичности.

**Ключевые слова:** порфин, N-замещение, гибридизация, молекулярные орбитали, ароматичность.

**Для цитирования:** Крук Н. Н., Гладков Л. Л., Кленецкий Д. В., Крылов А. Б. Молекулярная конформация и ароматичность N-замещенных производных порфина // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 34–41. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-7.

**M. M. Kruk<sup>1</sup>, L. L. Gladkov<sup>2</sup>, D. V. Klenitsky<sup>1</sup>, A. B. Krylov<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State Technological University<sup>2</sup>Belarusian State Academy of Communications**MOLECULAR CONFORMATION AND AROMATICITY  
OF N-SUBSTITUTED PORPHINE DERIVATIVES**

Using the density functional theory method, the conformation of the porphine molecule and two its N-substituted derivatives were calculated. It has been found that substitution of a proton in the pyrrole fragment of the macrocycle with  $\text{CH}_3$  or  $\text{CF}_3$  group results in the formation of a nonplanar conformer. Herewith, a significant tilt of the substituted pyrrole ring with respect to the macrocycle mean plane is accompanied by a significant pyramidalization of the nitrogen atom: in porphine  $\text{H}_2\text{P}$  the nitrogen atom has  $sp^2$  hybridization, in  $\text{H}(\text{N}-\text{CH}_3)\text{P}$  porphyrin, the index of the degree of hybridization  $\lambda^2$  increases to 2,208, and in  $\text{H}(\text{N}-\text{CF}_3)\text{P}$  porphyrin  $\lambda^2$  was found to be 2,667. The molecular orbitals of the macrocycle experience significant shifts, whose magnitude and direction are determined by the properties of the substituents. The orbitals energy increases upon addition of an electron-donating  $\text{CH}_3$  group and decreases upon addition of an electron-withdrawing  $\text{CF}_3$  group compared to that of the porphine. In the latter case, a significant shift in the electron density from the nitrogen to the  $\text{CF}_3$  group leads to a change in the order of the two lowest unoccupied molecular orbitals. Using the harmonic oscillator model for aromaticity (НОМА), the macrocycle aromaticity indices  $I_{\text{НОМА}}$  were calculated for an annulene like 18-membered conjugation pathway and a 22-membered Schleyer conjugation pathway. It has been shown that N-substitution impairs the conjugation via inner  $\text{C}_a-\text{N}-\text{C}_a$  fragment of the pyrrole ring due to the pyramidalization of the nitrogen atom, with simultaneous increase in the НОМА aromaticity index of the 18-membered  $\lambda$ -conjugation contour including the outer  $\text{C}_a-\text{C}_b-\text{C}_b-\text{C}_a$  fragment of the pyrrole ring. The  $I_{\text{НОМА}}$  value for each of the studied

conjugation pathways depends linearly on the degree of hybridization of the pyrrole nitrogen atom. It is assumed that the control of the atom hybridization by substitution in core and on periphery of the tetrapyrrolic macrocycle can be the basis for the method of targeted change in its aromaticity.

**Keywords:** porphine, N-substitution, hybridization, molecular orbitals, aromaticity.

**For citation:** Kruk M. M., Gladkov L. L., Klenitsky D. V., Krylov A. B. Molecular conformation and aromaticity of N-substituted porphine derivatives. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 34–41. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-7 (In Russian).

**Введение.** Макрогетероциклические тетрапиррольные соединения, родоначальником которых является порфин  $H_2P$ , играют исключительно важную роль в формировании биосферы нашей планеты. Ядром фотосинтетического аппарата, кровеносной системы и окислительно-восстановительных циклов в живых организмах являются тетрапиррольные соединения. Данное обстоятельство обуславливает неослабевающий интерес ученых к исследованиям как природных тетрапиррольных соединений и выполняемых ими функций, так и синтетических тетрапиррольных макроциклов, число которых постоянно растет. При этом синтез новых соединений стимулируется не только развитием новых методов органической химии, но и востребованностью новых молекулярных систем с заданными физико-химическими и спектрально-люминесцентными характеристиками для создания и совершенствования новых материалов и технологий. В силу этого значительная часть фундаментальных исследований макрогетероциклических тетрапиррольных соединений и их аналогов представляет собой исследование взаимосвязи молекулярной структуры и тех или иных характеристик, представляющих интерес для решения определенных практических задач [1].

Тетрапиррольные соединения обладают развитой сопряженной электронной системой, которая обеспечивает коммуникацию  $\pi$ -электронов скелетных атомов по всему макроциклу. Представления о формировании сопряженной  $\pi$ -электронной системы в макрогетероцикле претерпели существенную эволюцию за последние 50 лет. Вначале считалось, что планарность макроцикла порфина и его простейших производных является определяющим фактором, обеспечивающим формирование контура  $\pi$ -электронного сопряжения, который, в свою очередь, определяет ароматичность молекулы. Однако существование огромного количества макрогетероциклических соединений с молекулярной конформацией, характеризующейся значительными отклонениями от планарного строения макроцикла, и развитие концепции конформационной подвижности макроцикла [2, 3] привели к пересмотру ранних представлений. Макрогетероциклические соединения со значительными отклонениями от планарного строения могут быть ароматическими,

причем в формировании ароматического  $\pi$ -сопряженного контура принимают участие все скелетные атомы макроцикла, вклады которых могут существенно варьироваться в зависимости от строения молекулы [4].

В настоящей работе мы изучили роль замещения одного из пиррольных атомов азота в ядре макроцикла в формировании молекулярной конформации, электронной структуры и степени ароматичности порфиринового макроцикла. В качестве объектов исследования были выбраны порфин  $H_2P$  и его  $N_{21}$ -замещенные  $CH_3$  или  $CF_3$  группами производные  $H(N-CH_3)P$  порфирина и  $H(N-CF_3)P$  порфирина. Молекулярная структура исследованных соединений приведена на рис. 1.

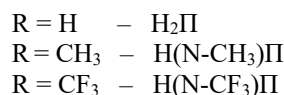
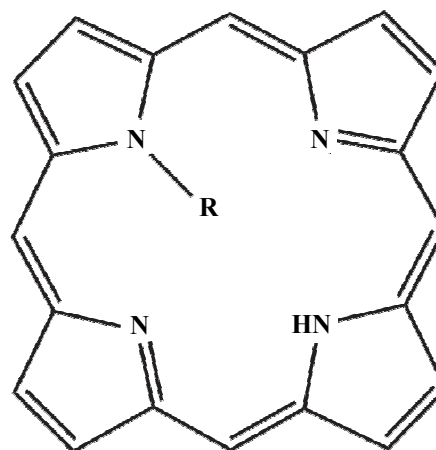


Рис. 1. Молекулярная структура исследованных соединений

**Основная часть.** Оптимизацию молекулярной конформации макроцикла исследуемых соединений в основном синглетном  $S_0$ -состоянии проводили методом функционала плотности (DFT) с обменно-корреляционным функционалом PBE и трехэкспоненциальным базисом 3z, реализованном в программном пакете для квантово-химических расчетов «Природа» [5]. Оптимизация конформации тетрапиррольных молекул методом функционала плотности с учетом электронной корреляции приводит к адекватным

значениям длин связей, согласующимся со значениями, полученными методами рентгеноструктурного анализа [3]. Для оптимизированных молекулярных структур рассчитывали спектр нормальных колебаний. Отсутствие мнимых частот колебательных мод служило критерием достижения стационарной точки. Для оптимизированной структуры рассчитывали энергию основного состояния молекулы, энергии молекулярных орбиталей и определяли длины связей между скелетными атомами макроцикла.

Замещение пиррольного протона  $\text{NH}_3$  или  $\text{CF}_3$  группами приводит к формированию неплоского конформера из-за того, что размеры данных групп не позволяют им расположиться в ядре макроцикла [6]. В результате пиррольное кольцо выворачивается из плоскости макроцикла. Торсионные углы  $\theta(\text{C}_a\text{C}_m\text{C}_a\text{C}_b)$  составляют 28,8 и 29,9° соответственно для  $\text{H}(\text{N}-\text{CH}_3)\text{P}$  порфирина и  $\text{H}(\text{N}-\text{CF}_3)\text{P}$  порфирина. Вместе с тем, не все стерические затруднения в ядре макроцикла компенсируются за счет поворота пиррольного кольца. По-видимому, для макроцикла оказывается термодинамически более выгодно скомпенсировать часть из них за счет нарушения плоского строения самого пиррольного кольца. Это проявляется, во-первых, в том, что торсионные углы  $\theta(\text{C}_a\text{C}_m\text{C}_a\text{N})$  и  $\theta(\text{C}_a\text{C}_m\text{C}_a\text{C}_b)$  различаются, и, во-вторых, в том, что связь  $\text{N}-\text{CH}_3$  ( $\text{N}-\text{CF}_3$ ) отклоняется от плоскости пиррольного кольца. Последнее означает, что пиррольный атом испытывает увеличение степени гибридизации, т. е. гибридизация атома азота пиррольного кольца приобретает частичный  $sp^3$  характер. Гибридизация  $sp^{\lambda^2}$  может быть рассчитана с помощью выражения  $1 + \lambda^2 \cos \theta = 0$ , где  $\theta$  – усредненная величина трех различных углов  $\text{C}_a\text{N}_2\text{C}_a'$ ,  $\text{C}_a\text{NC}_{\text{зам}}$  и  $\text{C}_a\text{NC}_{\text{зам}}$ . Результаты расчета показывают, что, действительно, величина степени гибридизации (степени пирамидализации)  $\theta^2$  заметно увеличивается. Для  $\text{H}(\text{N}-\text{CH}_3)\text{P}$  порфирина  $\lambda^2 = 2,208$ , а в молекуле  $\text{H}(\text{N}-\text{CF}_3)\text{P}$  порфирина  $\lambda^2$  увеличивается до 2,667. Исходная молекула порфина имеет плоское строение с  $sp^2$  гибридизацией атомов азота пиррольных колец, т. е.  $\lambda^2 = 2$ .

Кроме этого, следует отметить изменение размеров и формы ядра макроцикла. Так, если в молекуле порфина расстояния между соседними  $\text{C}_m$ -атомами вдоль направлений  $\text{NH}\dots\text{NH}$  и  $\text{N}\dots\text{N}$  равны соответственно 4,860 и 4,889 Å, то макроцикл замещенных производных еще больше вытягивается вдоль направления  $\text{N}\dots\text{N}$ . При этом у  $\text{H}(\text{N}-\text{CH}_3)\text{P}$  порфирина ( $\text{H}(\text{N}-\text{CF}_3)\text{P}$  порфирина) расстояние  $\text{C}_5-\text{C}_{20}$  между соседними с замещенным пиррольным кольцом 4,904 Å (4,905 Å) оказалось заметно меньшим, чем  $\text{C}_{10}-\text{C}_{15}$ , равное 4,922 Å (4,915 Å). Расстояния  $\text{C}_5-\text{C}_{10}$  и  $\text{C}_{15}-\text{C}_{20}$  вдоль направления  $\text{NH}\dots\text{NH}$  сокращаются до

4,84 Å. Таким образом, следует заключить, что ядро макроцикла N-замещенных порфиринов приобретает трапециевидную форму.

Группа  $\text{CH}_3$  является донором электронной плотности (константы Гаммета  $\sigma_R = -0,11$  и  $\sigma_I = -0,04$  [7]), а группа  $\text{CF}_3$  – акцептором электронной плотности (константы Гаммета  $\sigma_R = 0,10$ ;  $\sigma_I = 0,42$  [7]). Поэтому ожидаемые сдвиги молекулярных орбиталей у двух исследованных N-замещенных порфиринов должны иметь различные направления. Действительно (рис. 2), энергия четырех гомтермановских молекулярных орбиталей увеличивается для  $\text{H}(\text{N}-\text{CH}_3)\text{P}$  порфирина и уменьшается для  $\text{H}(\text{N}-\text{CF}_3)\text{P}$  порфирина.

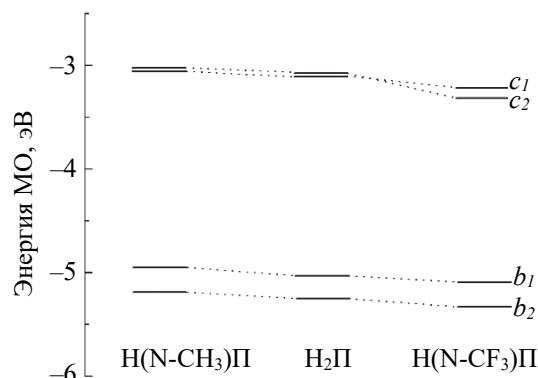


Рис. 2. Энергия четырех молекулярных орбиталей Гомтермана для исследованных порфиринов

Следует отметить, что величина энергетического зазора между нижней вакантной молекулярной орбиталью НВМО и верхней заполненной молекулярной орбиталью ВЗМО в ряду  $\text{H}_2\text{P} > \text{H}(\text{N}-\text{CH}_3)\text{P} > \text{H}(\text{N}-\text{CF}_3)\text{P}$  уменьшается, что согласуется с тенденцией прогрессивного bathochromного сдвига положения  $Q_x(0,0)$  полосы в спектре поглощения, рассчитанного методом ZINDO/S: 1,775 эВ > 1,738 эВ > 1,678 эВ (697,5 нм > 712,5 нм > 738,0 нм).

Анализ формы молекулярных орбиталей Гомтермана (рис. 3) позволил установить инверсию в относительном положении НВМО и НВМО+1 у  $\text{H}(\text{N}-\text{CF}_3)\text{P}$  порфирина. Большая электроноакцепторная способность  $\text{CF}_3$  группы приводит к тому, что для орбитали  $c_1$  ( $e_{gx}$  в обозначениях для точечной группы симметрии  $D_{4h}$ ) имеют место большие атомные орбитальные коэффициенты (пучности волновой функции) на замещенном атоме азота  $\text{N}_{21}$  и  $\text{CF}_3$  группе, т. е. они вносят существенный вклад в данную молекулярную орбиталь. В результате электроноакцепторного характера  $\text{CF}_3$  группы энергия данной орбитали уменьшается. Поскольку орбиталь  $c_2$  ( $e_{gy}$  в обозначениях для точечной группы симметрии  $D_{4h}$ ) имеет узловые точки на атоме азота  $\text{N}_{21}$  и  $\text{CF}_3$  группе, то ее энергия изменится значительно слабее.

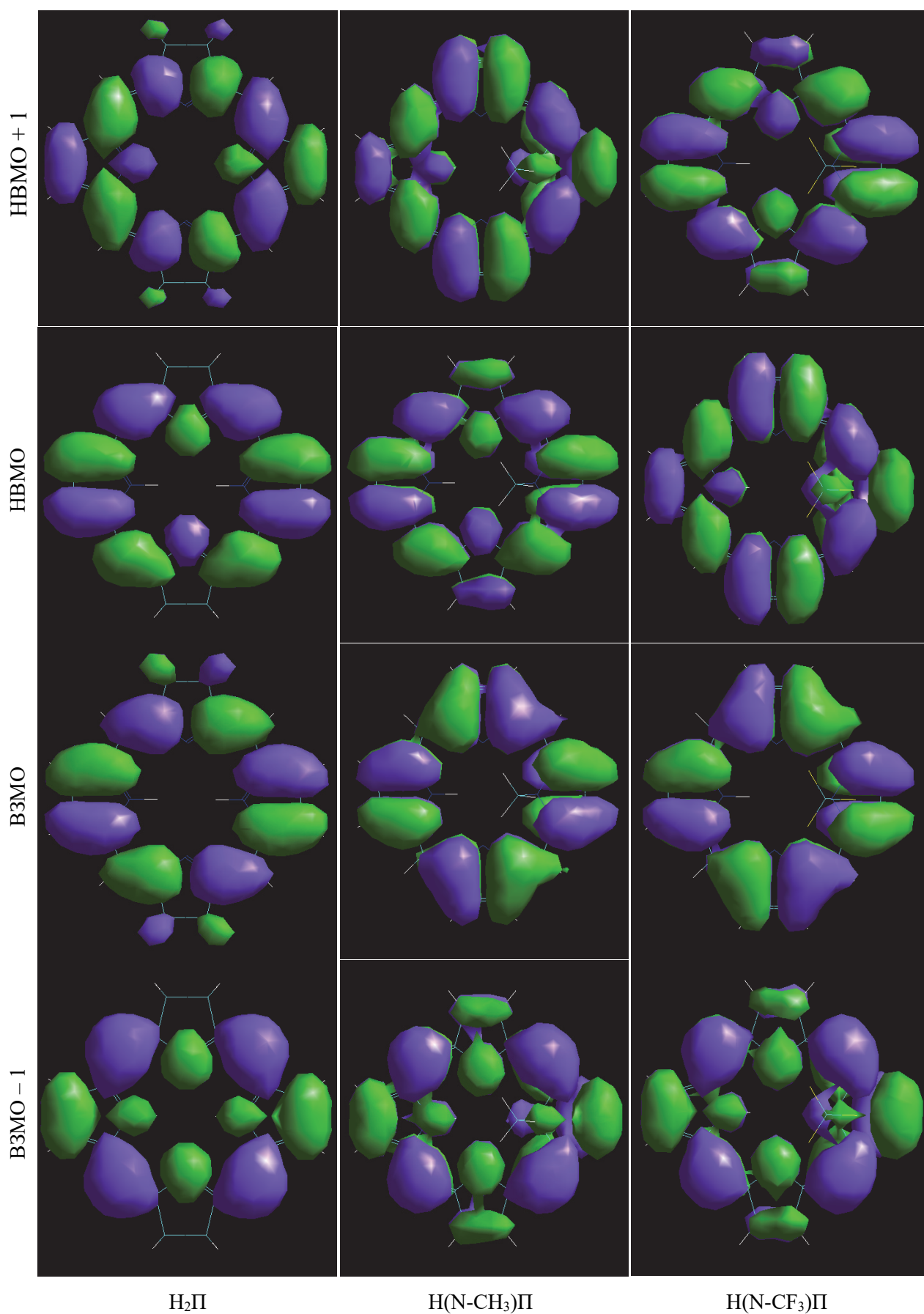


Рис. 3. Молекулярные орбитали Гоутермана для исследованных порфиринов, рассчитанные методом ZINDO/S для молекулярной конформации, оптимизированной методом функционала плотности

В результате в  $H(N-CF_3)P$  порфирине происходит инверсия в положении нижних вакантных орбиталей: НВМО  $c_1$  типа и НВМО+1  $c_2$  типа. В молекуле-архетипе  $H_2P$  НВМО+1 имеет  $c_1$  тип, поэтому увеличение ее энергии в  $H(N-CH_3)P$  порфирине не изменяет порядок следования молекулярных орбиталей.

Значительные конформационные перестройки и перераспределение электронной плотности в макроцикле могут привести к изменению формы  $\pi$ -сопряженного контура и ароматичности молекулы. Для анализа контура сопряжения и ароматичности нами использовался структурный критерий, поскольку ароматичность определяет длину связей в цепи сопряжения. В качестве меры ароматичности молекулы использовали индекс ароматичности  $I_{НОМА}$ , который рассчитывается по характеру альтернирования длин связей в модели гармонического осциллятора (*англ.* НОМА – harmonic oscillator model of aromaticity):

$$I_{НОМА} = 1 - \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (R_i^{opt} - R_j)^2,$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – количество С–С и С–N связей в контуре  $\pi$ -сопряжения;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – безразмерные эмпирические параметры, определяемые атомами, формирующими химическую связь, равные соответственно 257,7 и 93,52 для С–С и С–N связей;  $R_1^{opt} = 1,388 \text{ \AA}$  и  $R_2^{opt} = 1,334 \text{ \AA}$  – оптимальные длины соответственно для С–С и С–N связей;  $R_j$  – длина  $j$ -й связи в контуре сопряжения.

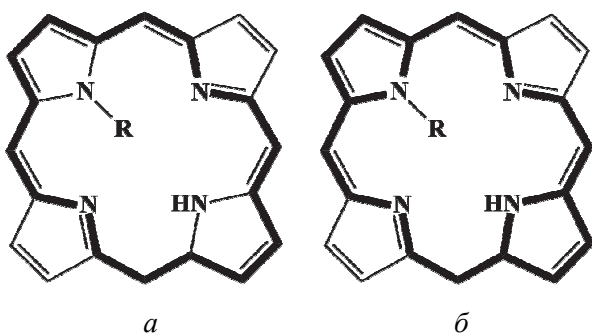


Рис. 4. Схема рассчитанных контуров сопряжения в макроцикле:

*a* – 18-членный аннуленоподобный контур;

*б* – 22-членный контур Шлейера

Индекс ароматичности вычисляли для двух возможных контуров сопряжения: аннуленоподобного 18-членного контура и 22-членного контура Шлейера (рис. 4). Выбор данных контуров для анализа влияния N-замещения на ароматичность и форму контура сопряжения продиктован следующим. Индекс ароматичности  $I_{НОМА}$

для данных двух контуров в исходной молекуле порфина наибольший из всех возможных, т. е. они являются доминирующими. При этом величины  $I_{НОМА}$  близки: 0,689 для 18-членного контура и 0,667 для 22-членного контура Шлейера. Это значит, что суммарная сила ароматического макроциклического тока, протекающего по внутреннему и внешнему рукавам при разветвлении на пиррольном кольце, тоже мало отличается. Если при N-замещении проводимость во внутреннем рукаве по фрагменту  $C_a-N_{21}-C_a$  изменится, то это приведет к соответственному изменению силы тока, протекающего по фрагменту  $C_a-C_b-C_b-C_a$ . Таким образом, по величине индекса ароматичности  $I_{НОМА}$  можно судить о степени вовлечения указанных фрагментов в формирование макроциклического кольцевого тока, и, соответственно, доминирующего контура  $\pi$ -сопряжения.

Рассчитанные значения индекса ароматичности  $I_{НОМА}$  для аннуленоподобного 18-членного контура и 22-членного контура Шлейера приведены на рис. 5 в виде зависимости от степени гибридизации  $\lambda^2$  атома азота пиррольного кольца. Анализ полученных зависимостей показывает, что изменение степени гибридизации атома азота существенно сказывается на протекании макроциклического тока. С возрастанием степени гибридизации внутренний фрагмент пиррольного кольца  $C_a-N_{21}-C_a$  исключается из цепи сопряжения: величина  $I_{НОМА}$  для 22-членного контура Шлейера падает. В то же время усиливается степень сопряжения по внешнему фрагменту  $C_a-C_b-C_b-C_a$ : индекс  $I_{НОМА}$  для аннуленоподобного 18-членного контура растет.

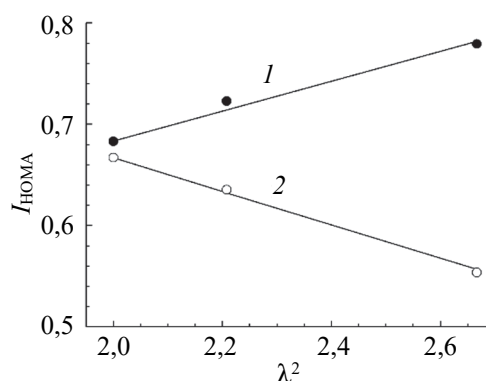


Рис. 5. Зависимость индекса ароматичности  $I_{НОМА}$  от показателя степени гибридизации  $\lambda^2$  атома азота замещенного пиррольного кольца: 18-членный аннуленоподобный контур (1); 22-членный контур Шлейера (2)

Следует подчеркнуть, что наблюдаемые изменения индексов  $I_{НОМА}$  можно объяснить тем, что проводимость через атом азота пиррольного кольца

сильно уменьшается (считается, что в пределе, при  $sp^3$  гибридизации, цепь сопряжения разрывается, что эквивалентно бесконечно большому сопротивлению для макроциклического тока). Следовательно,  $\pi$ -электронная плотность выдавливается на периферию макроцикла и большая часть макроциклического тока протекает по внешнему фрагменту  $C_a-C_b-C_b-C_a$ .

Ранее мы показали [8], что величина индекса ароматичности  $I_{НОМА}$  обнаруживает корреляцию с донорно-акцепторными характеристиками периферических заместителей. В данном случае изменение степени гибридизации атома азота, по-видимому, является определяющим, поскольку монотонное увеличение (уменьшение) индекса ароматичности  $I_{НОМА}$  происходит как при присоединении  $CH_3$  группы, способной донорить электронную плотность в макроцикл, так и при присоединении электроноакцепторной  $CF_3$  группы. Вместе с тем можно предположить, что в первом случае избыточный отрицательный заряд, вносимый  $CH_3$  группой, формирует электрическое поле, которое приводит к кулоновскому отталкиванию атомом азота на участке  $C_a-N_{21}-C_a$  и снижает макроциклический ток. В последнем случае, напротив, носители заряда через атом азота оттягиваются из контура сопряжения на  $CF_3$  группу, тем самым снижая его проводимость на участке  $C_a-N_{21}-C_a$ . В таком случае величина индекса ароматичности должна коррелировать с модулем константы Гаммета заместителя. Очевидно, что удовлетворительная корреляция не может быть получена с использованием только индуктивных констант Гаммета либо только резонансных констант Гаммета (см. приведенные значения  $\sigma_R$  и  $\sigma_I$  выше). Зависимости физико-химических характеристик тетрапиррольных соединений от взвешенной суммы констант Гаммета известны, в том числе зависимости основности  $pK_b$  макроцикла порфиринов от донорно-акцепторных характеристик периферических заместителей [9, 10].

На рис. 6 приведена зависимость индекса ароматичности  $I_{НОМА}$  от взвешенной суммы модулей констант Гаммета группы, присоединенной к атому азота пиррольного кольца. Линейные зависимости указывают на то, что изменение ароматичности макроцикла и формы наиболее вероятного контура сопряжения, возможно, определяется совокупностью двух вышеперечисленных факторов. При степени гибридизации  $\lambda^2$  атома азота, близкой к 2, доминирующая роль принадлежит резонансным электронным эффектам, а при значительном возрастании показателя степени гибридизации  $\lambda^2$  преобладают индуктивные электронные эффекты. Однако данный вопрос требует дальнейшего изучения.

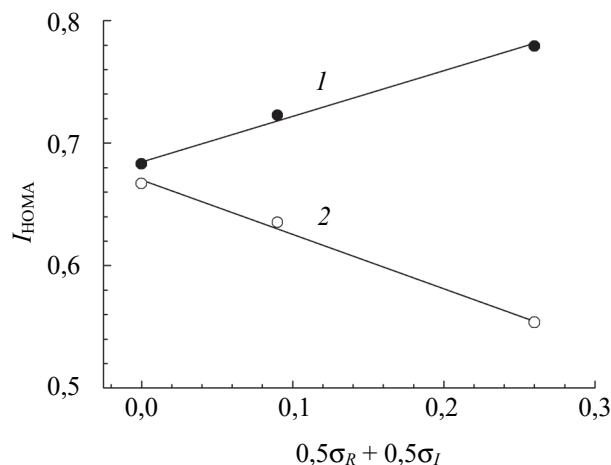


Рис. 6. Зависимость индекса ароматичности  $I_{НОМА}$  от взвешенной суммы модулей констант Гаммета N-заместителя: 18-членный аннуленоподобный контур (1); 22-членный контур Шлейера (2)

**Заключение.** Таким образом, в результате исследования установлено, что при замещении протона в пиррольном фрагменте макроцикла  $CH_3$  либо  $CF_3$  группой формируется неплоский конформер, причем отклонение замещенного пиррольного кольца от средней плоскости макроцикла сопровождается значительной пирамидализацией атома азота. В результате анализа рассчитанных величин индекса ароматичности  $I_{НОМА}$  макроцикла для аннуленоподобного 18-членного контура сопряжения и 22-членного контура сопряжения Шлейера установлено, что N-замещение ухудшает сопряжение по внутреннему фрагменту  $C_a-N-C_a$  пиррольного кольца за счет пирамидализации атома азота, при этом одновременно возрастает индекс ароматичности НОМА 18-членного контура  $\pi$ -сопряжения через внешний фрагмент  $C_a-C_b-C_b-C_a$  пиррольного кольца. При этом величина индекса ароматичности  $I_{НОМА}$  для каждого из исследованных контуров сопряжения линейно зависит от степени гибридизации  $\lambda^2$  пиррольного атома азота. Предполагается, что ароматичность тетрапиррольного макроцикла можно направленно изменить путем управления гибридизацией гетероатомов в пятичленных циклах посредством присоединения заместителей, различающихся электронными характеристиками и молекулярным объемом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция 2025» (подпрограмма «Междисциплинарные исследования и новые зарождающиеся технологии», задание шифр 3.03.10 (НИР 2)) и гранта Президента Республики Беларусь в сфере науки на 2023 г. (Крук Н. Н.).



### Список литературы

1. Крук Н. Н. Структура и оптические свойства тетрапиррольных соединений. Минск: БГТУ, 2019. 216 с.
2. Correlation of photophysical parameters with macrocycle distortion in porphyrins with graded degree of saddle distortion / B. Röder [et al.] // *Photochem. Photobiol. Sci.* 2010. Vol. 9. P. 1152–1158.
3. Senge M. O., MacGovan S. A., O'Brien J. Conformational control of cofactors in nature – the influence of protein-induced macrocycle distortion on the biological function of tetrapyrroles // *Chem. Commun.* 2015. Vol. 51, no. 96. P. 17031–17063.
4. Fliegl H., Sundholm D. Aromatic Pathways of Porphins, Chlorins, and Bacteriochlorins // *J. Org. Chem.* 2012. Vol. 77, no. 7. P. 3408–3414.
5. Laikov D. N. Fast evaluation of density functional exchange-correlation terms using the expansion of the electron density in auxiliary basis sets // *Chem. Phys. Lett.* 1997. Vol. 281, no. 1. P. 151–156.
6. Крук Н. Н. Изменение энтропии активации протонирования макроцикла свободного основания 21-CH<sub>3</sub>-октаэтилпорфина в нижнем возбужденном синглетном S<sub>1</sub> состоянии // *Труды БГТУ. Сер. 2, Химические технологии, биотехнологии, геоэкология.* 2022. № 2. С. 150–155.
7. Murov S. L., Carmichael I., Hug G. L. Handbook of photochemistry. New-York: Marcel Dekker, 1993. 420 p.
8. Инверсия ароматичности NH-таутомеров свободных оснований корролов в нижнем триплетном T<sub>1</sub> состоянии / Л. Л. Гладков [и др.] // *Журн. прикл. спектр.* 2022. Т. 89, № 3. С. 323–329.
9. Meot-Ner M., Adler A. D. Substituent effects in noncoplanar  $\pi$  systems. *ms-Porphins* // *Journ. Am. Chem. Soc.* 1975. Vol. 97, no. 18. P. 5107–5111.
10. Rate-acidity hysteresis and enthalpy-entropy compensation upon metalloporphyrin formation: implication for the metal ion coordination mechanism / Yu. B. Ivanova [et al.] // *J. Molec. Liquids.* 2019. Vol. 275, issue 3. P. 491–498.

### References

1. Kruk M. M. *Stroyeniye i opticheskiye svoystva tetrapirrol'nykh soyedineniy* [Structure and optical properties of tetrapyrrolic compounds]. Minsk, BGTU Publ., 2019. 216 p. (In Russian).
2. Röder B., Büchner M., Rückmann I., Senge M. O. Correlation of photophysical parameters with macrocycle distortion in porphyrins with graded degree of saddle distortion. *Photochem. Photobiol. Sci.*, 2010, vol. 9, pp. 1152–1158.
3. Senge M. O., MacGovan S. A., O'Brien J. Conformational control of cofactors in nature – the influence of protein-induced macrocycle distortion on the biological function of tetrapyrroles. *Chem. Commun.*, 2015, vol. 51, no. 96, pp. 17031–17063.
4. Fliegl H., Sundholm D. Aromatic Pathways of Porphins, Chlorins, and Bacteriochlorins. *J. Org. Chem.*, 2012, vol. 77, no. 7, pp. 3408–3414.
5. Laikov D. N. Fast evaluation of density functional exchange-correlation terms using the expansion of the electron density in auxiliary basis sets. *Chem. Phys. Lett.*, 1997, vol. 281, no. 1, pp. 151–156.
6. Kruk M. M. Activation entropy changes of macrocycle protonation of the free base 21-CH<sub>3</sub>-octaethylporphyrin in the lowest excited singlet S<sub>1</sub> state. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 2, Chemical Engineering, Biotechnologies, Geoecology, 2022, no. 2, pp. 150–155 (In Russian).
7. Murov S. L., Carmichael I., Hug G. L. Handbook of photochemistry. New-York, Marcel Dekker Publ., 1993. 420 p.
8. Gladkov L. L., Klenitsky D. V., Vershilovskaya I. V., Maes W., Kruk M. M. Inversion of aromaticity of NH-tautomers of the free base corroles in the lowest triplet T<sub>1</sub> state. *Zhurn. prikl. spectr.* [Journ. Appl. Spectr.], 2022, vol. 89, no. 3, pp. 323–329 (In Russian).
9. Meot-Ner M., Adler A. D. Substituent effects in noncoplanar  $\pi$  systems. *ms-Porphins*. *Journ. Am. Chem. Soc.*, 1975, vol. 97, no. 18, pp. 5107–5111.
10. Ivanova Yu. B., Pukhovskaya S. G., Mamardashvili N. Zh., Koifman O. I., Kruk M. M. Rate-acidity hysteresis and enthalpy-entropy compensation upon metalloporphyrin formation: implication for the metal ion coordination mechanism. *J. Molec. Liquids.*, 2019, vol. 275, no. 3, pp. 491–498.

### Информация об авторах

**Крук Николай Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: m.kruk@belstu.by

**Гладков Лев Львович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры физических и математических основ информатики. Белорусская государственная академия связи (220114, г. Минск, ул. Ф. Скорины, 8/2, Республика Беларусь). E-mail: llglad@tut.by

**Клеицкий Дмитрий Викентьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: klen@belstu.by

**Крылов Андрей Борисович** – кандидат биологических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: krylov\_ab@belstu.by

#### **Information about the authors**

**Kruk Mikalai Mikalaevich** – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: m.kruk@belstu.by

**Gladkov Lev L'vovich** – DSc (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor, the Department of Physical and Mathematical Basis of Informatics. Belarusian State Academy of Communications (8/2, F. Skorina str., 220114, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: llglad@tut.by

**Klenitsky Dmitry Vikentievich** – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: klen@belstu.by

**Krylov Andrei Borisovich** – PhD (Biology), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: krylov\_ab@belstu.by

*Поступила 19.12.2022*

УДК 543.42+535.34

Л. Л. Гладков<sup>1</sup>, Г. А. Гладкова<sup>2</sup><sup>1</sup>Белорусская государственная академия связи<sup>2</sup>Военная академия Республики Беларусь**МОЛЕКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА И КОЛЕБАНИЯ МОЛЕКУЛЫ  
ИНДОЛИНОСПИРОНАФТООКСАЗИНА**

Методом функционала плотности выполнен расчет геометрической структуры и нормальных колебаний стереоизомеров фотохромной молекулы индолиноспиронафтооксазина в закрытой форме. Установлены корреляции между особенностями строения, частотами и формой колебаний. Кроме колебаний отдельных фрагментов имеются колебания большинства атомов молекулы. При этом, ввиду ортогональности индолинового фрагмента остальной части молекулы, неплоское колебание одной структурной группы может сочетаться с плоским колебанием другой. Определена спектральная область проявления частот колебаний с наибольшим изменением связей спироатомом углерода – кислород 700–850 см<sup>-1</sup>.

**Ключевые слова:** индолиноспиронафтооксазин; 1,3-дигидро-1,3,3-триметилспиро[2H-индол-2,3'-[3H]нафто[2,1-b][1,4]оксазин], расчет нормальных колебаний, метод функционала плотности.

**Для цитирования:** Гладков Л. Л., Гладкова Г. А. Молекулярная структура и колебания индолиноспиронафтооксазина // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 42–45. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-8.

L. L. Gladkov<sup>1</sup>, G. A. Gladkova<sup>2</sup><sup>1</sup>Belarusian State Academy of Communications<sup>2</sup>Belarusian Military Academy**MOLECULAR STRUCTURE AND VIBRATIONS  
OF INDOLINOSPIRONAPHTHOOXAZINE MOLECULE**

The structure and normal vibrations of stereoisomers of the closed form of photochromic molecule of indolinospiro-naphthooxazine were calculated by the DFT method. Correlations between the features of the structure and the frequencies and form of vibrations have been established. In addition to vibrations of individual fragments, there are vibrations of most of the atoms of the molecule. In this case due to the orthogonality of the indoline fragment and the rest of the molecule, the out-of-plane vibration of one structural group can be combined with the planar vibration of another. The spectral region of manifestation of vibration with the greatest change in the bond of carbon spiro atom-oxygen 700–850 cm<sup>-1</sup> was determined.

**Keywords:** indolinospiro-naphthooxazine, 1,3-dihydro-1,3,3-trimethylspiro[2H-indol-2,3'-[3H]naph-ta[2,1-b][1,4]oxazine], normal coordinate calculations, DFT calculations.

**For citation:** Gladkov L. L., Gladkova G. A. Molecular structure and vibrations of indolinospiro-naphthooxazine molecule. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 42–45. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-8 (In Russian).

**Введение.** Исследования фотохромных веществ являются актуальной научной задачей в связи с широкими перспективами их применения в системах регистрации и обработки оптических и электрических сигналов, в создании элементов оперативной оптической памяти, голографических устройствах высокого разрешения.

Использование квантово-механических методов позволяет получать информацию о возможных конформерах молекулярных соединений, определять характеристики их колебательных спектров и создавать надежную интерпретацию экспериментальных спектров фотохромных материалов.

Такая информация важна для понимания механизма фотохромных превращений, создания

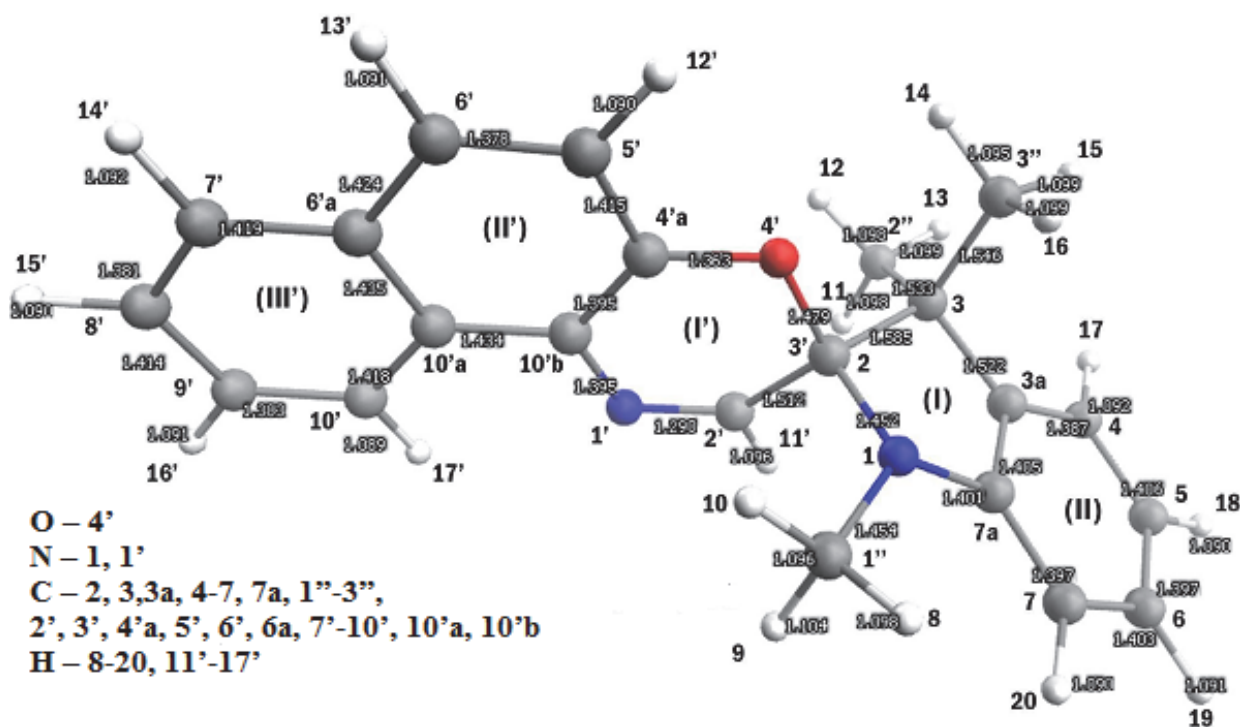
и практического применения фотохромных материалов на основе этих соединений [1, 2]. Индолиновые спиропираны являются классом фотохромных молекул, имеющих широкие перспективы использования в различных отраслях науки и техники [1]. Жидкие и твердые растворы молекул индолиновых спиропиранов в их закрытой спироформе бесцветны. Однако при поглощении этими растворами ультрафиолетового излучения происходит разрыв химической связи, образованной спироатомом углерода и атомом кислорода пиранового цикла индолиновых спиропиранов. Образовавшаяся молекулярная структура, которую называют открытой или мероцианиновой формой, поглощает уже в видимой области от 400 до 700 нм [1, 2].

В настоящей работе исследованы стереоизомеры молекулы индолиноспиронафтооксазина: 1,3-дигидро-1,3,3-триметилспиро [2Н-индол-2, 3'-[3Н] нафто [2, 1-б] [1, 4] оксазин] (ИСНО) в исходной спироформе (рисунок) и предложена новая интерпретация его ИК-спектра на основе квантово-механических расчетов методом функционала плотности.

**Основная часть.** Квантово-механические расчеты структур стереоизомеров ИСНО и их нормальных колебаний (НК) были проведены с помощью метода функционала плотности. При этом использовался обменно-корреляционный функционал ВРЕ и трехэкспонентный базисный набор 3z по алгоритму, реализованному в квантово-химической программе [3]. Процесс оптимизации геометрии был остановлен, когда компоненты градиента энергии не превышали  $10^{-6}$ . Затем были проведены расчеты нормальных колебаний (НК) и интенсивностей в ИК-спектрах. Отсутствие мнимых значений частот свидетельствует о достижении стационарной точки при оптимизации геометрии молекул. Масштабирование вычисленных частот не производилось.

Ранее уже были проведены расчеты геометрии и НК ИСНО [4]. Однако в работах [5–7] для сходных по строению фотохромных молекул были обнаружены стереоизомеры, причем наименьшую энергию имел изомер другой формы. Поэтому мы также провели оптимизацию геометрии ИСНО из нескольких начальных точек, чтобы получить несколько стационарных точек, соответствующих различным стереоизомерам.

Были обнаружены четыре стационарные точки, соответствующие различным изомерам ИСНО. Для наиболее устойчивого изомера плоскость кольца II примерно проходит вблизи атома  $C_2'$  (штриховые обозначения номеров атомов, приведенные на рисунке, в тексте для удобства перенесены на обозначения атомов). Чуть большую энергию (в пересчете на волновые числа всего на  $0,5 \text{ см}^{-1}$ ) имеет стереоизомер (энантиомер), у которого индолиновый фрагмент (кольца I и II) повернут на  $180^\circ$  относительно пирановой группы I'. Его геометрические параметры и значения колебательных частот практически совпадают с соответствующими величинами наиболее устойчивого изомера. Конформация третьего изомера менее выгодна, его энергия примерно на  $900 \text{ см}^{-1}$  больше. Из-за большого энергетического зазора, согласно распределению Больцмана, такая структура не заселяется из-за теплового движения. Ее основной особенностью является поворот индолиновой части молекулы вокруг оси, перпендикулярной пирановому фрагменту, так, что плоскость кольца II проходит вблизи атома кислорода. Кроме того, длина связи между спиратомом  $C_5$  (на рисунке имеет обозначение 2 и 3') и атомом кислорода заметно меньше ( $1,439 \text{ \AA}$ ), чем у наиболее устойчивого изомера. Зато длина связи  $C_5N$ , наоборот, короче у основного изомера ( $1,452$  и  $1,48 \text{ \AA}$  соответственно). Вращение индолиновой части на  $180^\circ$  относительно пиранового фрагмента для получения четвертого изомера (энантиомера) не приводит к изменениям энергии и структурных параметров.



Длины связей и нумерация атомов наиболее стабильного энантиомера закрытой формы молекулы ИСНО

На рисунке приведены обозначения атомов и колец молекулы ИСНО, а также рассчитанные длины связей основного изомера. Следует отметить, что длины СО-связей оксазинового кольца различны (1,363 и 1,479 Å), причем больше длина связи, которая разрывается при перестройке в открытую форму молекулы. Также существенна разница в длинах CN-связей (1,290 и 1,395 Å). Следует отметить, что рассчитанные длины связей согласуются с рентгеноструктурными данными сходной по строению молекулы 1,3,3,5,6-пентаметилспиро(индолин-2,3'-3Н-пурин) [3, 2-ф][1, 4]бензоксазина [8].

Результаты расчетов изомеров ИСНО показывают, что в работе [4] был выбран неосновной изомер. Поэтому предложенная в этой статье в интерпретация ИК-спектра ИСНО требует корректировки. В первую очередь это касается отнесения НК с участием атомов кислорода и индолинового азота ( $N_1$ ).

Двойная связь  $C_2'N_1'$  имеет наибольший вклад в НК 1548 и 1598  $cm^{-1}$ , сопоставленные с ИК-полосами 1355  $cm^{-1}$  и 1595  $cm^{-1}$ . Ранее второе НК было отнесено к полосе 1605  $cm^{-1}$  [4]. Другая связь с участием атома азота  $C_5N$  заметно изменяется в НК 925 и 1217  $cm^{-1}$  (1189  $cm^{-1}$  в [4]). Связи  $C_5C$  участвуют в НК 1088; 1131; 1165; 1173 и 1220  $cm^{-1}$ .

Особый интерес представляют колебания с участием связей СО. В работе [8] отмечалось, что в молекулах спиропиранов связь  $C_5O$  ослаблена и это может быть причиной ее разрыва. Ранее было показано, что процесс фотоперестройки молекулы происходит в возбужденном электронном состоянии [1]. По данным наших расчетов, в триплетном состоянии эта связь становится еще слабее (ее длина увеличивается на 0,33 Å). Можно предположить, что наиболее благоприятные условия для разрыва связи  $C_5O$

будут возникать в электронно-колебательном состоянии, в котором указанная связь имеет наибольшую амплитуду изменения. В работе [4] к НК с наибольшими изменениями этой связи имели рассчитанные значения частоты 853, 1039, 1084 и 1174  $cm^{-1}$ . Однако это отнесение сделано для нестабильного изомера ИСНО. У основного изомера частоты аналогичных НК имеют более низкие значения, что согласуется с увеличением длины этой связи. Наибольшие изменения связи  $C_5O$  отмечены для НК 785 и 803  $cm^{-1}$ , которые мы сопоставляем с ИК-полосами 775 и 809  $cm^{-1}$ . В возбужденном электронном состоянии значения частот, конечно, изменятся, однако можно сделать вывод, что частоты НК, которые, возможно, участвуют в процессе перехода молекулы в мероцианиновую форму под воздействием ультрафиолетового излучения, лежат в интервале 700–850  $cm^{-1}$ . Следует отметить, что атом кислорода также заметно смещается в НК 583  $cm^{-1}$ , вызывая преимущественно изменение угла  $C_5OC$  (ИК-полоса 590  $cm^{-1}$ ). В ряде НК с частотами 147, 302, 314, 340 и 418  $cm^{-1}$  атом кислорода смещается перпендикулярно кольцу  $\Gamma$ . Другая, более короткая связь СО вносит наибольший вклад в три НК: 1077, 1243 и 1270  $cm^{-1}$ .

**Заключение.** Определена структура стереоизомеров закрытой формы молекул ИСНО, рассчитаны частоты и форма их НК. Пересмотрена интерпретация экспериментальных ИК-спектров поглощения ИСНО. Выявлены особенности нормальных колебаний ИСНО, вызванные наличием спироузла в ее структуре. Определена спектральная область проявления частот колебаний с наибольшим изменением связей спироатом углерода – кислород 700–850  $cm^{-1}$ , через которые в возбужденном состоянии, возможно, происходит фотоперестройка спироформы молекулы ИСНО в мероцианиновую форму.

### Список литературы

1. Ельцов А. В. Органические фотохромы. Л.: Химия. 1982. 678 с.
2. Локшин В., Самат А., Метелица А. В. Spirooxazines: synthesis, structure, spectral and photochromic properties // *Успехи химии*. 2002. Т. 71, № 11. С. 1015–1039.
3. Laikov D. N. Fast evaluation of density functional exchange-correlation terms using the expansion of the electron density in auxiliary basis sets // *Chem. Phys. Lett.* 1997. Vol. 281, no. 1. P. 151–156.
4. ИК спектр закрытой формы молекулы индолиноспиронафтооксазина / Л. Л. Гладков [и др.] // *Журн. прикл. спектр.* 2012. Т. 79, № 1. С. 37–44.
5. Интерпретация колебательных спектров индолиноспиропирана / Л. Л. Гладков [и др.] // *Журн. прикл. спектр.* 2014. Т. 81, № 1. С. 197–203.
6. Conformations of nitro-substituted spiroopyran and merocyanine studied by low-temperature matrix-isolation infrared spectroscopy and density-functional-theory calculation / Y. Futami [et al.] // *Chem. Phys. Lett.* 2003. Vol. 370, no. 3–4. P. 460–468.
7. Интерпретация ИК спектра индолиноспиробензотиопирана / Л. Л. Гладков [и др.] // *Журн. прикл. спектр.* 2015. Т. 82, № 4. С. 519–525.
8. Structure of a photochromic benzoxazine derivative / W. Clegg [et al.] // *Acta Cryst.* 1987. Vol. C43, no. 4. P. 804–806.

### References

1. El'tsov A. V. *Organicheskiye fotokhromy* [Organic Photochromes]. Leningrad, Khimiya Publ., 1982. 678 p. (In Russian).
2. Lokshin V., Samat A., Metelitsa A. V. Spirooxazines: synthesis, structure, spectral and photochromic properties. *Uspekhi khimii* [Russian Chemical Reviews], 2002, vol. 71, no. 11, pp. 893–916 (In Russian).
3. Laikov D. N. Fast evaluation of density functional exchange-correlation terms using the expansion of the electron density in auxiliary basis sets. *Chem. Phys. Lett.*, 1997, vol. 281, no. 1. pp. 151–156.
4. Gladkov L. L., Khamchukov Yu. D., Sychev I. Yu., Lyubimov A. V. Interpretation of IR spectrum of indolinospironaphtooxazine closed form. *Zhurnal prikladnoy spektroskopii* [Journ. Appl. Spectr.], 2012, vol. 79, no. 1. pp. 37–44 (In Russian).
5. Gladkov L. L., Khamchukov Yu. D., Gromak V.V., Sychev I. Yu., Lyubimov A. V. The interpretation of vibrational spectra of spiropyran. *Zhurnal prikladnoy spektroskopii* [Journ. Appl. Spectr.], 2014, vol. 81, no. 1, pp. 197–203 (In Russian).
6. Futami Y., Chin M. L. S., Kudoh S., Takayanagi M., Nakata M. Conformations of nitro-substituted spiropyran and merocyanine studied by low-temperature matrix-isolation infrared spectroscopy and density-functional-theory calculation. *Chem. Phys. Lett.*, 2003, vol. 370, no 3–4, pp. 460–468.
7. Gladkov L. L., Khamchukov Yu. D., Sychev I. Yu., Lyubimov A. V., Gladkova G. A. Interpretation of IR spectra of indolinobenzospirothiopyran. *Zhurnal prikladnoy spektroskopii* [Journ. Appl. Spectr.], 2015, vol. 82, no. 4, pp. 519–525 (In Russian).
8. Clegg W., Norman N. C., Lasch J. G., Kwak W. S. Structure of a photochromic benzoxazine derivative. *Acta Cryst.*, 1987, vol. C43, no. 4, pp. 804–806.

### Информация об авторах

**Гладков Лев Львович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры физических и математических основ информатики. Белорусская государственная академия связи (220114, г. Минск, ул. Ф. Скорины, 8/2, Республика Беларусь). E-mail: llglad@tut.by

**Гладкова Галина Александровна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Военная академия Республики Беларусь (220057, г. Минск, пр. Независимости, 220, Республика Беларусь).

### Information about the authors

**Gladkov Lev L'vovich** – DSc (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor, the Department of Physical and Mathematical Foundations of Informatics. Belarusian State Academy of Communications (8/2, F. Skorina str., 220114, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: llglad@tut.by

**Gladkova Galina Aleksandrovna** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian Military Academy (220, Nezavisimost Ave, 220057, Minsk, Republic of Belarus).

*Поступила после доработки 19.01.2023*

# ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES

---

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS

---

УДК 621.3.012.8

Д. А. Гринюк, Н. М. Олиферович, И. Г. Сухорукова,  
А. Л. Егорова, И. О. Оробей, П. О. Карпук  
Белорусский государственный технологический университет

### СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ НА СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

В статье делается попытка построения схемы замещения измерительного преобразователя электрокинетического потенциала, принцип работы которого основан на сдвиговом потоке. Для получения использован подход, который основан на феноменологической линейной термодинамической теории необратимых процессов с использованием кинетических уравнений переноса. Поскольку полезный сигнал измерительного преобразователя предусматривает использование переменного измерительного сигнала, то схема замещения позволит оптимизировать параметры работы измерительного канала. Особенностью рассмотренного измерительного преобразователя является сочетание двух неэлектрических явлений как одновременное движение жидкости под действием внешнего давления и вращения элементов преобразователей. Связав потоки массы и электрического заряда, получаем выражения для построения и анализа схем замещения разработанного электрокинетического преобразователя.

Проведен анализ для различных режимов работы электрокинетического преобразователя и получены основные соотношения. В частности, отдельно выделены потенциальный режим, токовый режим, режим максимального КПД и режим максимальной выходной электрической мощности. На основании теоретических предпосылок предложен ряд вариантов построения схем замещения и расчетные формулы для определения их параметров. Результаты работы предусматривают дальнейшую доработку для учета не только статических, но и динамических параметров схемы замещения.

**Ключевые слова:** схема замещения, электрокинетические потенциал, электрокинетические явления.

**Для цитирования:** Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г., Егорова А. Л., Оробей И. О., Карпук П. О. Схема замещения электрокинетического преобразователя на сдвиговом потоке // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 46–53. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-9.

**D. A. Hryniuk, N. M. Oliferovich, I. G. Suhorukova, A. L. Egorova, I. O. Orobei, P. O. Karpuk**  
 Belarusian State Technological University

**SUBSTITUTION CIRCUIT OF ELECTROKINETIC CONVERTER ON SHEAR FLOW**

The article attempts to construct an equivalent circuit for measuring the electrokinetic potential transducer, the principle of operation of which is based on a shear flow. To obtain, an approach was used that is based on the phenomenological linear thermodynamic theory of irreversible processes using kinetic transport equations. Since the useful signal of the measuring transducer involves the use of a variable measuring signal, the equivalent circuit will allow optimizing the operation parameters of the measuring channel. A feature of the considered measuring transducer is the combination of two non-electrical phenomena as the simultaneous movement of a liquid under the action of external pressure and rotation of the transducer elements. By relating the flows of mass and electric charge, we obtain expressions for constructing and analyzing the equivalent circuits of the developed electrokinetic converter.

An analysis was carried out for various modes of operation of the electrokinetic converter and the main ratios were obtained. In particular, the potential mode, the current mode, the mode of maximum efficiency and the mode of maximum output electric power are singled out separately. On the basis of theoretical prerequisites, a number of options for constructing equivalent circuits and calculation formulas for calculating their parameters are proposed. The results of the work provide for further refinement to take into account not only static, but also dynamic parameters of the equivalent circuit.

**Keywords:** Equivalent circuit, electrokinetic potential, electrokinetic phenomena.

**For citation:** Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Suhorukova I. G., Egorova A. L., A., Orobei I. O., Karpuk P. O. Substitution circuit of electrokinetic converter on shear flow. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 46–53. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-9 (In Russian).

**Введение.** В предыдущих работах [1–3] был представлен ряд конструкций электрокинетических преобразователей (ЭКПр) по использованию сдвигового движения. Там же можно ознакомиться с основными принципами их работы. В источниках [4, 5] получена теоретическая зависимость для интерпретации результатов измерения.

Принцип действия разработанного базового первичного преобразователя представлен на рис. 1.

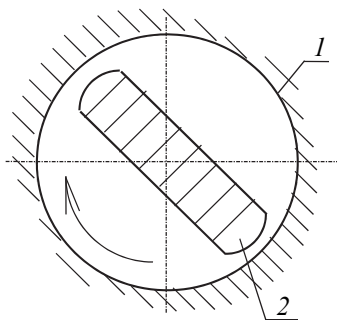


Рис. 1. Принцип создания ЭКПр:  
 1 – неподвижная поверхность; 2 – ротор

Приборы, в основе которых лежит метод переменного потенциала течения, из-за высоких внутренних сопротивлений имеют небольшую выходную электрическую мощность и требуют согласования с регистрирующей электронной аппаратурой.

Пороговая чувствительность электрокинетического преобразования определяется коэффициентом преобразования механического сигнала в электрический собственными электрическими шумами преобразователя и шумами согласующего усилителя. Необходимо отметить, что электродные системы в жидкости при больших внутренних сопротивлениях источника подвержены сильным наводкам.

Функционально при электрокинетическом преобразовании можно выделить две взаимосвязанные системы: механическую и электрическую [5].

В электрическом представлении предлагаемые устройства являются источниками энергии и могут быть представлены в виде реальных источников тока или ЭДС. Существенной особенностью при анализе электрических схем замещения и измерения разработанных ЭКПр является зависимость внутреннего сопротивления электрокинетического генератора от изменения проводимости исследуемой среды и от угла поворота подвижного элемента. Внутреннее сопротивление генератора колеблется в широких пределах, которые зависят от соотношения между шириной капилляра и максимальным расстоянием от текущей поверхности подвижного элемента до внутренней поверхности стакана. При этом из-за влияния поверхностной проводимости имеют место нелинейные эффекты.

Для первичного преобразователя с подвижным элементом, сечение которого представляет



собой усеченную окружность, сигнал можно аппроксимировать трапециевидальной формой. Период сигнала  $T$  определяется частотой вращения подвижного элемента  $f_M$ , количеством пар электродов  $n_1$  и количеством образованных капилляров  $n_2$  следующим образом:

$$T = \frac{1}{n_1 n_2 f_M}. \quad (1)$$

Нижний предел частоты сигнала  $f_n$  определяется упругими и инерционными свойствами среды, верхний предел ограничивается частотой, при которой среда теряет несжимаемость [6], и частотными свойствами электродов:

$$f_n \ll \frac{c}{a}, \quad (2)$$

где  $c$  – скорость света;  $a$  – максимальное расстояние между двумя точками, находящимися в жидкости.

**Разработка схемы замещения.** При расчете параметров ЭКПр чаще всего основываются на феноменологической линейной термодинамической теории необратимых процессов с использованием кинетических уравнений переноса, связывающих потоки массы и электрического заряда [7, 8]:

$$q = a_{11}\Delta P + a_{12}\Delta U; \quad (3)$$

$$I = a_{21}\Delta U + a_{22}\Delta P. \quad (4)$$

При этом выполняется равенство перекрестных коэффициентов:

$$a_{12} = a_{21}. \quad (5)$$

Соотношения (3)–(5) для исследуемого преобразования отличаются от уравнений, задаваемых классической теорией, что является следствием иной причины возникновения тока и потенциала. Учитывая соотношения взаимности и то, что разность потенциалов является следствием напряжения сдвига, уравнения (3) и (4) можно представить в виде

$$q = b_{11}\Delta N + b_{12}\Delta U \Leftrightarrow q = -\frac{\Delta N}{R_{H,C}^0} + \Delta S\Delta U; \quad (6)$$

$$I = b_{21}\Delta U + b_{22}\Delta N \Leftrightarrow I = S\Delta U - \frac{\Delta N}{R_{E,C}^0}. \quad (7)$$

Знаки перед слагаемыми выбираются так, чтобы  $S$  была отрицательна, а  $R_{E,C}^0$  и  $R_{H,C}^0$  – положительны, когда в капилляре осуществляется конвективный перенос положительных ионов, а положительное направление электрического потенциала и скорости жидкости направлено по потоку [5].

Таким образом, при одновременном вращении ротора и действии электрического напряжения на электродах скорость жидкости и электрический ток зависят от  $\Delta N$  и  $\Delta U$  согласно (6) и (7). Из-за обратимости электрокинетических явлений (ЭКЯ) ток, текущий через нагрузочное сопротивление жидкости  $R_{E,P}$ , определяется как

$$I = \frac{\Delta U}{R_{E,P}}. \quad (8)$$

Из (6)–(8) видно, что гидравлическое сопротивление вращению подвижного элемента  $R_{H,C}^0$  и коэффициент преобразования сдвигового движения жидкости  $S$  в электрический ток (чувствительность электрокинетического преобразования по току) при отсутствии электрического напряжения в капилляре (или, что эквивалентно, при  $R_{E,P} = 0$ ) выражаются в виде

$$R_{H,C}^0 = -\left. \frac{\Delta N}{q} \right|_{R_{E,P}=0}; \quad (9)$$

$$S = \left. \frac{I}{\Delta N} \right|_{R_{E,P}=0}. \quad (10)$$

Наличие напряжения  $\Delta U$  на щелевом капилляре создает вращающий момент на подвижном элементе. По аналогии с электроосмотическим насосом [8] такой преобразователь можно назвать электроосмотическим двигателем ( $\Delta U$  преобразуется в механический момент вращения  $\Delta N$ ). В этом случае получаем

$$\Delta N = qR_{H,P}, \quad (11)$$

где  $R_{H,P}$  – гидравлическая нагрузка (сопротивление) вращению.

Из (6), (7) и (11) следует, что электрическое сопротивление капилляра  $R_{E,C}^0$  и коэффициент преобразования  $S$  электрического напряжения в движение ротора (при отсутствии момента сопротивления на валу последнего или при  $R_{H,P} = 0$ ) выражаются в виде

$$R_{E,C}^0 = -\left. \frac{\Delta U}{I} \right|_{R_{H,P}=0}; \quad (12)$$

$$S = \left. \frac{q}{\Delta U} \right|_{R_{H,P}=0}. \quad (13)$$

Правые части (10) и (13) равны в силу соотношения взаимности.

Электрическое сопротивление  $R_{E,C}^0$  зависит от электрокинетических свойств капилляра. Электрический ионный ток, текущий через капилляр под действием приложенного к электродам напряжения, увеличивается благодаря электроосмотическому течению жидкости (13).

Электрическое сопротивление преобразующего капилляра без течения жидкости ( $R_{H,P} = \infty, q = 0$ )

$$R_{E,C}^{\infty} = \frac{\text{grad}(u)}{I} \Big|_{R_{H,P}=0}. \quad (14)$$

Это сопротивление зависит от ЭКП в меньшей степени, чем  $R_{E,C}^0$ . Исключая из (6), (7)  $\Delta N$  при  $q = 0$  и учитывая (14), находим

$$R_{E,C}^0 = \frac{R_{E,C}^{\infty}}{1 + S^2 R_{H,C}^0 R_{E,C}^{\infty}}. \quad (15)$$

Уравнения (6), (7) образуют замкнутую систему относительно  $I, U, N$  и позволяют при заданном  $\Delta N$  и известных  $S, R_{H,C}^0, R_{E,C}^{\infty}, R_{E,P}$  (или  $S, R_{E,C}^0, R_{H,C}^{\infty}, R_{E,P}$ ) определить все выходные характеристики электрокинетического преобразования механической величины в электрическую. Исключая из этой системы  $q$  и учитывая (11), (15), находим выражение для коэффициентов преобразования момента вращения в электрическое напряжение  $\Delta U / \Delta N$ , электрический ток  $I / \Delta N$  и электрическую мощность

$$\frac{W^E}{\Delta N^2} = I \frac{\Delta U}{\Delta N^2}; \quad (16)$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta N} = \frac{S R_{E,P} R_{E,C}^0}{R_{E,C}^0 + R_{E,P}};$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta N} = \frac{S R_{E,C}^0}{R_{E,C}^0 + R_{E,P}}; \quad (17)$$

$$\frac{W}{\Delta N^2} = \frac{S R_{E,P} (R_{E,C}^0)^2}{(R_{E,C}^0 + R_{E,P})^2}. \quad (18)$$

Выражение для гидравлического сопротивления преобразующего капилляра

$$R_{H,C} = -\frac{\Delta N}{q} \quad (19)$$

при произвольном нагрузочном электрическом сопротивлении имеет вид

$$R_{H,C} = R_{H,C}^0 \left( 1 + \frac{S^2 R_{H,C}^0 R_{E,C}^{\infty} R_{E,P}}{R_{E,C}^{\infty} + R_{E,P}} \right). \quad (20)$$

Выражение для электрического сопротивления  $R_{E,M}$  при произвольном нагрузочном гидравлическом сопротивлении  $R_{E,P}$

$$R_{E,C} = -\frac{\Delta U}{I} \quad (21)$$

представляется как

$$R_{E,C} = \frac{R_{E,C}^{\infty}}{1 + S^2 (R_{H,C}^0)^2 \frac{R_{E,C}^{\infty}}{R_{H,C}^0 + R_{H,P}}}. \quad (22)$$

Из (7) следует, что электрокинетический преобразующий элемент является генератором электрического тока, его простейшие схемы замещения показаны на рис. 2 и 3. Обозначения элементов цепей находятся в соответствии с представлением уравнений (6), (7):

$$\left. \begin{aligned} q &= q^0 - q_{back}, \\ I &= I_{St} - I_{back}^0, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где  $q_{back}$  – объемная скорость обратного электроосмотического потока,  $q_{back} = S \Delta U$ ;  $q_0$  – объемная скорость жидкости через капилляр при  $\Delta U = 0$ ;  $q_0 = \Delta N R_{H,C}^0$ ;  $I_{St} = S \Delta N$ ;  $I_{back}^0$  – обратный электрокинетический ток, текущий через капилляр под действием напряжения,  $I_{back}^0 = \Delta U R_{E,C}^0$ . Величины  $-\Delta U, I, R^0, R, I^0, I_{back}$  являются электрическими аналогами механических величин  $\Delta N, q, R_{H,C}^0, R_{H,C}, q^0, q_{back}$ .

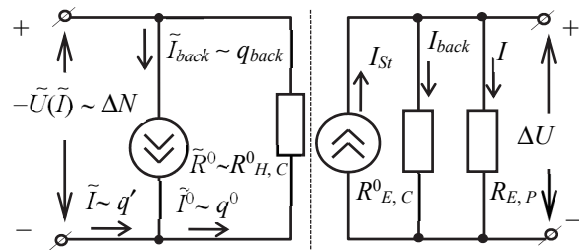


Рис. 2. Эквивалентная электрическая цепь преобразующего элемента согласно кинетическим уравнениям переноса

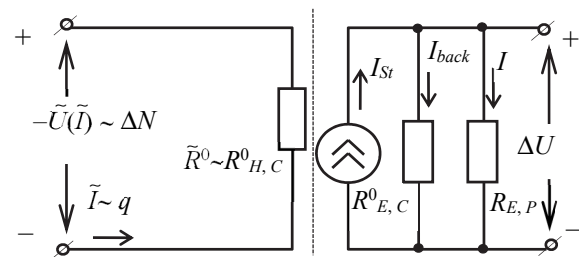


Рис. 3. Простейшая эквивалентная электрическая цепь преобразующего элемента в случае постоянного течения жидкости

Пунктирной линией разделены электрический аналог движения жидкости в капилляре и эквивалентная электрическая цепь ЭКП как генератора тока. Цепь на рис. 4 отличается от цепи на рис. 2 тем, что в последней параллельно соединенные  $R_{H,C}^0$  и электроосмотический двигатель заменены эквивалентным электрическим сопротивлением  $R_{H,C}$  (рис. 5).

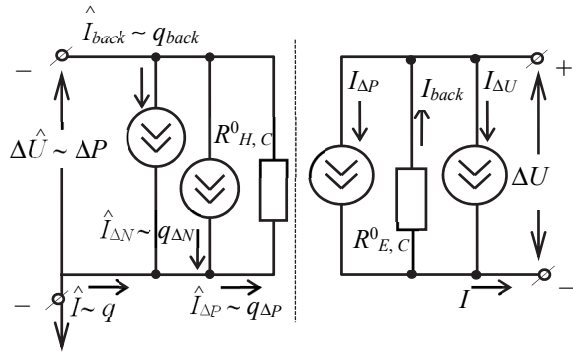


Рис. 4. Схема замещения электрокинетического преобразователя

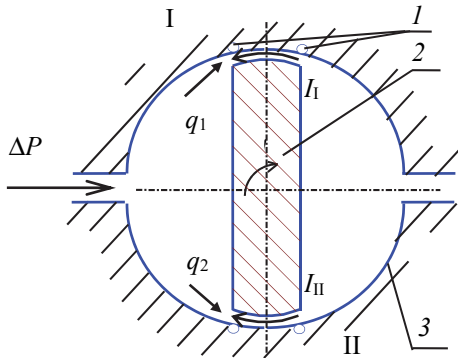


Рис. 5. Геометрия модели преобразователя:  
1 – электроды; 2 – подвижной элемент;  
3 – корпус

Важной характеристикой, от которой зависит нижний порог чувствительности ЭКПр, является КПД преобразования  $\eta_V$ , определяемый как отношение снимаемой с электродов электрической мощности  $W_E = I\Delta U$  к механической мощности  $W = -q\Delta N$ , затрачиваемой на сдвиг жидкости:

$$\eta_V = -\frac{I\Delta U}{q\Delta N}. \quad (24)$$

Умножив числитель и знаменатель правой части (24) на  $\Delta N$  и подставив в нее значения  $\Delta U/\Delta N$ ,  $I/\Delta N$ ,  $R_{H,C}$  из (16), (17), (20), получим:

$$\eta_V = \frac{S^2 R_{H,C} (R_{E,C}^\infty)^2 R_{H,C}^0 (R_{E,C}^\infty + R_{E,P})^{-1}}{(R_{E,C}^\infty + R_{E,P} + S^2 R_{H,C}^0 R_{E,C}^\infty R_{E,P})}. \quad (25)$$

В зависимости от  $R_{E,C}$  возможны различные режимы работы ЭКПр [5].

**Потенциальный режим.** С электродов снимается максимальное напряжение, и коэффициент преобразования  $\Delta P$  в электрическое напряжение (чувствительность ЭКПр по напряжению)  $S_{\Delta U}$  максимален по абсолютной величине. Из (16), (17) видно, что этот режим реализуется в случае

$$R_{E,C}^\infty \ll R_{E,P}. \quad (26)$$

При этом  $I \ll I_{St}$ , а снимаемое напряжение примерно равно  $\Delta U_{St}$ :

$$S_{\Delta U} = \frac{\Delta U}{\Delta N} \Big|_{R_{E,P}=\infty} = \frac{\Delta U_{St}}{\Delta N}; \quad (27)$$

$$S_{\Delta U} = SR_{E,C}^0 = \frac{SR_{E,C}^\infty}{1 + S^2 R_{H,C}^0 R_{E,C}^\infty}. \quad (28)$$

Гидравлическое сопротивление вращению  $R_{H,C}$ , как следует из (20), (26), принимает максимальное значение, приблизительно равное

$$R_{H,C}^\infty = -\frac{\Delta N}{q} \Big|_{R_{E,P}=\infty}, \quad (29)$$

где  $R_{H,C}^\infty$  – гидравлическое сопротивление вращению в капилляре при разомкнутых электродах, когда  $I = 0$  (соответственно при  $R_{E,P} = \infty$ ).

Согласно (20) и (26),

$$R_{H,C}^\infty = R_{H,C}^0 (1 + S^2 R_{H,C}^0 R_{E,C}^\infty). \quad (30)$$

**Токовый режим.** С электродов снимается максимальный ток. Коэффициент преобразования момента вращения в электрический ток (чувствительность ЭКПр по току)  $S_I$  по абсолютной величине имеет максимальное значение. Из (17) следует, что токовый режим реализуется в случае

$$R_{E,C}^\infty \gg R_{E,P}, \quad (31)$$

т. е. при измерении  $\zeta$ -потенциала по методу тока течения.  $S_I$  примерно равен значению тока течения, отнесенного к единице напряжения:

$$S_I = \frac{I}{\Delta N} \Big|_{R_{E,P}=0} = \frac{I_{St}}{\Delta N}; \quad (32)$$

$$S_I = S. \quad (33)$$

**Режим максимального КПД.** Значение  $R_{E,P}$  в этом режиме можно определить по экстремуму функции (25), приравняв производную  $d\eta_V/dR_{E,P}$  к нулю. Максимально возможный КПД и значение  $R_{E,P}^\eta$  при таком КПД:

$$\eta = \frac{\sqrt{1 + S^2 R_{H,C}^0 R_{E,C}^\infty} - 1}{\sqrt{1 + S^2 R_{H,C}^0 R_{E,C}^\infty} + 1}; \quad (34)$$

$$R_{E,P}^\eta = \frac{R_{E,C}^\infty}{\sqrt{1 + S^2 R_{H,C}^0 R_{E,C}^\infty}}. \quad (35)$$

**Режим максимальной выходной электрической мощности.** Экстремум (18) по  $R_{E,P}$  показывает, что коэффициент преобразования квадрата  $\Delta N$  в электрическую мощность  $W^E$  принимает максимальное значение  $S_W$  при  $R_{E,P} = R_{E,C}^0$ :

$$S_W = \frac{S^2 R_{E,C}^\infty}{4(1 + S^2 R_{H,C}^0 R_{E,C}^\infty)} = S^2 \frac{R_{E,C}^0}{4}. \quad (36)$$

При условии

$$S^2 R_{H,C}^0 R_{E,C}^\infty \ll 1 \quad (37)$$

выражения (15), (23), (25) (34), (35) переходят в простые соотношения:

$$\begin{cases} R_{H,C}^0 = R_{H,C}^\infty = R_{H,C}, \\ R_{E,C}^0 = R_{E,C}^\infty = R_{E,C}, \\ R_{E,P}^\eta = R_{E,C}; \end{cases} \quad (38)$$

$$\eta = \frac{S^2 R_{H,C} R_{E,C}}{4}. \quad (39)$$

Последние два соотношения выполняются в случае

$$4\eta \ll 1. \quad (40)$$

Неравенство (40) является критерием необходимости учета обратного электроосмотического вращения, создаваемого на электродах напряжением. Это явление, как и электроосмотическое давление [9–11], следует понимать как разновидность электрокинетического торможения. Оно может характеризоваться отношением  $q^\infty / q^0$ ; где  $q^\infty$  – объемная скорость жидкости через щелевой капилляр, вызванная потенциалом течения при действии обратноосмотического вращения. Если предположить, что электрокинетическое торможение при  $\Delta U = 0$  ( $R_{E,P} = 0$ ) отсутствует, то, как следует из определения  $q^0$ ,  $q^\infty$  и (40),

$$\frac{q^0}{q^\infty} = \frac{R_{H,C}^\infty}{R_{H,C}^0} = 1 + S^2 R_{H,C}^0 R_{E,C}^\infty. \quad (41)$$

Из (34) и (41) получаем зависимость максимального КПД от  $q^0 / q^\infty$ :

$$\eta_0 = \frac{1 - \sqrt{q^0 / q^\infty}}{1 + \sqrt{q^0 / q^\infty}}. \quad (42)$$

Значение  $\eta_0$  монотонно возрастает с увеличением электрокинетического торможения. В электрическую энергию преобразуется только та часть механической, которая идет на преодоление сил генерированного электрического поля. При отсутствии обратного осмоса вся энергия потока рабочей жидкости переходит в тепловую энергию вязкого трения и, согласно (34),  $\eta_0 \rightarrow 0$ . В противном случае (возможном лишь гипотетически)  $\eta_0 \rightarrow 1$ . При этом обратный электроосмос останавливает движение жидкости через капилляр, а выходная электрическая мощность,

согласно (28), стремится к нулю. Максимально достижимый КПД ЭКПр при сдвиговом потоке из-за сложностей реализации будет меньше значения КПД, достигаемого при мембранном преобразовании (не более 1%) [12]. Следовательно, для предложенных ЭКПр практически выполняются соотношения (37)–(39).

В случае одновременного электрокинетического преобразования давления и вращения феноменологические уравнения можно записать в виде

$$q = a_{11} \Delta P + a'_{11} \Delta N + a_{12} \Delta U; \quad (43)$$

$$I = a_{21} \Delta P + a'_{21} \Delta N + a_{22} \Delta U. \quad (44)$$

На основе системы уравнений из [4] уравнения (43), (44) могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} q &= -S' \Delta N + \frac{\Delta P}{R_{H,C}^0} - S \Delta U = \\ &= q_{\Delta N} + q_{\Delta P} - q_{back}; \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} I &= -S'' \Delta N - S \Delta P + \frac{\Delta U}{R_{E,C}^0} = \\ &= I_{\Delta N} + I_{\Delta P} - I_{back}, \end{aligned}$$

где

$$R_{H,C}^0 = \frac{\eta c}{2h^2};$$

$S, S', S''$  – коэффициенты преобразования,

$$S = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 h (\zeta_1 + \zeta_2) (1 - (G_1 + G_2))}{c \eta};$$

$$S' = \frac{3\eta}{2h^3};$$

$$S'' = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 (\zeta_1 - \zeta_2) (1 - (G_1 + G_2))}{c \eta};$$

$$R_{E,C}^0 = \frac{cL}{2h\lambda(1 - (G_1 + G_2))};$$

$q_{\Delta N}, q_{\Delta P}$  – объемные скорости жидкости при  $\Delta P = 0, \Delta U = 0$  и  $\Delta N = 0, \Delta U = 0$  соответственно;  $I_{\Delta N}$  и  $I_{\Delta P}$  – электрокинетический ток при замкнутых электродах при наличии  $\Delta N$  или  $\Delta P$ . Схема замещения на основе системы уравнений (45) показана на рис. 4.

В ЭКПр с двумя щелевыми капиллярами (рис. 5) воздействие на систему сдвига и  $\Delta P$  для каждого из капилляров будет разнонаправленным. Это можно использовать для получения

дополнительной информации о электрокинетических свойствах исследуемой системы. При измерении методом тока течения с учетом малости обратного электроосмотического потока ( $(a_{22} + b_{22})\Delta U \rightarrow 0$ ) уравнение (44) может быть записано для первой ( $I_1$ ) и второй ( $I_{II}$ ) пар электродов:

$$I_1 = I_{\Delta P} + I_{\Delta N}; \quad (46)$$

$$I_{II} = I_{\Delta P} - I_{\Delta N}, \quad (47)$$

где  $I_{\Delta P} = a_{21}\Delta P$ ;  $I_{\Delta N} = a_{21}'\Delta N$ .

После соответствующего преобразования можно получить

$$a_{21} = I_1 + \frac{I_{II}}{2\Delta P}; \quad (48)$$

$$a_{21}' = I_1 - \frac{I_{II}}{2\Delta N}. \quad (49)$$

**Заключение.** Феноменологический подход к электрокинетическим процессам в преобразователе на эффекте сдвига позволил получить схемы замещения ЭКПр для токового и потенциального режимов по постоянному и переменному сигналам.

Схема замещения измерительного преобразователя дает возможность осуществить анализ взаимодействия физических процессов в ЭКПр с измерительной схемой. Наличие перепада давления между входным и выходным патрубками может приводить к различию сигналов на измерительных электродах на противоположных сторонах преобразователя.

### Список литературы

1. Гринюк Д. А., Кузьмицкий И. Ф., Оробей И. О. Первичный преобразователь для измерения электрокинетических характеристик // Приборы и техника эксперимента. 1998. № 3. С. 124–127.
2. Преобразователи электрокинетического потенциала гидродисперсных систем / Д. А. Гринюк [и др.] // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 3. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. С. 106–110.
3. Electrokinetic Converter using AN Unsteady Shift: A Quantitative Model / D. Hryniuk [at al.] // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream). Vilnius, Lithuania, 2019. P. 1–4. DOI: 10.1109/eStream.2019.8732159.
4. Математическая модель формирования измерительного сигнала в электрокинетическом преобразователе переменного сдвига / Д. А. Гринюк [и др.] // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2019. № 2 (224). С. 58–65.
5. Лидоренко Н. С., Ильин Б. И., Зайденман И. А. Введение в молекулярную электронику. М.: Энергоатомиздат, 1984. 320 с.
6. Лепендин Л. Ф. Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
7. Электрохимические преобразователи первичной информации / В. С. Боровков [и др.]. М.: Машиностроение, 1969. 199с.
8. Остерле Д. Электрокинетическое преобразование энергии // Прикладная механика, 1964. № 2. С. 3–6.
9. Фридрихсберг Д. А. Курс коллоидной химии. СПб.: Химия, 1995. 400 с.
10. Theory of electrokinetic flow in fine cylindrical capillaries at high zeta-potential / S. Levine [at al.] // Journal of colloid and interface science. 1975. Vol. 52, no. 1. P. 136–149.
11. Чураев Н. В., Дерягин Б. В. К теории электрокинетических явлений в тонких слоях растворов электролитов // ДАН СССР. 1966, 169. № 2. С. 716–721.
12. Касим-Заде М. С., Халилов Р. Ф., Балашов А. Н. Электрокинетические преобразователи информации. М.: Энергия, 1973. 136 с.

### References

1. Hryniuk D. A., Kuzmitsky I. F., Orobei I. O. Primary transducer for measuring electrokinetic characteristics. *Pribory i tekhnika eksperimenta* [Instruments and Experimental Techniques], 1998, no. 3, pp. 124–127 (In Russian).
2. Hryniuk D. A., Bogoslav N. M., Suhorukova I. G., Orobei I. O., Orobei O. I. Converters of the electrokinetic potential of hydrodispersed systems. *Izvestiya TulGU* [Izvestiya TulGU], 2011, no. 3, pp. 106–110 (In Russian).
3. Hryniuk D., Orobei I., Oliferovich N., Suhorukova I. Electrokinetic Converter using AN Unsteady Shift: A Quantitative Model. *Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream): Open Conference*. Vilnius, 2019, pp. 1–4. DOI: 10.1109/eStream.2019.8732159.
4. Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Orobei I. O., Suhorukova I. G. Mathematical model of formation of measuring signal in electrokinetic converter of variable shift. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2019, no. 2 (224), pp. 58–65 (In Russian).
5. Lidorenko N. S., Il'in B. I., Zajdenman I. A. *Vvedeniye v molekulyarnuyu elektroniku* [Introduction to Molecular Electronics]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1978. 448 p. (In Russian).

6. Lependin L. F. *Akustika* [Acoustics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1984. 320 p.
7. Borovkov V. S., Grafov B. M., Dobrynin E. M. et al. *Elektrokhimicheskiye preobrazovatel'i pervichnoy informatsii* [Electrochemical converters of primary information]. Moscow, Engineering Publ., 1969. 199 p. (In Russian).
8. Osterle D. Electrokinetic energy conversion. *Prikladnaya mekhanika* [Applied mechanics], 1964, no. 2, pp. 3–6 (In Russian).
9. Fridrihsberg D. A. *Kurs kolloidnoy khimii* [Colloid chemistry course]. St. Petersburg, Khimiya Publ., 1995. 400 p. (In Russian).
10. Levine S., Marriot J., Neale G., Epstein N. Theory of electrokinetic flow in fine cylindrical capillaries at high zeta-potential. *Journal of colloid and interface science*, 1975, vol. 52, no. 1, pp. 136–149.
11. Churaev N. V., Deryagin B. V. On the theory of electrokinetic phenomena in thin layers of electrolyte solutions. *DAN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1996, vol. 169, no. 2, pp. 716–721 (In Russian).
12. Kasim-Zade M. S., Halilov R. F., Balashov A. N. *Elektrokineticheskiye preobrazovatel'i informatsii* [Electrokinetic information converters]. Moscow, Energiya Publ., 1973. 136 p. (In Russian).

### Информация об авторах

**Гринюк Дмитрий Анатольевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniuk@tut.by

**Олиферович Надежда Михайловна** – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: oliferovich@belstu.by

**Сухорукова Ирина Геннадьевна** – старший преподаватель кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: irina\_x@rambler.ru

**Егорова Анна Леонидовна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры полимерных композиционных материалов. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: a\_l\_egorova@mail.ru

**Оробей Игорь Олегович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: orobei@tut.

**Карпук Павел Олегович** – студент. Белорусский государственный технологический университет. E-mail: pavel228321@gmail.com

### Information about the authors

**Hryniuk Dzmitry Anatol'yevich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniuk@tut.by

**Oliferovich Nadezhda Mikhaylovna** – Assistant Lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oliferovich@belstu.by

**Suhorukova Irina Gennad'yevna** – Senior Lecturer, the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina\_x@rambler.ru

**Egorova Anna Leonidovna** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Polymer Composite Materials. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a\_l\_egorova@mail.ru

**Orobei Igor Olegovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: orobei@tut.by

**Karpuk Pavel Olegovich** – Student. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: pavel228321@gmail.com

Поступила после доработки 03.02.2023

# ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ PROCESSING AND TRANSMISSION OF INFORMATION

---

УДК 004.56+003.26

**М. Г. Савельева, П. П. Урбанович**

Белорусский государственный технологический университет

## **РАСТРИРОВАНИЕ WEB-ДОКУМЕНТОВ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЕГО ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ СТЕГАНОГРАФИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ АВТОРСКИХ ПРАВ НА ЭЛЕКТРОННЫЙ КОНТЕНТ**

Электронный документ-контейнер, защищаемый от несанкционированного использования или модификации на основе стеганографии, может изначально создаваться как на основе растровой, так и векторной графики. Оригинальный контент при этом может конвертироваться из форматов одной графики в другую. При конвертации или преобразовании текстовых документов-контейнеров одной из важных проблем является растривание текста: контуры букв начинают расплываться, цвет по контуру переходит в градиент. Однако можно воспользоваться этим обстоятельством для внедрения в защищаемый контент тайной информации (цифрового водяного знака, ЦВЗ). Для повышения пропускной способности создаваемого таким образом тайного канала можно использовать преобладающие оттенки среди переходных оттенков растриванных символов. В статье описаны и проанализированы результаты, характеризующие распределения пикселей, составляющих документ-контейнер, по частоте встречаемости различных оттенков из градации серого при конвертации PDF-документов в формат PNG. Это может использоваться как важнейшая входная информация для разработки стеганографических методов защиты электронного контента от несанкционированного использования или модификации (защиты авторского права). Выбор соответствующего цветового оттенка для размещения тайной информации (ЦВЗ) позволяет повышать пропускную способность тайного стеганографического канала, снижать эффективность визуальных или иных атак на стеганоcontainer.

**Ключевые слова:** стеганография, авторское право, осаждение, растривание.

**Для цитирования:** Савельева М. Г., Урбанович П. П. Растривание web-документов и использование его характеристик для стеганографической защиты авторских прав на электронный контент // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 54–63. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-10.

**M. G. Saveleva, P. P. Urbanovich**

Belarusian State Technological University

## **RASTERIZATION OF WEB DOCUMENTS AND THE USE OF ITS CHARACTERISTICS FOR STEGANOGRAPHIC COPYRIGHT PROTECTION OF ELECTRONIC CONTENT**

An electronic document container, protected from unauthorized use or modification based on steganography can initially be created both on the basis of raster and vector graphics. At the same time, the original content can be converted from the formats of one graphic to another. When conversion or transformation of the text container-documents, one of the important problems is the text rasterization: the contours of the letters begin to blur, the color along the contour turns into a gradient. However, it is possible to use this circumstance to embed secret information (digital watermark) into the protected content. To increase the bandwidth of the secret channel created in this way, you can use the prevailing shades among the transitional shades of rasterized characters. The article describes and analyzes the results characterizing the distribution of pixels that make up a certain container document by the frequency of occurrence of various shades of grayscale when converting PDF documents to PNG format. This can be used as the most important input information for the development of stenographic methods

for protecting electronic content from unauthorized use or modification (copyright protection). The choice of the appropriate color shade for the placement of secret information allows you to increase the bandwidth of the secret steganographic channel, reduce the effectiveness of visual or other attacks on the steganocointainer.

**Keywords:** steganography, copyright, deposition, rasterization.

**For citation:** Saveleva M. G., Urbanovich P. P. Rasterization of web documents and the use of its characteristics for steganographic copyright protection of electronic content. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 54–63. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-10 (In Russian).

**Введение.** Следует признать тот факт, что развитие Интернет-технологий характеризуется более высокими темпами по сравнению с развитием законодательной и регламентирующей базы, управляющей деятельностью в Интернете. В соответствии с современными законодательными нормами об авторском праве формальности регистрации и уведомления об авторских правах не требуются [1]. В сфере образования создано много интернет-материалов, которые можно использовать в качестве учебных пособий или в научных исследованиях. Это играет важную роль в реализации образовательных стандартов на основе дистанционных платформ [2].

Доступность цифрового контента в компьютерных сетях и электронных репозиториях облегчает создание точных копий электронных документов. Закон об авторском праве вступает в силу в случае несанкционированного копирования, публикации, исполнения (с помощью цифровых средств или иным образом), публичного показа или пересмотра (создания производных) любых материалов, защищенных авторским правом. Приведенные особенности и факты вызывают необходимость разработки дополнительных мер, соответствующих методов и инструментальных средств для защиты авторских прав на электронный контент [3–5].

Стеганография является одним из ведущих направлений, развитие которого связано, в основном, как раз с решением анализируемой проблемы путем внедрения в защищаемый контент невидимой информации в виде цифрового водяного знака (ЦВЗ) [5–11].

Защищаемый авторскими правами электронный документ может создаваться как на основе растровой, так и векторной графики. Вместе с тем оригинальный контент может конвертироваться из форматов одной графики в другую. Такое изменение формата (без согласования с авторами) может приводить к необратимым (полностью или частично) модификациям стеганокоинтейнера  $S$  (защищаемый документ с ЦВЗ) при обратной конвертации ЦВЗ [5, 7, 10–13].

Растровую графику применяют при разработке электронных и печатных изданий. Иллюстрации, выполнение средствами растровой

графики, изредка создаются вручную с помощью компьютерных программ. Чаще используются отсканированные иллюстрации, подготовленные художником на бумаге, или фотографии. Для ввода растровых изображений в компьютер также используют цифровые фото- и видеокамеры. Основная масса растровых графических редакторов нацелена не столько на создание изображений, сколько на их обработку.

Программные средства для работы с векторной графикой предусмотрены в первую очередь для создания иллюстраций и в меньшей степени – для их обработки. Принципы векторной графики основаны на отличном от пиксельной графики математическом аппарате и имеют целью построение линейных контуров, составленных из элементарных кривых (от геометрических примитивов до кривых Безье), описываемых математическими уравнениями (см., например, [14]).

При редактировании элементов векторной графики изменяются параметры линий, описывающих форму этих элементов. При этом можно переносить элементы, менять их размер, форму и цвет, и это не отразится на качестве их визуального представления. Данный вид графики также не зависит от разрешения выходных устройств [15].

Конвертация документа из растровой графики в векторную возможна только с помощью трассировки (компьютер чертит предполагаемые векторы) или через ручную отрисовку всех элементов изображения. При этом векторная графика легко конвертируется в растровую. В некоторых случаях это происходит автоматически.

В основе многих стеганографических преобразований лежит цветовая модель RGB, представляющая цвета путем объединения трех цветовых каналов: красного, зеленого и синего. Каждый из каналов имеет размер в один байт. Это означает, что цвет одного пикселя представляется в виде трех байтов. Каждый цветовой канал задается 8-разрядным двоичным вектором или его десятичным эквивалентом [5, 6, 8, 16, 17].

Далее проанализируем некоторые выявленные нами важные особенности, которые необходимо учитывать при разработке и реализации



методов текстовой стеганографии на основе векторной и растровой графики.

**Основная часть.** Электронные текстовые документы, проходя через сеть Интернет, либо целенаправленно подвергаясь конвертациям и модификациям, достаточно легко изменяют свое исходное (оригинальное) состояние. Любой из них можно рассматривать как изображение и, соответственно, часть растровой или векторной графики.

При конвертации или преобразовании текстовых документов-контейнеров  $S$  [5, 9, 11] одной из важных проблем является растривание текста. Процесс растривания векторного изображения с заданным разрешением можно представить как наложение на контур растровой сетки с ячейкой и последующим закрашиванием тех ячеек, в которые попадают точки исходной фигуры знака. В зависимости от количества точек, попавших в растровую ячейку, она закрашивается серым цветом с уровнем от 0 до 255. Таким образом, получается полутоновое изображение растрованного знака [18].

Растрованный текст-контейнер ( $C$ ) имеет некоторые ограничения: его нельзя редактировать, изменять оформление, копировать, удалять и т. д. Однако растриванием можно воспользоваться как преимуществом для внедрения в  $C$  тайной информации  $M$  (ЦВЗ).

При растривании символов невозможно сохранить их цвет (рис. 1) и размер (рис. 2) в исходном варианте. При конвертации в иной формат контур буквы начинает расплываться, цвет по контуру переходит в градиент (рис. 1). При этом появляются пиксельные элементы для отображения новых оттенков, т. е. общее количество пикселей для отображения буквы увеличивается (рис. 2). Именно в эти новые пиксели можно внедрять информацию  $M$ . При этом очень важно обеспечить максимально возможный (или заданный) уровень защиты стегано-контейнера  $S$  от различных атак на него, главным образом – визуальных.

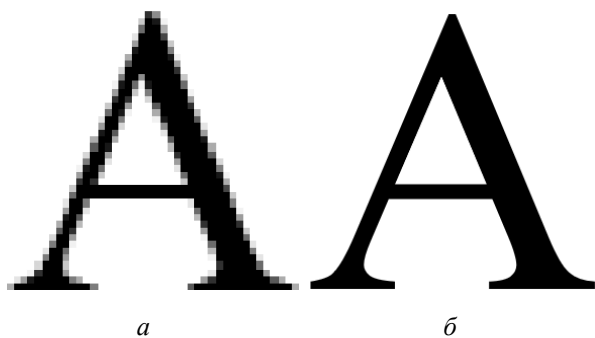


Рис. 1. Пример отображения буквы:  
а – как объект растровой графики;  
б – как объект векторной графики

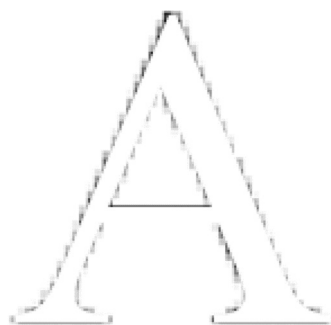


Рис. 2. Дополнительные пиксели, возникающие при растривании символа

При преобразовании PDF-документов в формат PNG следует учитывать, что часть элементов может перейти из векторной графики в растровую. Чаще всего PDF-файл создается на основе файлов различных расширений, предназначенных для работы с текстом (.docx, .doc и т.д.). При конвертации исходного файла в формат PDF часть документа может быть преобразована в растр. Дело в том, что в PDF-документах данные хранятся в виде глифов – объектов изображения или наборов графических команд, применяемых для визуализации символов. Для глифов нет четкой формализации, они могут представлять как текстовые элементы, так и объекты изображений, а некоторые символы могут быть представлены несколькими глифами [19]. Дополнительные сложности связаны с неоднозначной структурой PDF-файлов: визуально одинаковые документы могут быть представлены разными наборами глифов. Распознавание самих элементов и границ областей, в которые они входят, зависит от их расположения в документе и от типов отдельных символов. Этот процесс основан на актуализации таблиц соответствия глифов символам в базе данных [19]. Текстовые символы определяются с помощью извлечения их Unicod-значений и свойств шрифта, а нетекстовые (знаки, скобки, линии и т. д.) и сложные текстовые элементы – посредством перевода в растровый формат и OCR. После того как все составляющие элементов были извлечены, определяются границы областей каждого символа [19].

К элементам, которые имеют большую вероятность «перехода» в растровый формат, относятся различные формулы, матрицы, таблицы, листинги и им подобные, т. е. элементы документа, имеющие более сложное оформление, чем абзац текста (рис. 3).

Для первичного анализа и конвертации файлов нами использовалось приложение Adobe Photoshop. В его интерфейсе бело-серый узор в виде клеток на шахматной доске обозначает прозрачный фон. При просмотре PDF-документа можно увидеть, что в некоторых частях

страницы имеется белый фон (рис. 3). Наличие этого фона означают, что формулы и часть обрамляющего текста растривались, как и схема, фрагмент которой размещен в нижней части рисунка. Если схема изначально могла быть рисунком, то формулы, очевидно, нет. Текст, имеющий отступ от растровых элементов, остался в векторном формате.

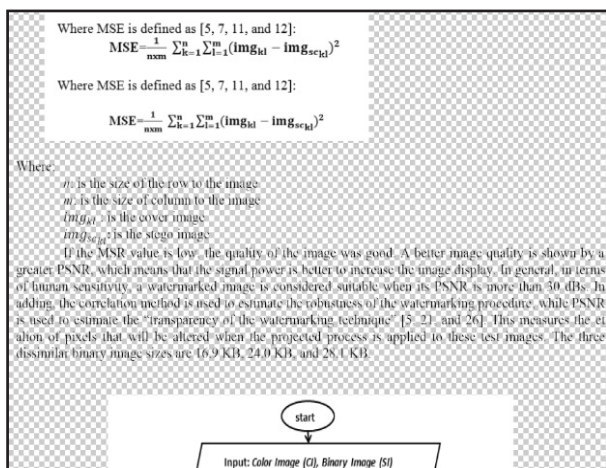


Рис. 3. Фрагмент PDF-документа, содержащий формулу как объект растровой графики

Если на всем документе установился прозрачный фон (рис. 4), то все формулы остались элементами векторной графики, в отличие от рис. 3. Это можно объяснить тем, что при конвертации исходного файла в файл формата PDF, обработчик «не смог» выделить элементы формулы из-за ее сложного оформления (верхний и нижний индексы, наличие индекса у индекса, дроби, структурные операторы, диакритические знаки, крупные операторы с пределами надстрочного (подстрочного) знака и т. д.). Формулы, состоящие из множества различных элементов, с высокой вероятностью будут преобразованы в растр. Простые формулы, в которых четко можно выделить строки и знаки, останутся в векторном формате. Все элементы векторной графики, похожие на рисунок (схема, график, фигуры), растриваются всегда.

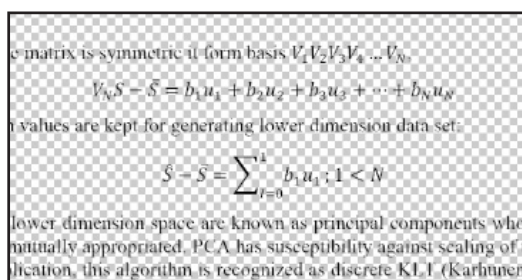


Рис. 4. Фрагмент PDF-документа, содержащий формулу как объект векторной графики

При конвертации PDF-документа в PNG-формат растровые и векторные элементы будут преобразовываться по-разному: растровые сохраняются в таком же виде, а векторные – обрабатываются по группам глифов. Таким образом, сложные элементы фактически будут образованы в окончательном виде при создании PDF-документа из исходного файла иного расширения (.docx, .doc и т. д.). А все остальные – при преобразовании PDF – PNG.

Для повышения пропускной способности стеганоканала, т. е. для внедрения информации  $M$  большего объема в расчете на единицу объема контейнера  $C$ , следует в элементах переходных отренков растрованных символов выделить преобладающие оттенки.

Нами было проанализировано 50 страниц стандартизированного оформления текстовых документов в формате PNG (преобразованных из PDF): 8 содержали элементы, которые либо обязательно преобразуются в растр при конвертации в PDF (схемы, графики, фигуры), либо уже являются таковыми (рисунки); 17 страниц содержали различные элементы сложного оформления (формулы, таблицы, листинги), которые могут стать растровыми; 25 – содержали только текст. Перечисленные источники разделены условно на 4 группы: 1) все документы; 2) чисто текстовые документы; 3) документы с элементами сложного оформления (формулы, таблицы, листинги); 4) страницы с наличием растровых фрагментов.

На рис. 5–7 представлены полученные усредненные результаты появления пикселей определенного цветового оттенка, соответствующего коду от 0 до 255 для каждого канала модели RGB.

Следует отметить, что на всех проанализированных страницах объем текстовой информации превышает объем информации, представленной в другом виде. Понятно, что на большинстве анализируемых страниц преобладают черно-белые оттенки, за исключением нескольких, имеющих небольшие (до 1% от всего объема) вкрапления иного цвета (рамка, стрелка и т. д.). Так как документы содержат в основном обычный текст, то большинство пикселей окрашены в белый (255, 255, 255) либо в черный (0, 0, 0) цвет.

Для красного канала R (рис. 5) наибольшие относительные частоты отмечены для кодов, соответствующих следующим десятичным значениям данного цвета: 0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153, 170, 187, 204, 221, 238, 255, несколько меньшие – для следующих кодов: 64, 79, 94, 123, 152, 167, 192, 196, 226, 233, 236, 237, 253, 254. Как видно, проявляется некоторая периодическая зависимость между пиковыми значениями частоты.

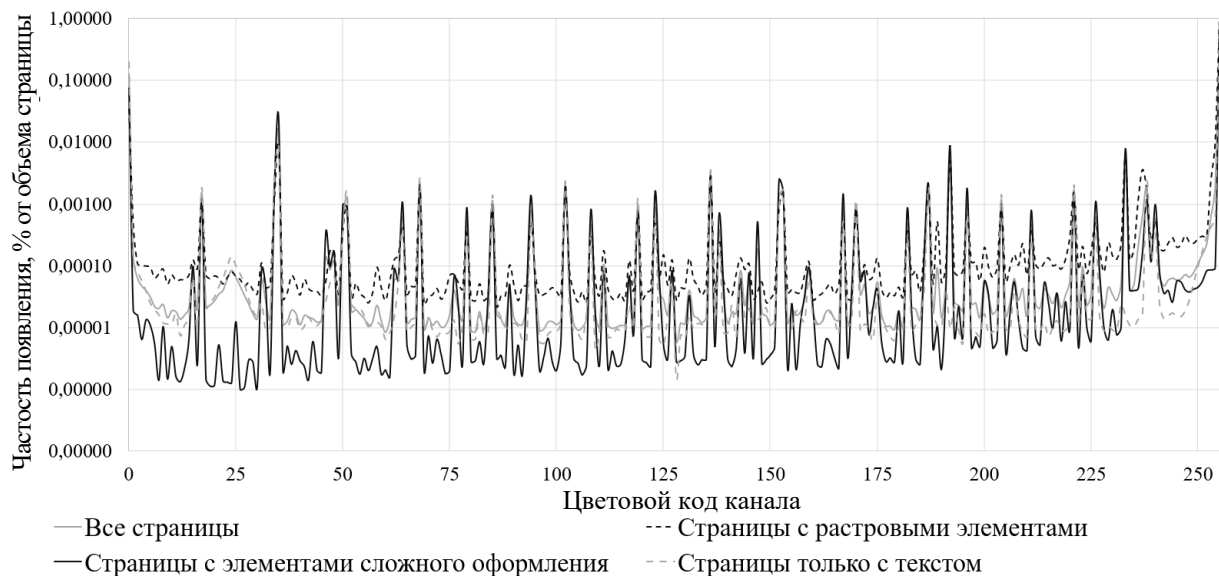


Рис. 5. Распределение пикселей по цветовым оттенкам для канала R

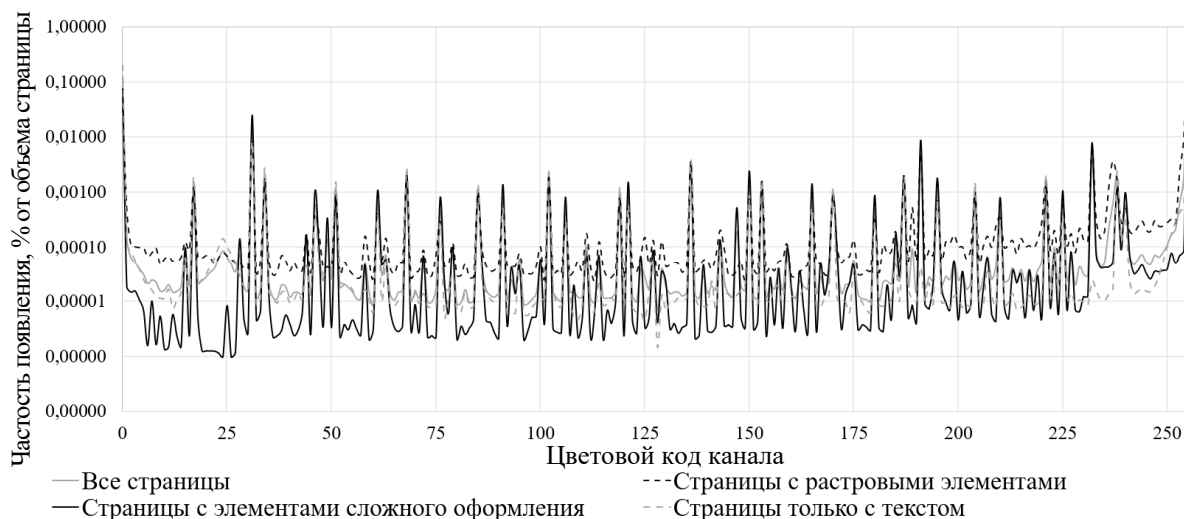


Рис. 6. Распределение пикселей по цветовым оттенкам для канала G

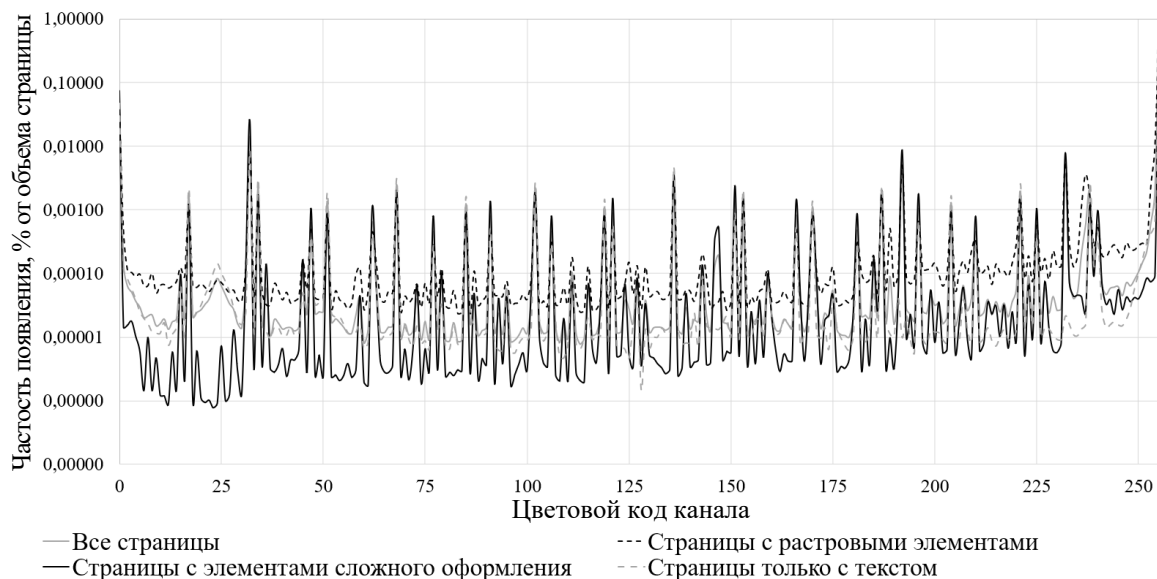


Рис. 7. Распределение пикселей по цветовым оттенкам для канала B

Для канала G (рис. 6) соответственно: 0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153, 170, 187, 204, 221, 238, 255 и 31, 46, 61, 76, 91, 106, 121, 150, 165, 180, 191, 195, 210, 225, 232, 236, 237, 253, 254.

И, наконец, для канала В (рис. 7) соответственно: 0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153, 170, 187, 204, 221, 238, 255 и 32, 46, 62, 77, 91, 106, 121, 147, 151, 166, 181, 192, 196, 210, 225, 232, 236, 237, 253, 254.

Как видно из сравнения полученных распределений, различия между характеристиками каналов практически минимальны.

Пиковые значения для первой из двух рассматриваемых групп (0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153, 170, 187, 204, 221, 238, 255) во всех распределениях соответствуют цвету от черного (0) до белого (255) для 16 различных оттенков: 0 0 0; 17 17 17; ...; 255 255 255) (рис. 8). Так как белый цвет – это фон, то оставшиеся 15 оттенков соответствуют отображениям элементов буквенных символов.



Рис. 8. Градация оттенков серого при растривании символов текста

Такое количество оттенков необходимо для отображения всех растриванных букв с учетом особенностей их строения.

Для форматирования и оформления документов приняты, как известно, определенные правила. В общем виде их можно описать так: для печатных документов – шрифт Times New Roman; для документов, обрабатываемых преимущественно в электронном виде, возможно также применение шрифтов Arial, Helvetica, Verdana; размер 12–14 пт – для основного текста; 10–14 пт – для таблиц и подписей.

Отметим, что Times New Roman – гарнитура на основе засечкового шрифта. Засечка – небольшой узкий штрих, расположенный на конце основного штриха, перпендикулярно ему. Arial, Helvetica, Verdana – гарнитуры, на основе гротеска, рубленого шрифта (шрифт без засечек).

Для выделения преобладающих переходных оттенков, возникающих при растривании из гарнитуры Times New Roman, проанализируем этот шрифт, а из гарнитур Arial, Helvetica, Verdana – шрифт Arial, как наиболее популярные. Так как кириллический алфавит более сложен по сравнению с латинским (из-за наличия шипящих «Ж», «Ч», «Ш», «Щ», «Ц» и йотированных гласных «Я», «Ю»), то проанализируем именно кириллицу, в частности строчные графемы [20].

В источнике [21] приведена классификация букв в зависимости от формы штрихов (строчные и прописные графемы могут относиться к разным группам):

- буквы первой группы, состоящие только из вертикальных и горизонтальных штрихов, – «Г», «Е», «Н» и др. (рис. 9);
- буквы второй группы, состоящие только из вертикальных и горизонтальных и наклонных линий, – «А», «Ж», «И» и др. (рис. 10);
- буквы третьей группы, в которых прямые штрихи соединяются с округлыми, – «Б», «В», «Ч» и др. (рис. 11);
- буквы четвертой группы (круглые буквы) – «З», «О», «С» и др. (рис. 12).

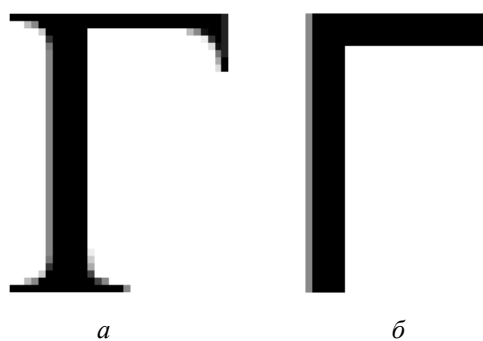


Рис. 9. Пример буквы первой группы: а – шрифт Times New Roman; б – шрифт Arial

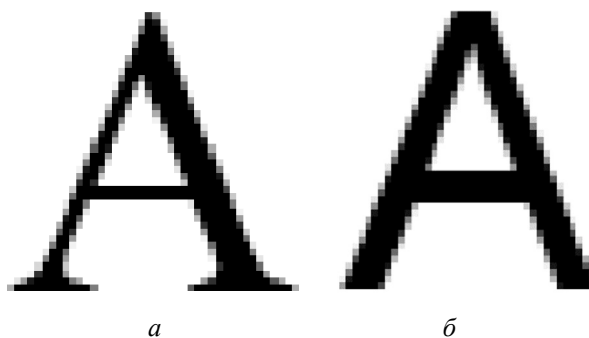


Рис. 10. Пример буквы второй группы: а – шрифт Times New Roman; б – шрифт Arial

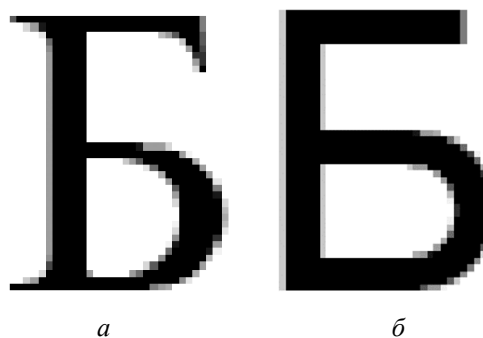


Рис. 11. Пример буквы третьей группы: а – шрифт Times New Roman; б – шрифт Arial

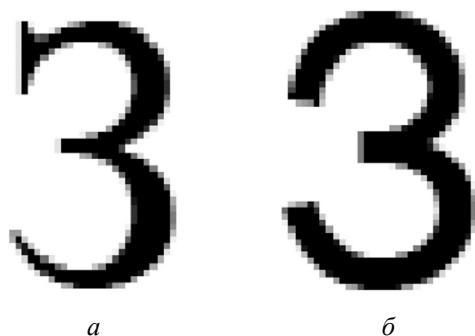


Рис. 12. Пример буквы четвертой группы:  
а – шрифт Times New Roman; б – шрифт Arial

Для анализа отображения символов использовалась панграмма (текст, состоящий из всех или почти всех букв алфавита) для русского языка: «Съешь же ещё этих мягких французских булок, да выпей чаю». Результат приведен в таблице.

#### Количество оттенков для отображения графемы

Гра- фема	Times New Roman			Arial		
	10pt	12pt	14pt	10pt	12pt	14pt
а	<b>17</b>	15	15	15	15	15
б	15	15	15	15	15	15
в	15	14	14	14	15	15
г	<b>14</b>	14	13	4	3	3
д	15	15	15	15	15	15
е	15	15	15	15	15	15
ё	15	15	15	15	15	15
ж	15	15	15	15	15	14
з	14	14	15	15	15	15
и	15	15	14	15	15	15
й	15	15	15	14	15	15
к	15	14	<b>17</b>	14	15	15
л	<b>14</b>	<b>15</b>	15	9	10	11
м	15	14	15	15	15	15
н	<b>13</b>	13	12	4	4	2
о	15	15	15	15	15	15
п	11	10	10	4	3	3
р	14	14	15	15	15	15
с	15	15	15	15	15	15
т	15	13	15	4	4	4
у	15	15	15	15	15	15
ф	15	15	15	15	15	15
х	15	14	15	15	15	15
ц	13	15	14	6	6	5
ч	13	15	15	13	14	14
ш	15	15	15	6	5	5
щ	15	15	15	6	5	6
ъ	15	14	15	12	14	14
ы	15	15	15	12	13	14
ь	13	14	14	13	15	14
э	15	15	15	15	15	15
ю	15	<b>17</b>	15	15	15	15
я	15	15	15	15	15	15

Графемы, имеющие дополнительно иные оттенки, выделены полужирным курсивным начертанием.

Исходя из табличных данных можно сказать, что буквы из первой группы при написании шрифтом Arial имеют в разы меньше оттенков при отображении на экране. Кроме того, остальные буквы хотя и имеют одинаковое или близкое к одинаковому число оттенков при написании шрифтами Arial и Times New Roman, но число пикселей, соответствующих каждому из оттенков, при использовании Arial меньше. Наиболее часто встречаются оттенки: (17, 17, 17), (34, 34, 34), (68, 68, 68), (102, 102, 102), (136, 136, 136), (153, 153, 153), (187, 187, 187).

Среди особенностей шрифта Times New Roman можно выделить пересечение границ букв (слияние букв, рис. 13). Чем меньше кегль, тем больше буквы сливаются друг с другом и имеют больше общих пикселей. В таком случае недостаточно 15 оттенков для отображения символа. Единичные пиксели имеют иные промежуточные оттенки серого.

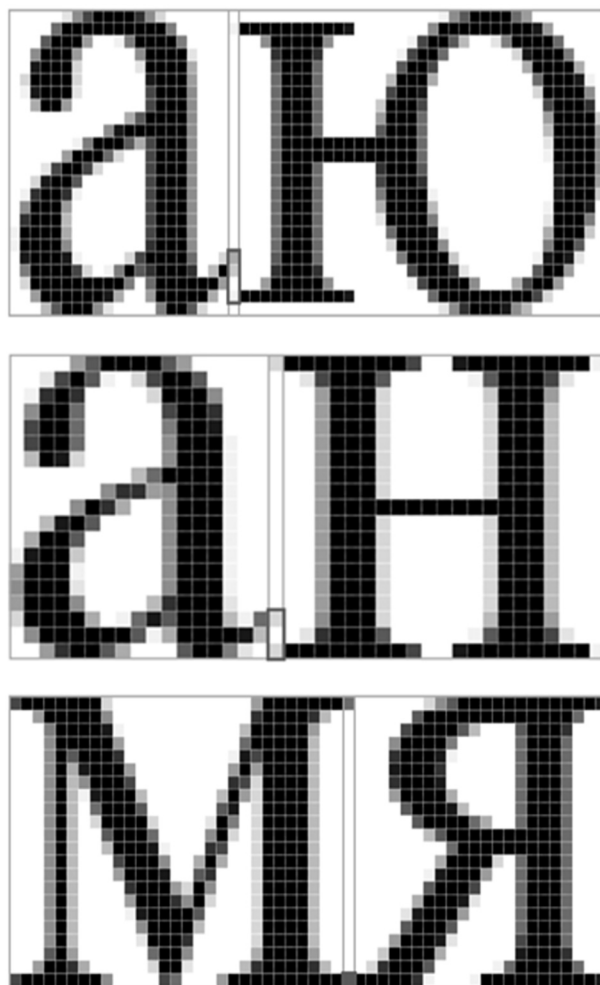


Рис. 13. Слияние букв при использовании шрифта Times New Roman

К слиянию «склонны» графемы, имеющие такие элементы, как «хвост», «нога», «капля», «ухо», концевой элемент или графемы засечковых шрифтов [19]. Брусковые шрифты имеют заданное расстояние между графемами, что помогает избежать слияния.

**Заключение.** Проведенный анализ выявил наиболее часто встречающиеся оттенки из градации серого при конвертации PDF-документов в формат PNG.

Установлено, что наименьший разброс значений частоты появления оттенка (с кодом от 0 до 255) свойственен простым текстовым документам. Для них можно выделить следующие оттенки (R, G, B) как наиболее часто проявляющиеся (17, 17, 17), (34, 34, 34), (68, 68, 68), (102, 102, 102), (136, 136, 136), (153, 153, 153), (187,

187, 187). Для остальных элементов отмечается 16 равномерно распределенных оттенков с кодами от 0 до 255: (0, 0, 0), (17, 17, 17), (34, 34, 34), ..., (255, 255, 255). Так как белый цвет (255, 255, 255) – это фон страницы, то только 15 оттенков используются для отображения символов.

Полученные результаты являются важнейшей входной информацией для разработки стеганографических методов защиты электронного контента от несанкционированного использования или модификации (защиты авторского права) при конвертации этого контента в иной формат. Выбор соответствующего цветового оттенка для размещения тайной информации (ЦВЗ) позволяет повышать пропускную способность тайного стеганографического канала, снижать эффективность визуальных или иных атак на стеганоcontainer.

### Список литературы

1. Reichman J. H., Okediji R. L. When Copyright Law and Science Collide: Empowering Digitally Integrated Research Methods on a Global Scale // *MinnLawRev.* 2012. Vol. 96 (4). P. 1362–1480.
2. Урбанович П. П., Блинова Е. А., Ржеутская Н. В. Дистанционное обучение: тенденция, естественный процесс или вынужденная мера? // *Информационные технологии в образовании, науке и производстве: VIII Междунар. науч.-техн. интернет-конф.*, 21–22 ноября 2020 года. Минск: БНТУ, 2020. С. 116–122.
3. Kim, M. The creative commons and digital protection in the digital era: uses of Creative Commons licenses // *Journal of Computer-Mediated Communication.* 2008. Vol. 13. P. 187–209.
4. Micunovic M., Balkovich, L. Author's rights in the digital age: how Internet and peer-to-peer file sharing technology shape the perception of copyrights and copywrongs // *Libellarium Journal for the Research of Writing Books and Cultural Heritage Institutions.* 2016. Vol. 8 (2). P. 27–64. DOI: 10.15291/libellarium.v0i0.232.
5. Урбанович П. П. Защита информации методами криптографии, стеганографии и обфускации. Минск: БГТУ, 2016. 220 с.
6. Шутько Н. П. Защита авторских прав на электронные текстовые документы методами стеганографии // *Труды БГТУ.* 2013. № 6 (162): Физико-математические науки и информатика. С. 131–134.
7. Блинова Е. А., Урбанович П. П. Сравнительные особенности использования стеганографических методов в электронных картах // *Информационные технологии в промышленности, логистике и социальной сфере (ITI-2019): тез. докл. X Междунар. науч.-техн. конф.*, Минск, 23–24 мая 2019 г. Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2019. С. 22–25.
8. Шутько Н. П., Урбанович П. П. Защита авторских прав на текстовые документы на основе стеганографической модификации цвета символов текста // *Информационные технологии: материалы 83-й науч.-техн. конф. проф.-препод. состава, науч. сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 4–15 февраля 2019 г.* Минск: БГТУ, 2019. С. 41–43.
9. Шутько Н. П., Листопад Н. И., Урбанович П. П. Моделирование стеганографической системы в задачах по охране авторских прав // *Информационные технологии в промышленности (ITI 2015): тез. докл. Восьмой Междунар. науч.-техн. конф.* Минск, 2015. С. 30–31.
10. Блинова Е. А. Стеганографический метод на основе изменения междустрочного расстояния неотображаемых символов строк электронного текстового документа / Е. А. Блинова // *Труды БГТУ.* 2016. № 6 (188): Физико-математические науки и информатика. С. 166–169.
11. Shutko N., Urbanovich P., Zukowski P. Method of syntactic text steganography based on modification of the document-container aprosh // *PrzeglądElektrotechniczny.* 2018. Vol. 6. P. 82–85. DOI:10.15199/48.2018.06.15.
12. Chang C. S., Nguyen T.-S. A Reversible Data Hiding Scheme for SMVQ Indices // *Informatica.* 2014. Vol. 25, no. 4, pp 523–540. DOI: <http://dx.doi.org/10.15388/Informatica.2014.27>.
13. Almutairi A. A Comparative Study on Steganography Digital Images: A Case Study of Scalable Vector Graphics (SVG) and Portable Network Graphics (PNG) Images Formats // *(IJACSA) International Journal of Advanced Computer Science and Applications.* 2018. Vol. 9, no. 1. P. 170–175.

14. Blinova E. A., Urbanovich P. P. Steganographic method based on hidden messages embedding into Bezier curves of SVG images // *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021. No. 3. P. 68–83. DOI: <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-68-83>.

15. Новиков А. Н., Фирсов А. В., Каршакова Л. Б. Развитие традиционных и появление новых художественных стилей под влиянием компьютерной графики // *Вестник славянских культур*. 2021. Т. 60. С. 282–297. URL: <https://doi.org/10.37816/2073-9567-2021-60-282-297> (дата обращения: 12.10.2022).

16. Савельева М. Г., Урбанович П. П. Метод стеганографического преобразования web-документов на основе растровой графики и модели RGB // *Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика*. 2022. № 2 (260). С. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.52065/2520-6141-2022-260-2-99-107>.

17. Prasad S., Pal A. K. An RGB colour image steganography scheme using overlapping block-based pixel-value differencing // *Royal Society Open Science*. 2017. Vol. 4. 16 p. DOI: 10.1098/rsos.161066.

18. Агеев В. Н., Соломыков В. С. Моделирование процесса растривания векторных шрифтов в выводных устройствах низкого разрешения // *Известия ТулГУ. Технические науки*. 2013. № 3. С. 9–16.

19. Быканова А. С. Методы распознавания математических формул в электронных документах // *Актуальные проблемы авиации и космонавтики*. 2018. № 14. С. 133–134.

20. Рыжанкова А. С. Анатомия буквы: анализ названий элементов // *Труды БГТУ*. 2022. Сер. 4, Принт- и медиатехнологии. 2022. № 1 (255). С. 131–139. DOI: <https://doi.org/10.52065/2520-6729-2022-255-1-131-139>.

21. Тоотс Виллу. Современный шрифт. М.: Книга, 1966. 272 с.

### References

1. Reichman J. H., Okediji R. L. When Copyright Law and Science Collide: Empowering Digitally Integrated Research Methods on a Global Scale. *MinnLawRev*, 2012, vol. 96 (4), pp. 1362–1480.

2. Urbanovich P. P., Blinova E. A., Rzhetskaya N. V. Distance learning: a trend, a natural process or a forced measure? *Informatsionnyye tekhnologii v obrazovanii, nauke i proizvodstve: VIII Mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskaya internet-konferentsiya* [Information Technologies in Education, Science and Production: VIII International Scientific and Technical Internet Conference]. Minsk, 2020, pp. 116–122. (In Russian).

3. Kim, M. The creative commons and digital protection in the digital era: uses of Creative Commons licenses. *Journal of Computer-Mediated Communication*, 2008, vol. 13, pp. 187–209.

4. Micunovic M., Balkovich, L. Author's rights in the digital age: how Internet and peer-to-peer file sharing technology shape the perception of copyrights and copywrongs. *Libellarium Journal for the Research of Writing Books and Cultural Heritage Institutions*, 2016, vol. 8 (2), pp. 27–64. DOI: 10.15291/libellarium.v0i0.232.

5. Urbanovich P. P. *Zashchita informatsii metodami kriptografii, steganografii i obfuskatsii* [The protection of information based on the methods by cryptography, steganography and obfuscation]. Minsk, BGTU Publ., 2016. 220 p. (In Russian).

6. Shutko N. P. Copyright protection for electronic text documents using steganography methods. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6 (162): Physics and Mathematics. Informatics, pp. 131–134 (In Russian).

7. Blinova E. A., Urbanovich P. P. Comparative features of the use of steganographic methods in electronic maps. *Informatsionnyye tekhnologii v promyshlennosti, logistike i sotsial'noy sfere (ITI-2019): tezisy dokladov X Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Information technologies in industry, logistics and social sphere (ITI-2019): abstracts X International scientific and technical conference]. Minsk, 2019, pp. 22–25 (In Russian).

8. Shutko N., Urbanovich P. Copyright protection for text documents based on steganographic modification of the color of text symbols. *Informatsionnyye tekhnologii: materialy 83-y nauchno-tekhnicheskoy konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunarodnym uchastiyem)* [Information technologies: materials of the 83rd scientific and technical conference of the faculty, researchers and graduate students (with international participation)]. Minsk, 2019, pp. 41–43 (In Russian).

9. Shutko N., Listopad N., Urbanovich P. Modeling a steganographic system in problems of copyright protection. *Informatsionnyye tekhnologii v promyshlennosti (ITI'2015): tezisy dokladov Vos'moy Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Information Technologies in Industry (ITI'2015): abstracts Eighth International Scientific and Technical Conference]. Minsk, 2015, pp. 30–31 (In Russian).

10. Blinova E. A. Steganographic method based on changing the line spacing of non-displayed characters of lines of an electronic text document. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6 (188): Physics and Mathematics. Informatics, pp. 166–169 (In Russian).

11. Shutko N., Urbanovich P., Zukowski P. A method of syntactic text steganography based on modification of the document-container aprosh. *Przegląd Elektrotechniczny*, 2018, vol. 6, pp. 82–85. DOI: 10.15199/48.2018.06.15.
12. Chang C. C., Nguyen T.-S. A Reversible Data Hiding Scheme for SMVQ Indices. *Informatica*, 2014, vol. 25, no. 4, pp. 523–540. DOI: <http://dx.doi.org/10.15388/Informatica.2014.27>.
13. Almutairi A. A Comparative Study on Steganography Digital Images: A Case Study of Scalable Vector Graphics (SVG) and Portable Network Graphics (PNG) Images Formats (*IJACSA International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2018, vol. 9, no. 1, pp. 170–175.
14. Blinova E. A., Urbanovich P. P. Steganographic method based on hidden messages embedding into Bezier curves of SVG images. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2021, no. 3, pp. 68–83. DOI: <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-68-83>.
15. Novikov A. N., Firsov A. V., Karshakova L. B. The development of traditional and the emergence of new artistic styles under the influence of computer graphics. *Vestnik slavyanskikh kul'tur* [Herald of Slavic Cultures], 2021, vol. 60, pp. 282–297. Available at: <https://doi.org/10.37816/2073-9567-2021-60-282-297> (accessed 12.10.2022). (In Russian).
16. Saveleva M. G., Urbanovich P. P. Method of steganographic transformation of web-documents based on raster graphics and RGB model. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2022, no. 2, pp. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.52065/2520-6141-2022-260-2-99-107> (In Russian).
17. Prasad S., Pal A. K. An RGB colour image steganography scheme using overlapping block-based pixel-value differencing. *Royal Society Open Science*, 2017, vol. 4, 16 p. DOI: 10.1098/rsos.161066.
18. Ageyev V. N., Solomykov V. S. Modeling the process of rasterization of vector fonts in low-resolution output devices. *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskkiye nauki* [News of TulGU. Technical science], 2013, no. 3, pp. 9–16. (In Russian).
19. Bykanova A. S. Methods for recognizing mathematical formulas in electronic documents. *Aktual'nyye problemy aviatsii i kosmonavтики* [Actual problems of aviation and astronautics], 2018, no. 14, pp. 133–134. (In Russian).
20. Ryzhankova A. S. Anatomy of a letter: analysis of the names of elements *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 4, Print- and Mediatechnologies, 2022, no. 1, pp. 131–139. DOI: <https://doi.org/10.52065/2520-6729-2022-255-1-131-139> (In Russian).
21. Toots Willu. *Sovremennyy shrift* [Modern typeface]. Moscow, Kniga Publ., 1966. 272 p. (In Russian).

### Информация об авторах

**Савельева Маргарита Геннадьевна** – аспирант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [saveleva@belstu.by](mailto:saveleva@belstu.by).

**Урбанович Павел Павлович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [p.urbanovich@belstu.by](mailto:p.urbanovich@belstu.by).

### Information about the authors

**Saveleva Margarita Gennadijevna** – PhD student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [saveleva@belstu.by](mailto:saveleva@belstu.by)

**Urbanovich Pavel Pavlovich** – DSc (Engineering), Professor, Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [p.urbanovich@belstu.by](mailto:p.urbanovich@belstu.by)

Поступила 28.11.2022



УДК 003.26

**А. Н. Николайчук<sup>1</sup>, П. П. Урбанович<sup>1,2</sup>**<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет<sup>2</sup>Люблинский Католический университет Яна Павла II, Польша**СТЕГАНОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ  
ОСОБЕННОСТЕЙ ОТОБРАЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОРМАТЕ SVG**

Рассмотрены важные особенности файлов векторной графики, уникальная структура SVG-файлов, а также особенности формирования элементов, составляющих графические объекты в данном цифровом формате. Проанализированы области просмотра файла SVG и их параметры. Содержимое SVG-файла описывается на бесконечном холсте любого размера. Однако при описании фигур необходимо учитывать области просмотра изображения. На основе анализа вышеперечисленных особенностей параметров отображения геометрических фигур в данной статье обоснован и описан новый стеганографический метод и реализующие его алгоритмы встраивания (извлечения) скрытых данных при использовании векторных изображений формата SVG в качестве стеганоконтейнера. Одним из важных типов элементов таких контейнеров являются кривые Безье. В качестве модифицируемых параметров контейнера используются координаты, описывающие ключевые точки кривых Безье. Внедрение тайной информации в файл-контейнер предполагает формирование координат ключевых точек кривой Безье и размещение последовательности этих точек на кривой. При этом кривая будет иметь значения координат, превышающих границы отображения (видимости) объектов изображения. Представлено авторское программное средство, реализующее разработанный метод. Показаны примеры использования приложения. Метод и программное средство могут использоваться для защиты электронного контента от несанкционированного применения.

**Ключевые слова:** стеганография, векторные изображения, SVG-формат, viewport, кривая Безье.

**Для цитирования:** Николайчук А. Н., Урбанович П. П. Стеганографический метод на основе использования особенностей отображения элементов в формате SVG // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 64–70. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-11.

**A. N. Nikolaichuk<sup>1</sup>, P. P. Urbanovich<sup>1,2</sup>**<sup>1</sup>Belarusian State Technological University<sup>2</sup>The John Paul II Lublin Catholic University**A STEGANOGRAPHIC METHOD BASED ON THE USE  
OF THE FEATURES OF ELEMENTS DISPLAYING IN SVG FORMAT**

The important features of vector graphics files, the unique structure of SVG files, as well as the features of the formation of elements that make up graphic objects in this digital format are considered. The viewing areas of the SVG file and their parameters are analyzed. The contents of the SVG file are described on an infinite canvas of any size. However, it is necessary to take into account the viewing areas of the image to describe shapes. Based on the analysis of the above-mentioned features of the parameters for displaying geometric shapes, this article substantiates and describes a new steganographic method and algorithms for embedding/extracting hidden data by using vector images of the SVG format as a steganocontainer. One of the important types of elements of such containers are Bezier curves. Coordinates, which set key points of Bezier curves are used as modifiable container parameters. Data hiding into a container file involves the creation of key points' coordinates of the Bezier curve and the insertion of a sequence of this curve points. In this case, the curve will have coordinates' values that exceed the area of the displaying (visibility) of the image objects. Special software application implementing the developed method is presented. Examples of using the application are shown. The method and software can be used to protect electronic content from unauthorized use.

**Keywords:** steganography, vector graphics, SVG, viewport, Bezier curve.

**For citation:** Nikolaichuk A. N., Urbanovich P. P. A steganographic method based on the use of the features of elements displaying in SVG format. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 64–70. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-11 (In Russian).

**Введение.** В настоящее время информация со всеми ее важными свойствами и особенностями использования стала важнейшим экономическим ресурсом. Обеспечение безопасности информационных ресурсов – одна из самых важных задач в ИТ-сфере. Эти ресурсы нуждаются в защите от несанкционированного доступа, кражи, изменения либо уничтожения.

Одним из способов решения анализируемой проблемы является применение методов стеганографии, которые позволяют скрыто передавать данные внутри некоторого информационного объекта – носителя информации или контейнера.

Применение методов стеганографии в цифровых объектах (цифровой стеганографии) предполагает преобразование контейнера (файла, в котором скрывают данные) таким образом, чтобы внесенные изменения не отразились на визуальном отображении модифицированного контейнера – стеганоконтейнера [1]. Одним из таких стеганоконтейнеров являются файлы векторной графики, которые в последнее время становятся объектом изучения специалистов в области стеганографии и являются активно используемыми при создании web-ресурсов.

Векторная графика представлена широким разнообразием форматов, например, PDF, AI, EPS, CDR, SVG. Уникальным среди форматов векторной графики является формат SVG (Scalable Vector Graphics), имеющий структуру XML-документа, который на самом деле является текстовым файлом. Следовательно, к таким файлам могут быть применены классические методы текстовой стеганографии, а также методы, применяемые к файлам разметки: методы подмены и перестановки атрибутов или метод замены регистра тегов [2–4].

SVG имеет много преимуществ перед web-приложением: например динамическое отображение данных и интерактивность. По мере расширения области использования графики SVG в коммерческих web-приложениях для обмена или публикации данных несанкционированное копирование и распространение данных на основе SVG становится проблемой защиты авторских прав для создателей и владельцев многих web-приложений [5–10].

В данной статье предлагается новый стеганографический метод внедрения (извлечения) данных с использованием векторных изображений, а также описываются алгоритмы его реализации.

**Основная часть.** Хотя структура SVG-формата позволяет оперировать текстом, ценность формата заключается в описании графических объектов. Объекты в SVG основаны на математическом представлении элементарных геометрических фигур, таких как линии, круги, окружности,

эллипсы, многоугольники. Они размещаются в файле с помощью специальных тегов, которые описывают каждую фигуру, учитывая ее особенности. Например, для описания круга, необходимо указать название тега `<circle>` и поставить значения атрибутов  $sx$  – координата центра круга по оси  $X$ ;  $sy$  – координата центра круга для оси  $Y$ ;  $r$  – значение радиуса [3–5].

Для создания сложных графических объектов используется общий элемент `<path>`. Тег `<path>` определяется одним атрибутом –  $d$ , содержащим серию команд и параметров, используемых этими командами, которые определяют траекторию и направление линии фигуры. Команды обозначаются буквами. Например, команда  $M$  в качестве параметров принимает координаты точки, обозначающей начальное положение; команда  $L$  принимает координаты и рисует прямую линию от текущего положения к этой точке; команда  $Z$  используется для замыкания контура. Вместе с тем для создания плавных кривых линий существует несколько различных команд, среди которых – отрисовка кривых Безье [11]. С помощью элемента `<path>` можно описывать и примитивы, используя для этого соответствующие команды. Однако чаще всего этот тег используется для изображения фигур, состоящих из комбинации линий разного типа. Поэтому такие фигуры могут включать до нескольких сотен и даже тысяч значений координат, что позволяет тегу быть контейнером с большой емкостью [6–7].

Содержимое SVG-файла описывается на бесконечном холсте и может быть любого размера, однако при описании фигур необходимо учитывать его области просмотра. Их две: системная (*viewport*) и пользовательская. Начало координат области *viewport* располагается в левом верхнем углу экрана и не объявляется. Для того чтобы задать размеры этой области, необходимо установить значение атрибутов корневого тега `<svg>`: *height* – высота и *width* – ширина. Пользовательская область просмотра устанавливается с помощью атрибута *viewBox*, значение которого принимает четыре параметра. С помощью последних задаются размеры: *min-x* – начало оси координат  $X$ ; *min-y* – начало оси координат  $Y$ ; *width* – ширина; *height* – высота.

SVG позволяет управлять как размерами *viewport*, так и поведением содержимого относительно него: растягиваться (масштабироваться) с потерей пропорций, увеличиваться или уменьшаться в масштабе, и самое главное – обрезать. Этим поведением можно управлять с помощью изменения параметров областей просмотра. Таким образом, можно описывать фигуры, которые по значениям координат находятся за пределами границ областей просмотра

содержимого, но при этом не будут видны в изображении. Эта особенность имеет принципиальное значение для разработки стеганографических методов. Мы также ее использовали в нашем методе.

Для наглядности и понимания сущности метода рассмотрим два изображения, в которых фигуры описаны одинаково, различие составляют лишь значения ширины и высоты.

На рис. 1 показано содержимое изображения с квадратами, которые определены с помощью команд для рисования кривой Безье. Так как значения ширины и высоты изображения не установлены, обе фигуры видны пользователю (рис. 2).

```
<svg xmlns="http://www.w3.org/2000/svg">
  <path d="M10 10 H 90 V 90 H 10 L 10 10" fill="red"/>
  <path d="M110 10 H 190 V 90 H 110 L 110 110" fill="black"/>
</svg>
```

Рис. 1. Содержимое файла SVG без установленных значений ширины и высоты области *viewport*



Рис. 2. Файл SVG без установленных значений ширины и высоты области *viewport*

Содержимое изображения на рис. 3 представлено точно такими же квадратами, как и на рис. 1. Однако во втором случае (рис. 3) границы видимости (того, что видит пользователь), то есть размер ширины и высоты изображения (указываются в атрибутах *width* и *height* тега *<path>*), имеют значения в 100 пикселей. Кривая Безье, отображающая квадрат черного цвета, имеет значения начальной точки с координатой 110 пикселей по оси *X* и 10 пикселей по оси *Y*.

```
<svg width="100" height="100"
  xmlns="http://www.w3.org/2000/svg">
  <path d="M10 10 H 90 V 90 H 10 L 10 10" fill="red"/>
  <path d="M110 10 H 190 V 90 H 110 L 110 110" fill="black"/>
</svg>
```

Рис. 3. Содержимое файла SVG с установленными значениями ширины и высоты изображения

Значение, установленное для начальной точки по оси *X*, превышает ширину изображения, установленную в атрибуте *width*, как и все последующие координаты по оси *X*, что делает фигуру невидимой для пользователя. Точно

таким же образом можно описывать фигуры, превышающие значения высоты изображения.



Рис. 4. Файл SVG с установленными значениями ширины и высоты изображения

С помощью этих условий фигуры, описанные в содержимом файла, не отображаются на экране (рис. 4): данная область является невидимой.

На основе использования вышеперечисленных особенностей параметров видимости геометрических фигур и предлагается новый метод встраивания данных в векторное изображение. В качестве модифицируемых параметров контейнера используются координаты, описывающие ключевые точки кривых Безье, так как графический объект такого типа может иметь наибольшее число значений, которыми можно описать фигуру.

Осаждение скрытой информации осуществляется путем создания кривой со значениями координат ключевых точек, вычисленных таким образом, чтобы кривая создавалась с координатами, превышающими значения ширины и высоты изображения. Необходимо хранить эти значения, но существуют также изображения, в которых они не установлены. В этом случае используются значения рассмотренного выше атрибута *viewBox*. Если же и он отсутствует, эти значения будут вычисляться путем удвоения самых больших значений координат, относящихся ко всем графическим объектам.

Чтобы однозначно определить пользователя (владельца ресурса – контейнера), для него генерируется уникальная псевдослучайная последовательность, состоящая из шести цифр. Обозначим ее *U*. Каждая из этих цифр будет использоваться для формирования кривой и размещения тайной информации в контейнере.

Для того чтобы рассматриваемые координаты превышали видимую область изображения, значения ширины и высоты перемножаются на некоторое число. Этим числом является первая цифра пользовательского кода:  $U_1$  ( $U_1 \in U$ ;  $U_1 > 1$ ). Обозначим результаты этих вычислений так: *W* – для ширины и *H* – для высоты:

$$W = U_1 \cdot width; \quad (1)$$

$$H = U_1 \cdot height. \quad (2)$$

Четыре следующие цифры  $U_2 - U_5$  ( $U_2, \dots, U_5 \in U$ ) используются для внедрения сообщения. Вычисление координат кривой Безье осуществляется с помощью сообщения, представленного в бинарном виде, которое разбивается на пары, каждая пара при этом имеет порядковый номер  $-j$ . Каждая координата кривой определяет отдельную бинарную пару. Для вычисления этих координат используется одно из значений пользовательского кода, которое определяется следующим образом: если значением бинарной пары будет комбинация '00' – в формировании кривой используется  $U_2$  (вторая цифра кода), аналогично для пары '01' –  $U_3$ , '10' –  $U_4$ , '11' –  $U_5$ . При вычислении координат кривой с внедренным сообщением используется произведение  $j \cdot U_i$ , для того чтобы параметры кривой не дублировались.

Так как кривая Безье создается с помощью ключевых точек, которые обозначаются координатами по осям  $x$  и  $y$ , то целесообразно вычислять для разных осей разные значения, так как ширина и высота изображения могут не совпадать.

Для вычисления координат предлагаются следующие формулы:

$$Kx = W \cdot (1 + j \cdot U_i / 10^{c+1}); \quad (3)$$

$$Ky = H \cdot (1 + j \cdot U_i / 10^{c+1}), \quad (4)$$

где  $i = 2 - 5$ ;  $c$  – количество разрядов произведения  $j \cdot U_i$ .

Отметим также, что координаты в SVG-изображениях могут принимать самые различные значения, например, 1000 или 0,00001, поэтому в (3) и (4) используется выражение, которое даст возможность вычислять кривую, ориентируясь на размеры изображения, что позволит при одних и тех же значениях пользовательского кода и сообщения формировать разные кривые Безье.

Чтобы связать кривую с содержимым исходного файла, необходимо определить тег  $E$ . Для этого используется последняя цифра кода –  $U_6$  следующим образом:

$$E = n \bmod U_6. \quad (5)$$

В зависимости от содержимого контейнера параметр  $n$  из (5) будет вычисляться по-разному:

1) если файл SVG содержит теги  $\langle path \rangle$ , то  $n$  – количество таких тегов; в таком случае в  $E$  будет внедряться сообщение и его начальные координаты,  $Sx$  (для оси  $X$ ) и  $Sy$  (для оси  $Y$ ), будут использоваться при вычислении параметров кривой;

2) если файл не содержит теги  $\langle path \rangle$ , то  $n$  – количество тегов, описывающих геометрические объекты. В таком случае ключевые координаты  $E$  ( $Sx$  и  $Sy$ ) будут использоваться при вычислении параметров кривой, а для

самой кривой создается новый тег, который будет размещен после вычисленного.

В результате для определения координат ключевых точек предлагается использовать следующие эмпирические выражения:

$$x = W \cdot (1 + j \cdot U_i / 10^{c+1}) + Sx; \quad (6)$$

$$y = H \cdot (1 + j \cdot U_i / 10^{c+1}) + Sy. \quad (7)$$

Использование начальных значений координат тега  $E$  в формулах (6) и (7) позволяет повысить устойчивость стеганоконтейнера к операциям сдвига изображения. Это осуществляется благодаря тому, что необходимая информация для внедрения секретного сообщения вычисляется по формулам (3) и (4), а начальные значения прибавляются в формулах (6) и (7) лишь для того, чтобы вычисленные значения оставались неизменными при условии, если все графические объекты будут сдвинуты. Такая операция сдвига может рассматриваться как тип несанкционированной модификации стеганоконтейнера.

Для рассматриваемого метода нет ограничения на использование определенных изображений, но в качестве рекомендации предлагается использовать файлы, содержащие кривые Безье.

Рассмотрим алгоритм стеганографического внедрения тайной информации на основе предлагаемого метода. Этот алгоритм состоит в выполнении следующих операций.

1. Сгенерировать пользовательский код  $U$ .
2. Сформировать внедряемое сообщение  $M$ .
3. Преобразовать сообщение в бинарную последовательность (обозначим ее  $B$ ).
4. Разбить  $B$  на пары, присваивая каждой паре порядковый номер  $j$ .
5. Выбрать файл-контейнер  $C$ .
6. Если значения границ областей просмотра  $viewport$  ( $width$  и  $height$ ) и  $viewBox$  существуют, перейти к п. 8, иначе – к п. 7.
7. Определить максимальные значения координат по осям  $x$  и  $y$  и установить эти удвоенные значения в атрибуты  $width$  и  $height$  тега  $\langle svg \rangle$  соответственно.
8. Вычислить значения параметров  $W$  и  $H$ , используя (1) и (2).
9. Подсчитать общее количество фигур ( $n$ ) файла-контейнера и вычислить остаток от деления  $E$  на последнюю цифру пользовательского кода  $U_6$  с помощью (5).
10. Получить значения координат начальной точки элемента  $E$  ( $Sx$  и  $Sy$ ).
11. Вычислить координаты ключевых точек с помощью формул (6) и (7).
12. Сформировать кривую Безье, состоящую из команд и соответствующих им координат (на основе вычисленных значений ключевых точек).
13. Если тег  $E$  является элементом  $\langle path \rangle$ , перейти к п. 15, иначе – к п. 14.

14. Создать тег `<path>` с атрибутом  $d$  и задать ему значение сформированной кривой, перейти к п. 16

15. Добавить к имеющемуся значению атрибута  $d$  значение сформированной кривой, перейти к п. 16.

16. Сформировать SVG-файл.

Для извлечения сообщения  $M$  из стеганоконтейнера необходимо использовать следующий алгоритм.

1. Определить пользовательский код  $U$ .

2. Получить файл-стегоконтейнер  $C$ .

3. Получить значения границ областей просмотра  $C$ : `viewport` ( $width$  и  $height$ ) и `viewBox`.

4. Вычислить значения постоянных  $W$  и  $H$ , перемножив значения атрибутов  $width$  и  $height$  тега с первой цифрой пользовательского кода  $U_1$ , используя (1) – для значений  $width$  и (2) – для значений  $height$ .

5. Подсчитать общее количество элементов  $n$  файла-контейнера и вычислить остаток от деления  $E$  на последнюю цифру пользовательского кода ( $U_6$ ), используя (5). С учетом особенностей внедрения сообщения из-за содержимого файла  $n$  для извлечения будет определяться по-другому:

5.1) если файл-контейнер содержит больше одного элемента `<path>`, то  $n$  – количество элементов `<path>`;

5.2) если элемент `<path>` один и значения всех ключевых точек больше значений  $width$  и  $height$ , то  $n$  – количество всех графических объектов – 1;

5.3) если элемент `<path>` один и не все значения ключевых точек больше значений  $width$  и  $height$ , то  $n$  – количество элементов `<path>`.

6. Вычислить тег со значениями кривой, превышающими  $width$  и  $height$ .

Если файл-контейнер содержит больше одного элемента `<path>` и вычисленный тег совпадает с  $E$ , значит, содержимое исходного сообщения  $M$  не изменялось.

Если элемент `<path>` один и значения всех ключевых точек больше значений  $width$  и  $height$ , и вычисленный тег совпадает с тегом, следующим после  $E$ , то содержимое  $M$  не изменялось.

Если элемент `<path>` один и не все значения ключевых точек больше значений  $width$  и  $height$ , и вычисленный тег совпадает с  $E$ , значит, содержимое  $M$  не изменялось.

7. Получить значения координат начальных точек тега  $E$ :  $S_x$  и  $S_y$ .

8. Получить координаты ключевых точек кривой Безье, которые размещаются за границами областей просмотра, присваивая каждой координате порядковый номер  $j$ .

9. Последовательно вычислить значения с помощью следующих формул:

$$M_x = ((x - S_x) / W - 1) / j; \quad (8)$$

$$M_y = ((y - S_y) / H - 1) / j. \quad (9)$$

10. Из-за того, что при внедрении учитывается количество разрядов произведения  $j \cdot U_i$ , необходимо рекурсивно умножать значения  $M_x$  и  $M_y$ , пока оно не будет больше единицы. Для полученных параметров сопоставить значения бинарных пар в соответствии с пользовательским кодом следующим образом: если значение  $M_x$  будет равно  $U_2$ , то бинарной парой будет '00', аналогично для  $U_3$  – '01',  $U_4$  – '10',  $U_5$  – '11'.

11. Из бинарных пар п. 10 сформировать бинарную последовательность.

12. Преобразовать сообщение из бинарной последовательности п. 11 в символьную строку.

Для демонстрации предложенного метода нами разработано приложение. В качестве технологии для создания приложения была выбрана ASP.NET MVC для удобного отображения SVG-изображений и выполнения необходимых манипуляций с элементами разметки за счет реализации представления с помощью файлов `cshtml`. Кроме того, использовалась библиотека `System.Xml.XmlDocument` для работы с XML-файлами, а также были созданы классы, аналогичные фигурам в SVG, что упрощает работу со значениями их атрибутов. Были созданы классы `Embedder` и `Extractor` для реализации функций внедрения и извлечения сообщения.

Для инициализации приложения необходимо зарегистрироваться, чтобы для пользователя была вычислена псевдослучайная последовательность, которая будет являться пользовательским кодом ( $U$ ). Затем выбирается файл-контейнер  $C$ .

SVG-файл отображается в двух вариантах: непосредственно изображение и его содержимое.

После этого вводится сообщение  $M$ . При нажатии кнопки «ОК» сообщение внедряется в SVG-файл, затем, при успешном внедрении, изменение можно наблюдать в окне `Содержимое`, при этом само изображение остается неизменным. И осадженный файл  $M$  будет доступен для скачивания (рис. 5).

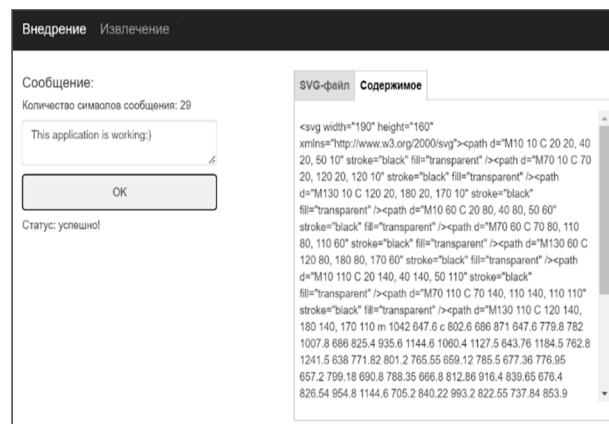


Рис. 5. Вид окна приложения после внедрения сообщения в контейнер

Для извлечения сообщения необходимо авторизоваться и выбрать файл с внедренным сообщением.

Если элементы содержимого файла не подвергались модификациям, то сообщение успешно извлекается из контейнера (рис. 6).



Рис. 6. Вид окна приложения после извлечения сообщения из контейнера

**Заключение.** Цифровые изображения, содержащие большое число геометрических фигур, в особенности элементов с тегом *<path>*, являются хорошими стеганографическими контейнерами с точки зрения объема внедряемой тайной информации и устойчивости стеганоконтейнеров к случайным или преднамеренным модификациям.

SVG позволяет управлять как размерами *viewport*, так и поведением содержимого относительно него: растягиваться (масштабироваться)

с потерей пропорций, увеличиваться или уменьшаться в масштабе, и самое главное – обрезать. Этим поведением можно управлять с помощью изменения параметров областей просмотра. Таким образом, можно описывать фигуры, которые по значениям координат находятся за пределами границ областей просмотра содержимого, но при этом не будут видны в изображении. На этой основе разработан описанный в статье стеганографический метод. Ввиду особенности формирования кривой Безье метод позволяет минимизировать увеличение размера исходного файла, так как сообщение внедряется в содержимое файла, которое не отображается на экране вовсе, не приводя фигуры к искажению и используя все контрольные точки. В этом состоит отличие предлагаемого метода от известных методов данного класса. Кроме того, при реализации предложенного метода нет ограничений на длину внедряемого в файл-контейнер тайного сообщения, так как координаты отображаемых фигур не задействованы в необходимых вычислениях. Такие вычисления координат повышают устойчивость стеганоконтейнера к атакам на основе аффинных преобразований.

Представляет научный и практический интерес дальнейшее расширение исследований в данной предметной области, связанное с оценкой пропускной способности канала на основе предложенных стеганографических преобразований и уточнением уровня стеганографической стойкости метода к различным типам атак.

### Список литературы

1. Урбанович П. П. Защита информации методами криптографии, стеганографии и обфускации. Минск: БГТУ, 2016. 220 с.
2. Blinova E., Shutko N. The use of steganographic methods in SVG format graphic files // Proc. of the 10th Intern. Conf. New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation. Lublin, 2015. P. 45.
3. Text Steganography utilizing XML, HTML And XHTML Markup Languages / S. Imran [et al.] // International Journal of Computational Geometry & Applications. 2017. № 3. P. 99–116.
4. Almutairi A. A Comparative Study on Steganography Digital Images: A Case Study of Scalable Vector Graphics (SVG) and Portable Network Graphics (PNG) Images Formats // (IJACSA) International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2018. Vol. 9, no. 1. P. 170–175.
5. Блинова Е. А., Урбанович П. П. Стеганографический метод на основе встраивания дополнительных значений координат в изображения формата SVG // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2018. № 1. С. 104–109.
6. Николайчук А. Н., Урбанович П. П. Анализ стеганографических методов на основе контейнеров SVG-формата // Информационные технологии: материалы 86-й науч.-техн. конф. проф.-препод. состава, научных сотрудников и аспирантов, Минск, 31 января – 12 февраля 2022 г. Минск, 2022. С. 49–51.
7. Николайчук А. Н., Урбанович П. П. Стеганография в векторных изображениях // 73-я науч.-техн. конф. учащихся, студентов и магистрантов: сб. науч. работ, Минск, 18–23 апреля 2022 г. Минск: БГТУ, 2022. С. 947–949.
8. Zhou X. and Pan. X. Watermark-Based Scheme to Protect Copyright of SVG Data, 2006 International Conference on Computational Intelligence and Security. 2006. P. 1199–1202. DOI: 10.1109/ICCIAS.2006.295245.

9. Badr Almutairi. A New Steganography Method for Scalable Vector Graphics (SVG) Images Based On An Improved LSB Algorithm // *International Journal of Computer Science and Network Security*. 2019. Vol. 19, no. 10. P. 99–104.

10. Kuznetsov A., & Kononchenko G. Steganographic methods in vector graphics // *Radiotekhnika*. 2021. № 2 (205). P. 32–41. DOI: 10.30837/rt.2021.2.205.03.

11. Blinova E. A., Urbanovich P. P. Steganographic method based on hidden messages embedding into Bezier curves of SVG images // *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021. No. 3. P. 68–83. DOI: <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-68-83>.

### References

1. Urbanovich P. P. *Zashchita informatsii metodami kriptografii, steganografii i obfuskatsii* [Information protection by cryptography, steganography and obfuscation methods]. Minsk, BGTU Publ., 2016. 220 p. (In Russian).

2. Blinova E., Shutko N. The use of steganographic methods in SVG format graphic files. *Proc. of the 10th Intern. Conf. "New Electrical and Electronic Technologies and their Industrial Implementation"*. Lublin, 2015, p. 45.

3. Imran S. [et al.]. Text Steganography utilizing XML, HTML And XHTML Markup Languages. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 2017, no 3, pp. 99–116.

4. Almutairi A. A Comparative Study on Steganography Digital Images: A Case Study of Scalable Vector Graphics (SVG) and Portable Network Graphics (PNG) Images Formats. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2018, vol. 9, no. 1, pp. 170–175.

5. Blinova E. A., Urbanovich P. P. A steganographic method based on the embedding of additional coordinates into images of SVG format. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1, pp. 104–109 (In Russian).

6. Nikolaichuk A. N., Urbanovich P. P. Analysis of steganographic methods based on SVG-format containers. *Informatsionnyye tekhnologii: materialy 86-y nauchno-tekhnicheskoy konferentsii professorsko-prepodavatelskogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov* [Information technologies: materials of the 86th Scientific and Technical Conference of the teaching staff, researchers and postgraduates]. Minsk, 2022, pp. 49–51 (In Russian).

7. Nikolaichuk A. N., Urbanovich P. P. Steganography in vector images. *73-ya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya uchashchikhsya, studentov i magistrantov: sbornik nauchnykh rabot* [73rd Scientific and Technical Conference of students, undergraduates and undergraduates: collection of scientific papers]. Minsk, 2022, pp. 947–949 (In Russian).

8. Zhou X. and Pan X. Watermark-Based Scheme to Protect Copyright of SVG Data. *International Conference on Computational Intelligence and Security*, 2006, pp. 1199–1202. DOI: 10.1109/ICCIAS.2006.295245.

9. Badr Almutairi. A New Steganography Method for Scalable Vector Graphics (SVG) Images Based On An Improved LSB Algorithm. *International Journal of Computer Science and Network Security*, 2019, vol. 19, no. 10, pp. 99–104.

10. Kuznetsov A., & Kononchenko G. Steganographic methods in vector graphics. *Radiotekhnika*, 2021, no. 2 (205), pp. 32–41. DOI: 10.30837/rt.2021.2.205.03.

11. Blinova E. A., Urbanovich P. P. Steganographic method based on hidden messages embedding into Bezier curves of SVG images. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2021, no. 3, pp. 68–83. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-68-83.

### Информация об авторах

**Николайчук Александра Николаевна** – магистрант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [nikolaichukalexandra@gmail.com](mailto:nikolaichukalexandra@gmail.com)

**Урбанович Павел Павлович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [p.urbanovich@belstu.by](mailto:p.urbanovich@belstu.by)

### Information about the authors

**Nikolaichuk Aleksandra Nikolaevna** – Master's degree student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [nikolaichukalexandra@gmail.com](mailto:nikolaichukalexandra@gmail.com)

**Urbanovich Pavel Pavlovich** – DSc (Engineering), Professor, Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [p.urbanovich@belstu.by](mailto:p.urbanovich@belstu.by)

Поступила 30.12.2022

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ

## SYSTEMS ANALYSIS AND TRAINING SYSTEMS

---

УДК 004.048

**С. Г. Шульдова, А. И. Парамонов, Д. М. Карнаух, Н. В. Лапицкая**  
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

### **АНАЛИЗ НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ КАФЕДРЫ В КОНТЕКСТЕ ПРИОРИТЕТНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ИССЛЕДОВАНИЙ И НАУЧНОГО СОТРУДНИЧЕСТВА**

В статье рассмотрены методы наукометрического анализа в контексте решаемых задач наукометрии. Предложен подход к решению задачи выявления научных сообществ и оценки научного взаимодействия сотрудников структурного подразделения (на примере кафедры программного обеспечения информационных технологий БГУИР). Выполнена постановка задачи и приведено ее формальное описание. Для апробации предложенного подхода получен набор данных из открытых профилей сотрудников Google Академии. После предварительной обработки, включающей дедупликацию и очистку данных, сформированы лексический корпус и терм-документная матрица, преобразованная в матрицу смежности, на основе которой построен граф соавторства. Рассмотрены основные параметры графа и выполнена кластеризация его вершин. Для кластеризации использован метод, оптимизирующий значение модулярности. Так как модулярность зависит от числа шагов перехода из одной вершины в другую, компьютерный эксперимент проведен при различных значениях параметра. В результате выявлены одиннадцать сообществ, соответствующих максимальному значению модулярности. Проанализированы некоторые характеристики сообществ: процент внешних авторов, продуктивность и цитируемость. Выработаны рекомендации по возможному использованию результатов анализа научной деятельности на кафедре. Обозначены пути дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** наукометрия, метод, анализ, взаимодействие, граф соавторства, кластеризация, модулярность, сообщества.

**Для цитирования:** Шульдова С. Г., Парамонов А. И., Карнаух Д. М., Лапицкая Н. В. Анализ научной деятельности кафедры в контексте приоритетных направлений исследований и научного сотрудничества // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 71–76. DOI: 10.52065/2025-6141-2023-266-1-12.

**S. G. Shuldova, A. I. Paramonov, D. M. Karnaukh, N. V. Lapitskaya**  
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

### **ANALYSIS OF SCIENTIFIC ACTIVITIES OF THE DEPARTMENT IN THE CONTEXT OF PRIORITY DIRECTIONS OF RESEARCH AND SCIENTIFIC COOPERATION**

The article deals with the methods of scientometric analysis in the context of the tasks of scientometrics to be solved. An approach is proposed for solving the problem of identifying scientific communities and assessing the scientific interaction of employees of a structural subdivision (on the example of the Information Technology Software Department of BSUIR). The problem is formulated and its formal description is given. To test the proposed approach, a data set was obtained from public profiles of Google Academy employees. After pre-processing, including data deduplication and cleaning, a lexical corpus and a term-document matrix are formed, which are converted into an adjacency matrix, on the basis of which a co-authorship graph is built. The main parameters of the graph are considered and the clustering of its vertices is performed. For clustering, a method was used that optimizes the value of modularity. Since modularity depends on the number of transition steps from one vertex to another, a computer experiment was carried out for different values of the parameter. As a result, 11 communities were identified, corresponding to the maximum value of modularity. Some characteristics of communities are analyzed:



the percentage of external authors, productivity and citation. Recommendations on the use of information on scientific activities at the department have been developed. Ways for further research are outlined.

**Keywords:** scientometrics, method, analysis, interaction, co-authorship graph, clustering, modularity, communities.

**For citation:** Shuldova S. G., Paramonov A. I., Karnaukh D. M., Lapitskaya N. V. Analysis of scientific activities of the department in the context of priority directions of research and scientific cooperation. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 71–76. DOI: 10.52065/2025-6141-2023-266-1-12 (In Russian).

**Введение.** В настоящее время для измерения продуктивности научной деятельности отдельных исследователей, научно-исследовательских организаций и университетов широко используются наукометрические методы, которые основаны на оценке конечных результатов научной деятельности: статей, монографий, методических разработок, пособий и книг. Данные методы также применяют для выявления актуальных и перспективных научных направлений, детектирования научных сообществ, предотвращения массового тиражирования работ, лишения ценности.

Среди методов наукометрического анализа, как правило, выделяют [1]:

- количественную оценку элементов документального информационного потока (ДИП);
- цитатный анализ;
- семантический анализ текстов научных публикаций.

Применение того или иного метода обуславливается решаемой с его помощью задачей [2], а реализация может осуществляться средствами различных технологий.

**Основная часть.** Методы количественной оценки ДИП обеспечивают решение таких задач, как распределение публикаций по типу издания, странам и учреждениям, подготовившим и издавшим научные документы; видам научных документов (книги, патенты и авторские свидетельства, публикации в журналах и т. д.) и носителей; количеству авторов; тематической направленности публикаций или журналов; числу библиографических ссылок в публикациях; «возрасту» публикаций; языковой принадлежности научных документов; объему документов и т. д.

Методы цитатного анализа позволяют определять вклад в мировую науку отдельных ученых и научных учреждений, выявлять структуру областей знания и даже прогнозировать их развитие. Библиографические ссылки являются своеобразными «индикаторами» информационных связей между научными документами и их авторами, необходимым условием научной этики.

Наряду с анализом цитирования при выявлении приоритетных направлений и детектировании научных сообществ часто используются методы семантического анализа метаданных и

полных текстов научных публикаций. В контент-анализе исследуется частотность употребления слов в метаданных и полных текстах и отдельно – ключевых слов, а также их совместная встречаемость в публикациях. Контент-анализ позволяет выявлять тенденции развития научных дисциплин и отдельных научных направлений, структурировать поток информации и выявлять определенные закономерности развития содержания научных публикаций, осуществлять прогнозные исследования, тематическую направленность отдельных групп публикаций.

Необходимые для исследования данные могут быть получены из наукометрических баз данных и систем цитирования, среди которых наиболее известными являются Web of Science, Scopus, Google Scholar и Российский индекс цитирования (РИНЦ).

В качестве индикаторов оценки научной деятельности используются следующие показатели [3]:

– количество публикаций: статьи, зачисленные в авторский профиль ученого или профиль научной организации. Это показатель научной производительности, по которому можно оценивать автора, группу авторов, организацию, государство, журнал;

– индекс цитирования (Science Citation Index, SCI): показатель «значимости» научной работы ученого или коллектива. Величина индекса цитирования определяется количеством ссылок на публикацию или фамилию автора в других источниках;

– индекс Хирша (h-index): наукометрический показатель, предложенный в 2005 г. Хорхе Хиршем из Калифорнийского университета в Сан-Диего. Индекс Хирша основан на учете числа публикаций исследователя и числа цитирований этих публикаций. Ученый имеет индекс h, если h есть наибольшее число статей, каждая из которых процитирована как минимум h раз каждая.

В настоящей работе рассматривается задача выявления научных сообществ и исследования их структуры в рамках структурного подразделения (кафедры) университета. В качестве исходных данных используются данные открытых профилей Google Scholar профессорско-преподавательского состава кафедры программного

обеспечения информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Для каждой статьи из открытого профиля сотрудника в Google Scholar были получены следующие характеристики: автор (группа авторов), название, вид публикации, цитируемость, издатель, год публикации, выпуск (номер для журнала), URL-адрес статьи, URL-адрес цитирования, номера страниц.

Таким образом, статья может быть представлена как кортеж:

$$Article_i = \langle Title_i, Keys_i, Authors_i, Type, Ref_i, SCI_i, URL_i, Publish, Year \rangle, \quad (1)$$

где  $Title_i$  – название,  $Keys_i$  – множество ключевых слов,  $Authors_i$  – множество авторов,  $Type$  – тип,  $Ref_i$  – аннотация (или  $Text_i$  – текст),  $SCI_i$  – цитируемость,  $URL_i$  – адрес цитирования,  $Publish$  – издание,  $Year$  – год публикации.

Автор, соответственно, – кортеж из таких характеристик, как фамилия, имя, индекс Хирша, научная степень, организация:

$$Author_k = \langle Surname_k, Name_k, h-index_k, Degree, Organization \rangle. \quad (2)$$

Тогда научное сообщество можно определить как сеть ученых, связанных отношениями соавторства и цитирования, а также общей тематикой статей.

$$Sch_k = \langle CAuthors, CKeys \rangle; \quad CAuthors \subset Authors, CKeys \subset Keys. \quad (3)$$

Решение данной задачи может быть получено на основе графов соавторства и цитирования, а также семантическом анализе текстов (аннотаций) публикаций выявленных сообществ.

Определим отношение цитирования как

$$Article_j \mathfrak{R}^r Article_i \equiv Article_j \text{ цитирует } Article_i,$$

тогда граф цитирования представляет собой ориентированный граф  $G^{ar} = (Articles, \mathfrak{R}^r)$ , в котором вершинами являются научные статьи, а направленными (ориентированными) дугами из множества  $\mathfrak{R}^{ar}$  – ссылки на статьи внутри другой статьи, то есть  $Articles = \{ar_1, ar_2, \dots, ar_n\}$  соответствуют статьям, а дуги – отношениям цитирования  $\mathfrak{R}^{ar} = Articles \times Articles$ ,  $r^{ar} = \langle ar_j, ar_i \rangle \in \mathfrak{R}^{ar}$ ,  $i \neq j$ , так как самоцитирование исключено. Также необходимо учесть, что  $ar_j$  может цитировать  $ar_i$  только один раз, и если  $ar_j$  цитирует  $ar_i$ , то  $ar_i$  не может цитировать  $ar_j$ , то есть петель, кратных ребер и циклов в графе нет, а вес ребра, соединяющего цитируемую и цитирующие статьи,  $f(r^{ar}) = 1$ .

Для авторов определим отношение соавторства: авторы являются соавторами, если существует

статья, множеству авторов которой принадлежит оба автора:

$$Author_k \mathfrak{R}^{au} Author_l, (\exists Article_i \in Articles); \\ Author_k \in Authors_i, Author_l \in Authors_i.$$

Граф соавторства представляет собой неориентированный граф  $G^{au} = (Authors, \mathfrak{R}^{au})$ , без петель и кратных ребер, вершины  $Authors = \{au_1, au_2, \dots, au_m\}$  которого соответствуют авторам, ребра – отношениям соавторства  $r^{au} = \langle au_k, au_l \rangle \in \mathfrak{R}^{au}$ ,  $k \neq l$ . В простейшем случае, если количество совместных статей и вклад каждого соавтора не учитываются, вес ребра равен 1. Такой граф отражает только наличие сотрудничества [4] и задается матрицей смежности  $U$ :

$$u_{k,l} = \begin{cases} 1, \text{ если } au_k \mathfrak{R}^{au} au_l, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица смежности графа соавторства получена умножением  $A \cdot A^T$ , где  $A$  – матрица авторства:

$$A_{k,i} = \begin{cases} 1, \text{ если } au_k \in Authors_i, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Граф цитирования авторов  $G^{ru} = (Authors, \mathfrak{R}^{ru})$  строится на основе данных о цитировании без самоцитирования авторами, то есть

$$Author_k \mathfrak{R}^{ru} Author_l, \text{ если } \mathfrak{R}^{ru} \subset \mathfrak{R}^{ar}; \\ Authors_i \cap Authors_j = \emptyset,$$

$i \neq j, k \neq l$ , и представляет собой ориентированный граф без петель.

Построение и исследование графов выполнено в среде R Studio средствами статистического языка программирования R [5].

Препроцессинг данных являлся самым трудозатратным процессом анализа и состоял из следующих шагов:

- 1) удаление дубликатов;
- 2) удаление строк с пропущенными значениями в названии либо авторах (при наличии);
- 3) транслитерация фамилий авторов;
- 4) очистка фамилий авторов и приведение к виду ИО\_ФАМИЛИЯ;
- 5) очистка данных изданий и конструирование характеристики принадлежности издания перечню изданий Высшей аттестационной комиссии для публикации результатов диссертационных исследований.

Построение графа соавторства осуществлялось в несколько этапов и включало в себя создание лексического корпуса и терм-документной матрицы, которая представляет собой матрицу авторства, преобразование ее в матрицу смежности графа и непосредственно визуализацию графа.

Полученный граф соавторства состоит из 386 вершин и 695 ребер. Плотность сети определяется как отношение числа имеющихся в графе связей к максимально возможному и указывает

на степень влияния авторов друг на друга, для исследуемого графа плотность достаточно мала – 0,0066. Транзитивность отражает отношение «соавтор моего соавтора – мой соавтор» и равна 0,21. Степени вершин показывают количество соавторов данного автора, максимальная степень равна 58, средняя степень вершин – 3,6.

Для детектирования сообществ применялся метод WalkTrap, использующий в качестве критерия модулярность – меру, которая равна доле ребер от общего числа ребер, которые попадают в данные группы, минус ожидаемая доля ребер, которые попали бы в те же группы, если бы они были распределены случайно. Объект может переместиться из вершины  $i$  в вершину  $j$  с вероятностью  $P_{ij} = u_{ij} / d_j$ , где  $u_{ij}$  – элемент матрицы смежности графа,  $d_j$  – степень  $j$ -й вершины. То есть на каждом шаге равновероятно выбирается «сосед» вершины  $i$ . Таким образом определяется матрица переходов  $P$  случайного блуждания. Она примечательна тем, что ее степени являются вероятностями перехода из одной вершины в другую за соответствующее число шагов: вероятность перехода из  $i$  в  $j$  за  $t$  шагов равна  $(P^t)_{ij}$ . Эксперименты были проведены с различным значением количества шагов  $t$ :  $3 \leq t \leq 8$  [6]. Максимальное значение модулярности было получено при  $t = 8$ . Таким образом, было выявлено 11 сообществ с модулярностью 0,86, что является более чем приемлемым результатом.

Граф с сообществами показан на рис. 1. Каждая вершина – это автор, ребра – совместная публикация. Авторы одного сообщества раскрашены в один цвет, граф не взвешенный, поэтому длина ребер произвольная для корректного отображения. Граф позволяет наглядно сравнить размеры сообществ и оценить их структуру и связанность членов.

Необходимо отметить, что сфера научных интересов одной из групп, которая является изолированной, отлична от остальных, так как ее авторы не имеют общих публикаций с другими сотрудниками кафедры. В ее состав входит только один представитель кафедры, проработавший чуть более года до проведения настоящего исследования.

Исходя из состава выявленных сообществ был определен процент сотрудников кафедры в составе каждой группы. Максимальное значение 34,3% получено для сообщества, включающего сотрудников, работающих на кафедре продолжительное время, в то время как минимальное 1,96% – для изолированного сообщества. Стаж работы на кафедре существенно влияет на количество совместных работ. Небольшие сообщества включают, как правило, одного представителя кафедры, уже имеющего совместные публикации с коллегами, но основной объем работ выполнившего на предыдущих местах работы.

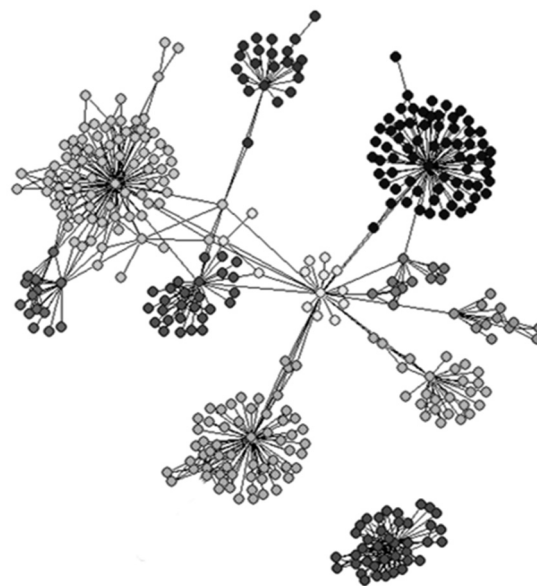


Рис. 1. Граф соавторства с сообществами

Для оценки продуктивности авторов сообществ сопоставлены количество авторов сообщества и количество статей (рис. 2), ими опубликованных, отсортированных по модулярности сообществ. Несмотря на то, что количество публикаций, безусловно, зависит от количества авторов, эта зависимость не линейна. На количество публикаций влияют также такие факторы, как остепенность и обучение в аспирантуре, получение научного звания, которые стимулируют публикационную деятельность.

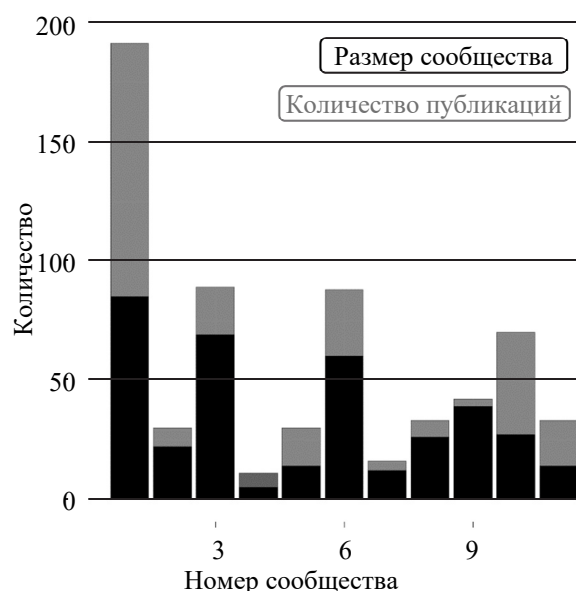


Рис. 2. Соотношение числа авторов к числу статей сообщества

Для оценки значимости сообщества проанализированы количество публикаций авторов и показатели цитируемости.

## Средняя цитируемость научных сообществ

Номер сообщества	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Средняя цитируемость	7,03	0,93	1,47	2,6	2,20	0,94	2,00	0,54	2,03	1,78	5,43

В таблицу сведены данные о средней цитируемости сообществ.

Группы с наибольшей цитируемостью: в первой группе 85 авторов опубликовали 191 статью, в одиннадцатой группе 14 авторов – 33 статьи, в четвертой группе 11 авторов – 5 статей. В третьей и шестой группах, достаточно многочисленных, низкая цитируемость обусловлена наличием большого количества малоцитируемых или нецитируемых статей.

Также необходимо учитывать возраст публикации, с его ростом цитируемость увеличивается. Этим также можно обосновать низкую цитируемость в восьмой группе. Это публикации последних лет молодых сотрудников. Также необходимо заметить, что наличие одной высокоцитируемой публикации, например учебника, существенно влияет на результат (ситуация в одиннадцатой группе).

С учетом полученных результатов исследований представляется целесообразным анализ состава авторов выявленных сообществ, их локаций и аффилиации, а также анализ публикаций

сообщества, включая семантический анализ текстов, ранжирование по типу публикации и изданию, географические и временные распределения публикаций.

**Заключение.** Предложенный в статье подход к оценке научной деятельности сотрудников и степени их сотрудничества позволил выделить тематические сообщества (группы по научным интересам) и исследовать их структуру. В результате компьютерного эксперимента по исследованию научных связей сотрудников кафедры на основе их публикаций в базе Google Академии выявлено на кафедре 11 сообществ при уровне модулярности 0,86. Также определено, что ни одно из выделенных сообществ не состоит полностью только из сотрудников кафедры. Это показывает высокий уровень внешнего сотрудничества кафедры с учеными из других структур. В дальнейшем планируется определить «круги» сотрудничества и выявить «научных партнеров», а также исследовать географические и временные распределения, проанжировать статьи по типам и изданиям.

## Список литературы

1. Тронин В. Г. Оценка результатов научно-исследовательской работы и наукометрия. Ульяновск: УлГТУ, 2019. 136 с.
2. Руководство по наукометрии: индикаторы развития науки и технологии / М. А. Акоев [и др.] Екатеринбург: Урал, 2014. 250 с.
3. Войнилов Ю. Л. Индикаторы науки // Статистический сборник НИУ ВШЭ. 2017. URL: <https://www.hse.ru/primarydata/in2017> (дата обращения: 25.09.2022).
4. Бредихин С. В., Щербаклова Н. Г. Коллективное авторство научных // Проблемы оптимизации сложных систем – 2020. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kollektivnoe-avtorstvo-nauchnyh-publikatsiy1/viewer> (дата обращения: 25.12.2022).
5. IGraph package // R documentation. URL: <https://www.rdocumentation.org/packages/igraph/versions/1.3.5> (дата обращения: 25.09.2022).
6. Pons P. Computing communities in large networks using random walks // Physical Review E., 2005. URL: <http://arxiv.org/abs/physics/0512106v1> (дата обращения: 25.09.2022).

## References

1. Tronin V. G. *Otsenka rezultatov nauchno-issledovatel'skoy raboty i naukometriya* [Evaluation of the results of research work and scientometrics]. Ulyanovsk, UIGTU Publ., 2019. 136 p. (In Russian).
2. Aкоеv M. A., Markusova V. A., Moskaleva O. V., Pisyakov V. V. *Rukovodstvo po naukometrii: indikatory razvitiya nauki i tekhnologii* [Guide to scientometrics: indicators of the development of science and technology]. Ekaterinburg, Ural Publ., 2014. 250 p. (In Russian).
3. Voynilov Y. L. Science Indicators. *Statisticheskij sbornik NIU VSHE* [Statistical compendium of the National Research University Higher School of Economics], 2017. Available at: <https://www.hse.ru/primarydata/in2017> (accessed 25.09.2022) (In Russian).
4. Bredikhin S. V., Shcherbakova N. G. Collective authorship of scientific publications. *Problemy optimizatsii slozhnykh sistem – 2020* [Problems of optimization of complex systems – 2020]. Available at: <https://cyberleninka.ru/arti-cle/n/kollektivnoe-avtorstvo-nauchnyh-publikatsiy1/viewer> (accessed 25.12.2022).

5. IGraph package. *R documentation*. Available at: <https://www.rdocumentation.org/packages/igraph/versions/1.3.5> (accessed 25.09.2022).

6. Pons P. Computing communities in large networks using random walks. *Physical Review E.*, 2005. Available at: <http://arxiv.org/abs/physics/0512106v1> (accessed 25.09.2022).

### Информация об авторах

**Шульдова Светлана Георгиевна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220005, г. Минск, ул. Гикало, 9, Республика Беларусь). E-mail: [shsg@bsuir.by](mailto:shsg@bsuir.by).

**Парамонов Антон Иванович** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных систем и технологий. Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (220037, г. Минск, ул. Козлова, 28, Республика Беларусь). E-mail: [a.paramonov@bsuir.by](mailto:a.paramonov@bsuir.by).

**Карнаух Дарья Михайловна** – магистрант, ассистент кафедры информационных систем и технологий. Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (220037, г. Минск, ул. Козлова, 28, Республика Беларусь). E-mail: [d.karnaukh@bsuir.by](mailto:d.karnaukh@bsuir.by).

**Лапицкая Наталья Владимировна** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220005, г. Минск, ул. Гикало, 9, Республика Беларусь). E-mail: [lapan@bsuir.by](mailto:lapan@bsuir.by).

### Information about the authors

**Shuldova Svetlana Georgievna** – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Information Technology Software Department. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (9, Gikalo str., 220005, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [shsg@bsuir.by](mailto:shsg@bsuir.by)

**Paramonov Anton Ivanovich** – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Information Systems and Technologies Department. Institute of Information Technology of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (28, Kozlova str., 220037, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [a.paramonov@bsuir.by](mailto:a.paramonov@bsuir.by)

**Karnaukh Daria Mikhailovna** – Master's degree student, Assistant Lecturer, the Information Systems and Technologies Department. Institute of Information Technology of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (28, Kozlova str., 220037, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [d.karnaukh@bsuir.by](mailto:d.karnaukh@bsuir.by)

**Lapitskaya Natalya Vladimirovna** – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Information Technology Software Department. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (9, Gikalo str., 220005, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [lapan@bsuir.by](mailto:lapan@bsuir.by)

*Поступила после доработки 18.01.2023*

# АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

## ALGORITHMIC AND PROGRAMMING

---

УДК 004.272.2

A. A. Prihozhy<sup>1</sup>, O. N. Karasik<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Belarusian National Technical University

<sup>2</sup>ISsoft Solutions (part of Coherent Solutions)

### ADVANCED HETEROGENEOUS BLOCK-PARALLEL ALL-PAIRS SHORTEST PATH ALGORITHM

The problem of finding shortest paths between all pairs of vertices in a large-size graph has many application domains in industry, technology, science, economics, and society. The algorithms solving the problem and proposed in the literature target either lowering a computational complexity or efficient exploitation of computational resources. This paper proposes the advanced heterogeneous block-parallel shortest paths algorithm that is a result of further development and improvement of known blocked algorithms. Starting from the homogeneous blocked algorithm, it distinguishes four types of blocks: diagonal, vertical of cross, horizontal of cross, and peripheral. To speed up the computations, separate algorithms for all block types have been developed, which reduce the number of iterations in nested loops and account for the sequential reference locality of data in CPU caches. The algorithms improve the spatial and temporal reference locality in big data processing. Experiments carried out on a server equipped with two Intel Xeon E5-2620 v4 processors have shown the speedup of up to 60–70% the proposed single- and multi-threaded advanced heterogeneous blocked algorithms yield over the single- and multiple-threaded homogeneous blocked Floyd – Warshall algorithms.

**Keywords:** shortest path, blocked algorithm, heterogeneous algorithm, multi-core system, throughput.

**For citation:** Prihozhy A. A., Karasik O. N. Advanced heterogeneous block-parallel all-pairs shortest path algorithm. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 77–83. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-13.

А. А. Прихожий<sup>1</sup>, О. Н. Карасик<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет

<sup>2</sup>Иностранное производственное унитарное предприятие «Иссофт Солюшенз»

### УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ РАЗНОРОДНЫЙ БЛОЧНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ НА ГРАФЕ

Задача нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин графа имеет множество областей применения в промышленности, технике, науке, экономике и обществе. Предложенные в литературе алгоритмы, решающие эту задачу на графах большого размера, направлены либо на снижение вычислительной сложности, либо на эффективное использование ресурсов вычислительной системы. В статье предлагается усовершенствованный разнородный блочно-параллельный алгоритм поиска кратчайших путей, который является результатом дальнейшего развития и улучшения известных блочных алгоритмов. Отталкиваясь от однородного блочного алгоритма, он различает четыре типа блока: диагональный, вертикальный перекрестный, горизонтальный перекрестный и периферийный. Для ускорения вычислений в статье разработаны отдельные алгоритмы для каждого типа блока, уменьшающие количество итераций во вложенных циклах и учитывающие строковое размещение данных в кэшах процессора. Алгоритмы улучшают пространственную и временную локальность при обработке больших данных. Эксперименты, проведенные на сервере, оснащенный двумя процессорами Intel Xeon E5-2620 v4, показали повышение производительности предложенных одно- и многопоточных усовершенствованных разнородных блочных алгоритмов до 60–70% по сравнению с одно- и многопоточными блочными алгоритмами Флойда – Уоршелла.

**Ключевые слова:** кратчайший путь, блочный алгоритм, разнородный алгоритм, многоядерная система, производительность.

**Для цитирования:** Прихожий А. А., Карасик О. Н. Усовершенствованный разнородный блочно-параллельный алгоритм поиска кратчайших путей на графе // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 77–83. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-13 (На англ.).

**Introduction.** The problem of searching for shortest paths in weighted graphs is widely exploited to find optimal solutions in industry, technology, science, economics, and society. The algorithms [1–15] of solving the problem either try to decrease the computational complexity, or to efficiently account for the features of computer architectures to speedup computations. In the paper, we consider all pairs shortest path problem on large graphs. The blocked algorithms [10–15] aim for efficient parallelization on multi-processor (multi-core) systems and utilization of CPU hierarchical memory. The contribution of the paper is the development of an advanced fast blocked heterogeneous algorithm for shortest paths search in two versions: single- and multiple-threaded parallel.

**Main part.** Let a graph  $G = (V, E)$  be constructed of a vertex set  $V$  of cardinality  $N$  and a set  $E$  of edges represented by matrix  $W$  of weights. If  $w_{ij} \neq \infty$ , it is a weight of edge  $(i, j)$ , otherwise  $(i, j) \notin E$ . In the blocked Floyd – Warshall (*BFW*) Algorithm 1, a matrix of path distances is decomposed into matrix  $B[M \times M]$  of blocks with block-size  $S$  and block-count  $M = N/S$ . Figure 1 illustrates the process and order of calculating blocks of *D0*, *C1*, *C2* and *P3* types. The universal *BCA* Algorithm 2 is a classic Floyd – Warshall algorithm, in which  $b1_{ij}$ ,  $b2_{i,k}$  and  $b3_{k,j}$  are elements of blocks  $B^1$ ,  $B^2$  and  $B^3$  respectively. It recalculates each block element  $S$  times; therefore, has the computational complexity of  $O(S^3)$ . The universalism of *BCA* is a source of slowing down the computations in *BFW*.

In the paper, instead of the single *BCA*, we introduce four other *D0*, *C1*, *C2* and *P3* algorithms, which have the same names as the block types have, and have the numbers of 1, 2, 2 and 3 arguments respectively. The objective of our work is to make the new algorithms *D0*, *C1*, *C2* and *P3* faster by accounting for features of the block types and the data dependences between blocks. Each block has the row-major layout in CPU hierarchical memory and support spatial locality during *BFW* operation. At  $M=2$ , *BFW* calls the four algorithms in the order as follows:

$D0(B_{0,0}), C1(B_{1,0}, B_{0,0}), C2(B_{0,1}, B_{0,0});$   
 $P3(B_{1,1}, B_{1,0}, B_{0,1}), D0(B_{1,1}), C1(B_{0,1}, B_{1,1});$   
 $C2(B_{1,0}, B_{1,1}), P3(B_{0,0}, B_{0,1}, B_{1,0}).$

The following procedure lies in the basis of *D0*, *C1*, *C2* and *P3* construction:

---

#### Algorithm 1: Blocked Floyd–Warshall (*BFW*)

---

**Input:** A number  $N$  of graph vertices  
**Input:** A matrix  $W[N \times N]$  of graph edge weights  
**Input:** A size  $S$  of block  
**Input:** A number  $M \leftarrow N/S$  of blocks  
**Output:** A blocked matrix  $B[M \times M]$  of path distances  
 $B \leftarrow W$   
**for**  $m \leftarrow 0$  **to**  $M - 1$  **do**  
 $B_{m,m}^{m+1} \leftarrow BCA(B_{m,m}, B_{m,m}, B_{m,m})$  // D0  
**for**  $v \leftarrow 0$  **to**  $M - 1$  **do**  
**if**  $v \neq m$  **then**  
 $B_{v,m}^{m+1} \leftarrow BCA(B_{v,m}, B_{v,m}, B_{m,m})$  // C1  
 $B_{m,v}^{m+1} \leftarrow BCA(B_{m,v}, B_{m,m}, B_{m,v})$  // C2  
**for**  $v \leftarrow 0$  **to**  $M - 1$  **do**  
**if**  $v \neq m$  **then**  
**for**  $u \leftarrow 0$  **to**  $M - 1$  **do**  
**if**  $u \neq m$  **then**  
 $B_{v,u} \leftarrow BCA(B_{v,u}, B_{v,m}, B_{m,u})$  // P3  
**return**  $B$

---

#### Algorithm 2: Block calculation *BCA*

---

**Input:**  $S$  is size of block  
**Input:**  $B^1, B^2, B^3$  are input blocks  
**Output:**  $B^1$  is recalculated block  
**for**  $k \leftarrow 0$  **to**  $S - 1$  **do**  
**for**  $i \leftarrow 0$  **to**  $S - 1$  **do**  
**for**  $j \leftarrow 0$  **to**  $S - 1$  **do**  
 $sum \leftarrow b2_{i,k} + b3_{k,j}$   
**if**  $b1_{ij} > sum$  **then**  $b1_{ij} \leftarrow sum;$   
**return**  $B^1$

---

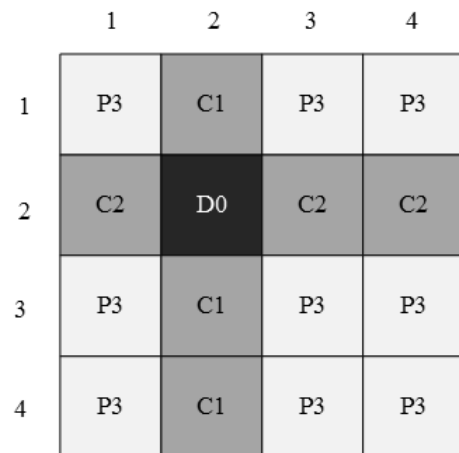


Fig. 1. Illustration of *BFW* operation: cross moves from top-left to bottom-right corner; *C1* and *C2* are executed after *D0*, and *P3* after *C1* and *C2*

The graph is extended by stepwise adding of vertices.

A sequence  $B^1(1) \dots B^1(k) \dots B^1(S)$  of states of the  $B^1$  block is generated where  $k$  is a current number of rows and/or columns the block has.

The elements of row  $k$  and/or column  $k$  that are path distances from and to vertex  $k$  respectively are calculated over elements of matrix  $B^1(k-1)$ .

In their turn, the matrix  $B^1(k-1)$  is recalculated into  $B^1(k)$  over the elements of row  $k$  and/or column  $k$ .

*Algorithm D0.* Since  $D0$  calculates block  $B^1$  over itself without involving other blocks, both row  $k$  and column  $k$  are added to  $B^1(k-1)$ .  $D0$  starts operation from  $B^1(1)$  of size  $1 \times 1$  and step-by-step increases the block size (Fig. 2). The above-described procedure calculates row  $k$ , column  $k$ , and  $B^1(k)$  over  $B^1(k-1)$ .

We have applied a set of formal transformations to the procedure and obtained Algorithm 3 ( $D0$ ) of calculating the diagonal block. The transformations include 1) reordering of operations; 2) resynchronizing operation executions from neighbour iterations of loop to calculate  $b1_{i,j}(k-1)$  over  $b1_{i,j}(k-2)$ ,  $b1_{i,k-1}(k-1)$ , and  $b1_{k-1,j}(k-1)$ , and to calculate  $b1_{i,k}(k)$  and  $b1_{k,j}(k)$  over  $b1_{i,j}(k-1)$ ,  $b1_{i,k}(k-1)$  and  $b1_{k,j}(k-1)$  within the same iteration; 3) merging nested loops.  $D0$  calculates blocks  $b1_{i,j}(k-1)$ ,  $i, j = 0 \dots k-1$  as:

$$b1_{i,j}(k-1) = \min\{b1_{i,j}(k-2), z\};$$

$$z = b1_{i,k-1}(k-1) + b1_{k-1,j}(k-1).$$

The element  $b1_{i,k}(k)$  of column  $k$  is calculated using the equation as follows:

$$b1_{i,k}(k) = \min_{j=0 \dots k-1} (b1_{i,j}(k-1) + b1_{j,k}(k-1)).$$

The element  $b1_{k,j}(k)$  of row  $k$  is calculated by the following equation:

$$b1_{k,j}(k) = \min_{i=0 \dots k-1} (b1_{k,i}(k-1) + b1_{i,j}(k-1)).$$

In algorithm  $D0$ , two loops along  $i$  and  $j$  have the iteration scheme that produces  $k$  iterations, which is less than  $S$  iterations in  $BCA$ . The loops consequently process matrices of growing size  $[1 \times 1], [2 \times 2] \dots [S \times S]$ , which indicate the  $D0$  has a temporal locality property. Comparison of  $D0$  and  $BCA$  shows that  $D0$  has smaller number of iterations in the nested loops and reduces the cache pressure. Reduction  $\rho$  in the number of executions of the most nested loop body is evaluated with

$$\rho(D0 / BCA) = 6 / (2 + 3 / S + 1 / S^2).$$

When  $S \rightarrow \infty$ , the reduction  $\rho(D0 / BCA) \rightarrow 3$ . The number of accesses to memory is also reduced.

*Algorithm C1.* Since it calculates a vertical block  $B^1$  of cross over itself and block  $B^3$ , column  $k$  is added to  $B^1(k-1)$  without adding row  $k$  (Fig. 3).  $C1$  starts operation with  $B^1(1)$  of size  $S \times 1$  and increases the block-size in column-wise manner.

---

**Algorithm 3:** Calculating diagonal block  $D0$

---

**Input:** A diagonal block  $B^1$

**Input:** A size  $S$  of block

**Output:** A recalculated diagonal block  $B^1$

```

for k ← 2 to S do
    k1 ← k - 1
    for i ← 1 to k1 do
        for j ← 1 to k1 do
            s2 ← b1i,k1 + b1k1,j    if b1i,j > s2 then b1i,j ← s2
            s0 ← b1i,j + b1j,k    if b1i,k > s0 then b1i,k ← s0
            s1 ← b1k,i + b1j      if b1k,j > s1 then b1k,j ← s1
        k1 ← S - 1
    for i ← 1 to k1 - 1 do
        for j ← 1 to k1 - 1 do
            s2 ← b1i,k1 + b1k1,j    if b1i,j > s2 then b1i,j ← s2
    return B1
    
```

---

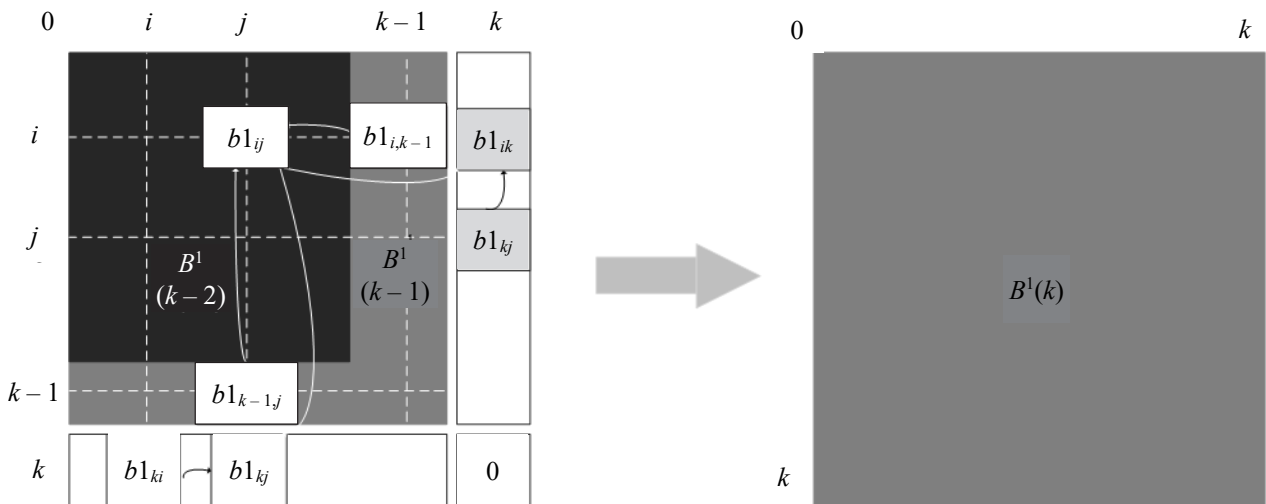


Fig. 2. Recurrent calculation of diagonal block  $D0$



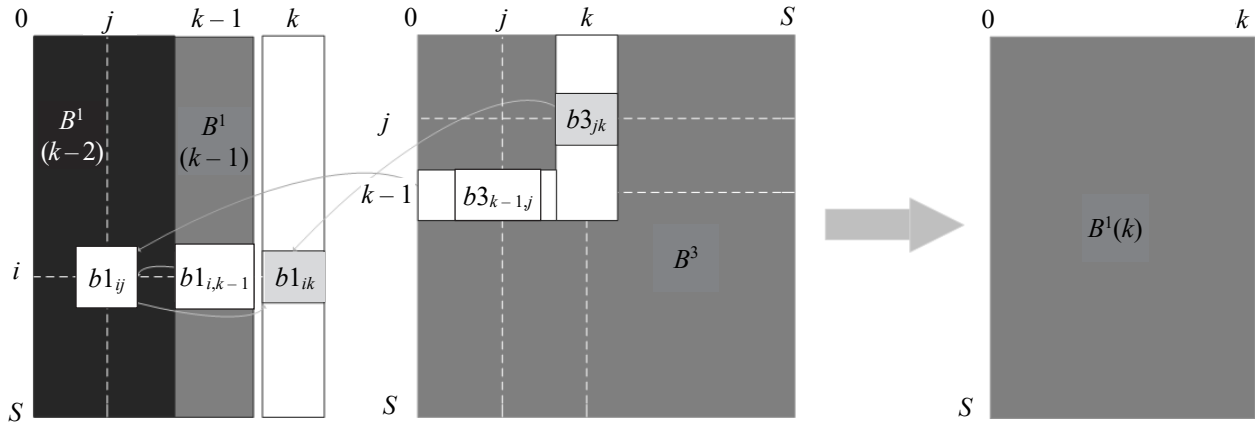


Fig. 3. Recurrent calculation of block C1 of cross

The above-described procedure calculates column  $k$  and  $B^1(k)$  over  $B^1(k-1)$ . We have applied to the procedure the transformations like those from the D0 case and obtained Algorithm 4 (C1) of calculating the vertical block of cross. Algorithm C1 calculates  $b1_{i,j}(k-1), i=0 \dots S-1, j=0 \dots k-2$  using equation

$$b1_{i,k}(k) = \min \left\{ \begin{array}{l} b1_{i,j}(k-2), \\ b1_{i,k-1}(k-1) + b3_{j,k} \end{array} \right\}$$

The equation as follows aims for calculating element  $b1_{i,k}(k)$  of column  $k$ .

$$b1_{i,k}(k) = \min_{j=0 \dots k-1} (b1_{i,j}(k-1) + b3_{j,k}).$$

In algorithm C1, the loop along  $j$  has the iteration scheme that produces  $k$  iterations, which is less than  $S$  iterations in *BCA*. The loop consequently processes matrices of growing size  $[S \times 1], [S \times 2] \dots [S \times S]$ , which indicate that C1 has a property of temporal reference locality. Comparison of C1 against *BCA* shows that C1 decreases the cache pressure. In C1, the overall number of iterations of the most nested loop is smaller than in *BCA*, and the reduction is evaluated by

$$\rho(C1/BCA) = 2 / (1 + 5/S + 4/S^2).$$

**Algorithm 4:** Calculating vertical block C1 of cross

```

Input: A block  $B^1$ 
Input: A block  $B^3$ 
Input: A size  $S$  of block
Output: A recalculated block  $B^1$ 
for  $k \leftarrow 1$  to  $S-1$  do
     $k1 \leftarrow k-1$ ;
    for  $i \leftarrow 0$  to  $S-1$  do
        for  $j \leftarrow 0$  to  $k1$  do
             $s2 \leftarrow b1_{i,k1} + b3_{k1,j}$  if  $b1_{ij} > s2$  then  $b1_{ij} \leftarrow s2$ 
             $s0 \leftarrow b1_{ij} + b3_{j,k}$  if  $b1_{i,k} > s0$  then  $b1_{i,k} \leftarrow s0$ 
         $k1 \leftarrow S-1$ 
    for  $i \leftarrow 0$  to  $S-1$  do
        for  $j \leftarrow 0$  to  $k1-1$  do
             $s2 \leftarrow b1_{i,k1} + b3_{k1,j}$  if  $b1_{ij} > s2$  then  $b1_{ij} \leftarrow s2$ 
    return  $B^1$ 
    
```

When  $S \rightarrow \infty$ , the reduction  $\rho(C1/BCA) \rightarrow 2$ . The number of accesses to memory is also reduced.

*Algorithm C2.* Since it calculates a horizontal block  $B^1$  of cross over itself and block  $B^2$ , only row  $k$  is added to  $B^1(k-1)$  without adding column  $k$  (Fig. 4). C2 starts operation with  $B^1(1)$  of size  $1 \times S$  and increases the block size in row-wise manner.

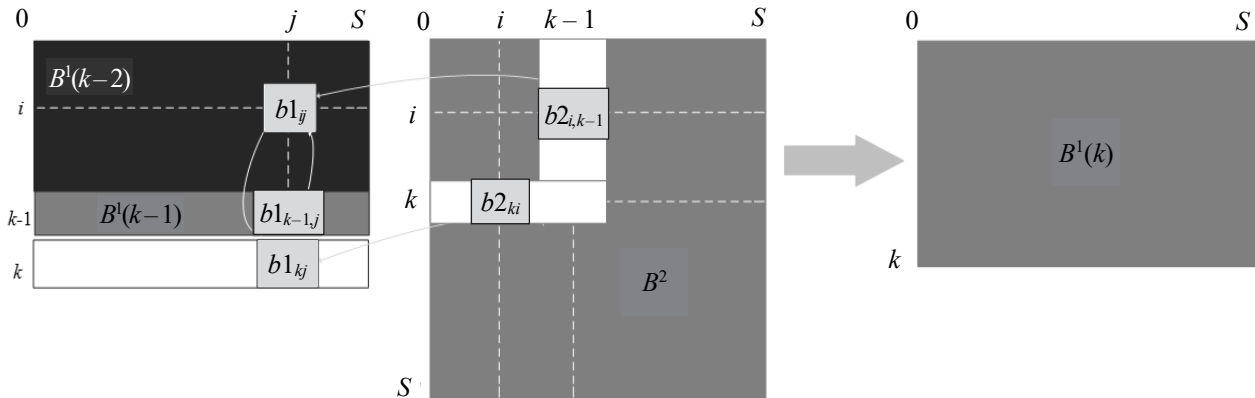


Fig. 4. Recurrent calculation of block C2 of cross

The above-described procedure calculates row  $k$  and block  $B^1(k)$  over  $B^1(k-1)$ . Transformations like those from the  $D0$  case have been applied to the procedure, yielding Algorithm 5 ( $C2$ ) of calculating the horizontal block of cross.  $C2$  calculates  $b1_{i,j}(k-1)$ ,  $i=0\dots k-2, j=0\dots S-1$  using equation

$$b1_{i,j}(k-1) = \min \left\{ \begin{array}{l} b1_{i,j}(k-2), \\ b2_{i,k-1}(k-1) + b1_{k-1,j}(k-1). \end{array} \right\}$$

---

**Algorithm 5:** Calculating horizontal block  $C2$  of cross

---

**Input:** A block  $B^1$

**Input:** A block  $B^2$

**Input:** A size  $S$  of block

**Output:** A recalculated block  $B^1$

**for**  $k \leftarrow 1$  **to**  $S-1$  **do**

$k1 \leftarrow k-1$ ;

**for**  $i \leftarrow 0$  **to**  $k1$  **do**

**for**  $j \leftarrow 0$  **to**  $S-1$  **do**

$s2 \leftarrow b2_{i,k1} + b1_{k1,j}$     **if**  $b1_{i,j} > s2$  **then**  $b1_{i,j} \leftarrow s2$

$s0 \leftarrow b2_{i,k} + b1_{i,j}$     **if**  $b1_{k,j} > s0$  **then**  $b1_{k,j} \leftarrow s0$

$k1 \leftarrow S-1$

**for**  $i \leftarrow 0$  **to**  $k1-1$  **do**

**for**  $j \leftarrow 0$  **to**  $S-1$  **do**

$s2 \leftarrow b2_{i,k1} + b1_{k1,j}$     **if**  $b1_{i,j} > s2$  **then**  $b1_{i,j} \leftarrow s2$

**return**  $B^1$

---

The following equation aims for calculating element  $b1_{i,k}(k)$  of column  $k$ .

$$b1_{k,j}(k) = \min_{i=0\dots k-1} (b2_{k,i} + b1_{i,j}(k-1)).$$

In algorithm  $C2$ , the loop along  $i$  has the iteration scheme that produces  $k$  iterations, which is less than  $S$  iterations in  $BCA$ . The loop sequentially processes matrices of growing size  $[1 \times S]$ ,  $[2 \times S]$  ...  $[S \times S]$ , which indicate the  $C2$  obtains a property of temporal reference locality that reduces the cache pressure. In  $C2$ , the reduction of the overall number of iterations of the most nested loop and of the overall number of accesses to memory is the same as in  $C1$ .

The nest of three loops across  $k$ ,  $i$  and  $j$  of algorithms  $D0$ ,  $C1$  and  $C2$ , carries out computation of block  $B^1$ . It calculates variables  $s0$ ,  $s1$  and  $s2$ , and matrix elements  $b1_{i,j}$ ,  $b1_{i,k}$  and  $b1_{k,j}$  upon elements of blocks  $B^1$ ,  $B^2$  and  $B^3$ . It traverses the rows and columns  $k-1$ ,  $k$  and  $i$  multiple times. In contrast to the rows which support sequential reference locality in hierarchical memory, the columns are deployed in different lines and increase the data traffic in hierarchical cache memory. To improve the data locality, we have transformed the algorithms to collect the column elements in one-dimensional arrays and then access them intensively.

*Algorithm P3.* It calculates a peripheral block  $B^1$  over itself and the  $B^2$  and  $B^3$  blocks. Since the graph extension-based procedure cannot be used effectively

in this case, we derive  $P3$  from transforming the classical Floyd-Warshall Algorithm 2. To provide the sequential reference locality for all blocks  $B^1$ ,  $B^2$  and  $B^3$ , we have reordered the three  $k-i-j$  nested loops to the nest  $i-k-j$  of loops.

*Results.* We implemented the homogeneous blocked Floyd-Warshall algorithm ( $BFW$ ) and the advanced heterogeneous blocked algorithm ( $HBA$ ) in C++ language using GNU GCC compiler v10.2.0. Each algorithm has two implementation versions: single-thread and multiple-threaded. The algorithms were parallelized at task level and compiled to multiple-threaded applications by means of OpenMP 4.5. We carried out the vectorisation of operations in all program codes to speed up the computations. The experiments were done on a rack server equipped with two Intel Xeon E5-2620 v4 processors. Each processor contains 8 cores and 16 hardware threads. Every core is equipped with private L1 (32 KB) and L2 (256 KB) caches, and the cores within each processor share inclusive L3 (20 MB) cache.

To measure algorithm parameters on the multi-core system architecture, we used the Intel VTune Profiler 2021.8. The experiments were conducted on randomly generated complete weighted graphs. The paper describes results for graphs of 4800 vertices. Each experiment was carried out multiple times and verified.

Table 1 reports the execution time of the single-thread sequential  $BFW$  and  $HBA$ .  $BFW$  consumed from 35.4 to 54.0 sec of CPU, meanwhile  $HBA$  consumed from 29.6 to 35.2 sec. The speedup of  $HBA$  over  $BFW$  is from 6.1% to 59.6%.

Table 1  
**Execution time and comparison of single-thread  
 $HBA$  and  $BFW$  on graph 4800**

Block-matrix	Block count	$BFW$ , sec	$HBA$ , sec	Speedup, %
2×2	4	53.99	33.82	59.6
3×3	9	35.40	29.61	19.6
4×4	16	35.83	31.90	12.3
5×5	25	36.15	32.41	11.5
6×6	36	36.03	33.13	8.8
8×8	64	37.34	35.19	6.1

Table 2 reports the execution time of multiple-threaded  $BFW$  and  $HBA$  parallelized by OpenMP.  $BFW$  consumed from 11.2 to 57.5 sec of CPU, meanwhile  $HBA$  consumed from 10.9 to 43.6 sec. The speedup of  $HBA$  over  $BFW$  is from 0.4% to 71.2%.

We explain the reduction of speedup at increasing  $M$  by the rapid growth of the number of peripheral blocks and by the insignificant speedup of  $P3$  over  $BCA$ , and by the fact that  $P3$  loses  $D0$ ,  $C1$  and  $C2$  significantly.

Table 2  
**Execution time and comparison of multiple-threaded  
 HBA and BFW on graph 4800**

Block-matrix	Block count	BFW, sec	HBA, sec	Speedup, %
2×2	4	56.01	32.73	71.2
3×3	9	57.50	38.27	50.2
4×4	16	50.37	35.64	41.3
5×5	25	56.19	43.64	28.8
6×6	36	31.89	31.76	0.4
8×8	64	11.21	10.94	2.4

Indeed, the fraction of  $P3$  blocks in the total block count is evaluated as  $(M-1)^2/M^2$  and is 0.25, 0.44, 0.56, 0.64, 0.69, 0.77 and 0.94 for

$M = 2, 3, 4, 5, 6, 8$  and 32 respectively. Therefore, *HBA* is more effective for non-large values of  $M$ .

**Conclusion.** The proposed advanced heterogeneous block-parallel all pairs shortest path algorithm no matter single- or multiple-threaded considers the features of four types of blocks and overcomes the homogeneous blocked Floyd-Warshall algorithm by up to 60–70% regarding the reduction of execution time on multi-core systems. The *D0* algorithm of calculating the diagonal block is a promising alternative to the classic Floyd-Warshall algorithm with respect to the throughput since it has the property of spatial and temporal references locality and can handle efficiently the processor's hierarchical memory.

### References

1. Madkour A., Aref W. G., Rehman F. U., Rahman M. A., Basalamah S. A Survey of Shortest-Path Algorithms. ArXiv: 1705.02044v1 [cs.DS], 4 May 2017, 26 p.
2. Glabowski M., Musznicki B., Nowak P. and Zwierzykowski P. Review and Performance Analysis of Shortest Path Problem Solving Algorithms. *International Journal on Advances in Software*, 2014, vol. 7, no. 1&2, pp. 20–30.
3. Floyd R.W. Algorithm 97: Shortest path. *Communications of the ACM*, 1962, no. 5 (6), p. 345.
4. Prihozhy A.A., Mattavelli M., Mlynek D. Data dependences critical path evaluation at C/C++ system level description. *International Workshop PATMOS'2003*, Springer, 2003, pp. 569–579.
5. Albalawi E., Thulasiraman P., Thulasiram R. Task Level Parallelization of All Pair Shortest Path Algorithm in OpenMP 3.0. *2<sup>nd</sup> International Conference on Advances in Computer Science and Engineering (CSE 2013)*. Los Angeles, CA, July 1–2, 2013, pp. 109–112.
6. Prihozhy A. A. *Analiz, preobrazovaniye i optimizatsiya dlya vysokoproizvoditel'nykh parallel'nykh vychisleniy* [Analysis, transformation and optimization for high performance parallel computing]. Minsk, BNTU Publ., 2019. 229 p. (In Russian).
7. Prihozhy A. A., Casale-Brunet S., Bezati E., Mattavelli. M. Pipeline Synthesis and Optimization from Branched Feedback Dataflow Programs. *Journal of Signal Processing Systems*, Springer Nature, 2020, vol. 92, pp. 1091–1099. Available at: <https://doi.org/10.1007/s11265-020-01568-5> (accessed 29.09.2022).
8. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Inference of shortest path algorithms with spatial and temporal locality for big data processing. *Big Data and Advanced Analytics: sbornik nauchnykh statey VIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Big Data and Advanced Analytics: Proceedings of VIII International Conference]. Minsk, Bestprint Publ., 2022, pp. 56–66.
9. Prihozhy A. A. Simulation of direct mapped, k-way and fully associative cache on all-pairs shortest paths algorithms. *System analysis and applied information science*, 2019, no. 4, pp. 10–18. Available at: <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2019-4-10-18> (accessed 29.01.2023). (In Russian).
10. Venkataraman G., Sahni S., Mukhopadhyaya S. A Blocked All-Pairs Shortest Paths Algorithm. *Journal of Experimental Algorithmics (JEA)*, 2003, vol. 8, pp. 857–874.
11. Park J. S., Penner M., and Prasanna V. K. Optimizing graph algorithms for improved cache performance. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 2004, no. 15 (9), pp.769–782.
12. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Heterogeneous blocked all-pairs shortest paths algorithm. *System analysis and Applied Information Science*, 2017, no. 3, pp. 68–75. Available at: <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2017-3-68-75> (accessed 29.01.2023) (In Russian).
13. Karasik O. N., Prihozhy A. A. Threaded block-parallel algorithm for finding the shortest paths on graph. *Doklady BGUIR* [Reports BSUIR], 2018, no. 2, pp. 77–84 (In Russian).
14. Karasik O. N., Prihozhy A. A. Tuning block-parallel all-pairs shortest path algorithm for efficient multi-core implementation. *Systemnyy analiz i prikladnaya informatika* [System Analysis and Applied Information Science], 2022, no. 3, pp. 57–65 (In Russian).
15. Prihozhy A. A. Optimization of data allocation in hierarchical memory for blocked shortest paths algorithms. *Systemnyy analiz i prikladnaya informatika* [System Analysis and Applied Information Science], 2021, no. 3, pp. 40–50 (In Russian).

### Список литературы

1. Survey of Shortest-Path Algorithms / Madkour A. [et al]. ArXiv: 1705.02044v1 [cs. DS] 4 May 2017, 26 p.
2. Review and Performance Analysis of Shortest Path Problem Solving Algorithms / Glabowski M. [et al] // International Journal on Advances in Software. 2014. Vol. 7, no. 1&2. P. 20–30.
3. Floyd R.W. Algorithm 97: Shortest path // Communications of the ACM. 1962. No. 5 (6). P.345.
4. Prihozhy A. A., Mattavelli M., Mlynek D. Data dependences critical path evaluation at C/C++ system level description // International Workshop PATMOS'2003. Springer, 2003. P. 569–579.
5. Albalawi E., Thulasiraman P., Thulasiram R. Task Level Parallelization of All Pair Shortest Path Algorithm in OpenMP 3.0 // 2<sup>nd</sup> International Conference on Advances in Computer Science and Engineering (CSE 2013). Los Angeles, CA, July 1–2. 2013. P. 109–112.
6. Прихожий А. А. Анализ, преобразование и оптимизация для высокопроизводительных параллельных вычислений. Минск: БНТУ, 2019. 229 с.
7. Prihozhy A. A., Casale-Brunet S., Bezati E., Mattavelli. M. Pipeline Synthesis and Optimization from Branched Feedback Dataflow Programs // Journal of Signal Processing Systems, Springer Nature, 2020. Vol. 92. P. 1091–1099. URL: <https://doi.org/10.1007/s11265-020-01568-5> (accessed 29.09.2022).
8. Прихожий А. А., Карасик О. Н. Вывод алгоритмов поиска кратчайших путей с временной и пространственной локальностью для обработки больших данных. Big Data and Advanced Analytics: сб. науч. ст. VIII Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 11–12 мая 2022 года. Минск: Бестпринт, 2022. С. 56–66.
9. Прихожий А. А. Моделирование кэш прямого отображения и ассоциативных кэш на алгоритмах поиска кратчайших путей в графе // Системный анализ и прикладная информатика. 2019. № 4. С. 10–18. URL: <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2019-4-10-18> (дата обращения: 29.01.2023).
10. Venkataraman G., Sahni S., Mukhopadhyaya S. A Blocked All-Pairs Shortest Paths Algorithm Journal of Experimental Algorithmics (JEA). 2003. Vol. 8. P. 857–874.
11. Park J. S., Penner M., and Prasanna V. K. Optimizing graph algorithms for improved cache performance // IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems. 2004. No. 15 (9). P. 769–782.
12. Прихожий А. А., Карасик О. Н. Разнородный блочный алгоритм поиска кратчайших путей между всеми парами вершин графа // Системный анализ и прикладная информатика. 2017. № 3. С. 68–75. URL: <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2017-3-68-75> (дата обращения: 29.01.2023).
13. Карасик О. Н., Прихожий А. А. Поточковый блочно-параллельный алгоритм поиска кратчайших путей на графе // Доклады БГУИР. 2018. № 2. С. 77–84.
14. Прихожий А. А., Карасик О. Н. Настройка блочно-параллельного алгоритма поиска кратких путей на эффективную многоядерную реализацию // Системный анализ и прикладная информатика. 2022. № 3. С. 57–65.
15. Прихожий А. А. Оптимизация размещения данных в иерархической памяти для блочных алгоритмов поиска кратчайших путей // Системный анализ и прикладная информатика. 2021. № 3. С. 40–50.

### Information about the authors

**Prihozhy Anatoly Alekseevich** – DSc (Engineering), Professor, Professor, Department of Computer and System Software. Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: prihozhy@yahoo.com

**Karasik Oleg Nikolayevich** – PhD (Engineering), Lead Engineer, ISsoft Solutions (5, Чапаева str., 220034, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: karasik.oleg.nikolaevich@gmail.com

### Информация об авторах

**Прихожий Анатолий Алексеевич** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры программного обеспечения информационных систем и технологий. Белорусский национальный технический университет (220013, г. Минск, пр. Независимости 65, Республика Беларусь). E-mail: prihozhy@yahoo.com

**Карасик Олег Николаевич** – кандидат технических наук, ведущий инженер. Иностранное производственное унитарное предприятие «Иссофт Солюшенз». (220034, г. Минск, ул. Чапаева, 5, Республика Беларусь). E-mail: karasik.oleg.nikolaevich@gmail.com

*Поступила после доработки 15.11.2022*

УДК 004.77; 004.72

**Е. А. Гончар**

Белорусский государственный технологический университет

**МОДЕЛИРОВАНИЕ NAMED DATA NETWORKING СЕТЕЙ  
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ИХ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ**

Named Data Networking (NDN) сохраняет архитектуру «песочных часов» Интернета (TCP/IP), но вместо отправки данных получателю извлекает данные отправителя на основе идентификации по имени. Целью разработки таких архитектур является предоставление возможности ссылаться на данные независимо от места их размещения или способов доставки. Это обеспечивает естественную групповую доставку, повсеместное кэширование и репликацию объектов данных, что, в свою очередь, повышает как скорость доставки, так и безопасность. В данной статье для моделирования именованных сетей передачи данных использован ndnSIM – симулятор NDN для NS-3. Спроектирована архитектура сети и основные компоненты. Для исследования пропускной способности проведено экспериментальное моделирование. На основе симулятора исследована пропускная способность сети с постепенно увеличивающейся нагрузкой. На основе результатов моделирования установлен вид зависимости пропускной способности от нагрузки внутри сети.

**Ключевые слова:** симулятор ndnSIM, среда моделирования NS-3, архитектура NDN.

**Для цитирования:** Гончар Е. А. Моделирование Named Data Networking сетей для исследования их пропускной способности // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. №1 (266). С. 84–88. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-14.

**E. A. Gonchar**

Belarusian State Technological University

**MODELING NAMED DATA NETWORKING  
NETWORKS TO STUDY THEIR CAPACITY**

Named Data Networking (NDN) retains the hourglass architecture of the Internet (TCP/IP), but instead of sending data to a recipient, retrieves sender data based on identification by name. The goal of developing these architectures is to allow data to be referenced regardless of where it resides or how it is delivered, allowing for natural multicasting, ubiquitous caching and replication of data objects, which in turn improves both delivery speed and security. In this article, the ndnSIM – NDN simulator for NS-3 is used to simulate named data networks. Designed network architecture and main components. An experimental simulation was carried out to study the throughput. On the basis of the simulator, the throughput of the network with a gradually increasing load is investigated. Based on the simulation results, the type of dependence of throughput on the load within the network is established.

**Keywords:** simulator ndnSIM, environment NS-3, architecture NDN, simulation, network.

**For citation:** Gonchar E. A. Modeling Named Data Networking networks to study their capacity. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 84–88. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-14 (In Russian).

**Введение.** Именованная сеть передачи данных (NDN – Named Data Networking) [1–5] стремится стать преемником стека протоколов TCP/IP. NDN запрашивает сеть на основе именованных данных и, в отличие от TCP/IP, обращается к контенту, а не к хостам. NDN использует многопутевую, многоадресную доставку данных с отслеживанием состояния, что позволяет потребителям находить данные в ближайшем источнике. Эти функции также помогают снизить ошибки из-за задержек или сбоев передачи (коэффициент потерь в NDN 0,1%), тем самым повышая устойчивость [6].

Кроме того, NDN обеспечивает плавное переключение при сбое, возможность выбора «наилучшего восходящего потока» и частичное

извлечение данных, что ускоряет доставку контента и снижает общее использование ресурсов, сетевое кэширование, путевую пересылку и непосредственную защиту данных. Однако стек протоколов NDN похож на стек, используемый в TCP/IP. Как и IP, сетевой протокол NDN осуществляет доставку дейтаграмм. Развитие и распространение нового сетевого протокола потенциально может быть связано с технологической проблемой производительности, аналогичной TCP/IP.

Для проверки гипотез, исследования технологий и моделирования различных архитектур сетей исследователями была спроектирована и разработана ndnSIM [7]. Она предоставляет общую, удобную для пользователя платформу

моделирования с открытым исходным кодом, основанную на среде моделирования NS-3 [8].

Симулятор ndnSIM2 реализован по модульному принципу с использованием C++ классов для моделирования поведения каждого объекта типа NDN::Faces (определяет базовую функциональность NDN) (рис. 1). Face – это основной компонент, отвечающий за фактическую доставку пакета данных в стек NDN и из него.

Помимо этого, в состав симулятора входят Forwarding Information Table (FIB), Pending Interest Table (PIT) и Content Store (CS) и т. д. для связи с локальными приложениями и другими узлами сети.

Модульная структура позволяет легко модифицировать или заменять любой компонент. Также есть обширный набор интерфейсов и помощников для детального отслеживания каждого компонента и потока трафика NDN.

Проект ndnSIM2 был направлен на достижение полной интеграции с Named Data Networking Forwarder [9]. Общий дизайн ndnSIM, его основные структурные компоненты, а также их взаимодействие друг с другом показаны на рис. 1.

NdnSIM2 позволяет моделировать приложения, написанные для библиотеки sxxlibrary. Таким образом, ndnSIM2 предлагает интегрированную среду моделирования для крупномасштабного развертывания и оценки их реальных приложений.

**Основная часть.** Для моделирования взаимодействия объектов в сети NDN была спроектирована модель сети, содержащая следующие компоненты:

ndn::L3Protocol: NS-3 абстракция реализации стека NDN. Его основной задачей является инициализация экземпляра NFD каждого узла, который участвует в сценарии имитации и обеспечивает отслеживание источников для измерения производительности NDN (отправленные/полученные интересы и данные, удовлетворенные/неудовлетворенные интересы);

NFD (NDN Forwarding Daemon): реализация сетевого сервера переадресации именованных сетей данных, которые включают (рис. 2):

nfd::Forwarder: основной класс NFD, который владеет всеми узлами и таблицами узла маршрутизатора NDN и реализует конвейеры пересылки NDN;

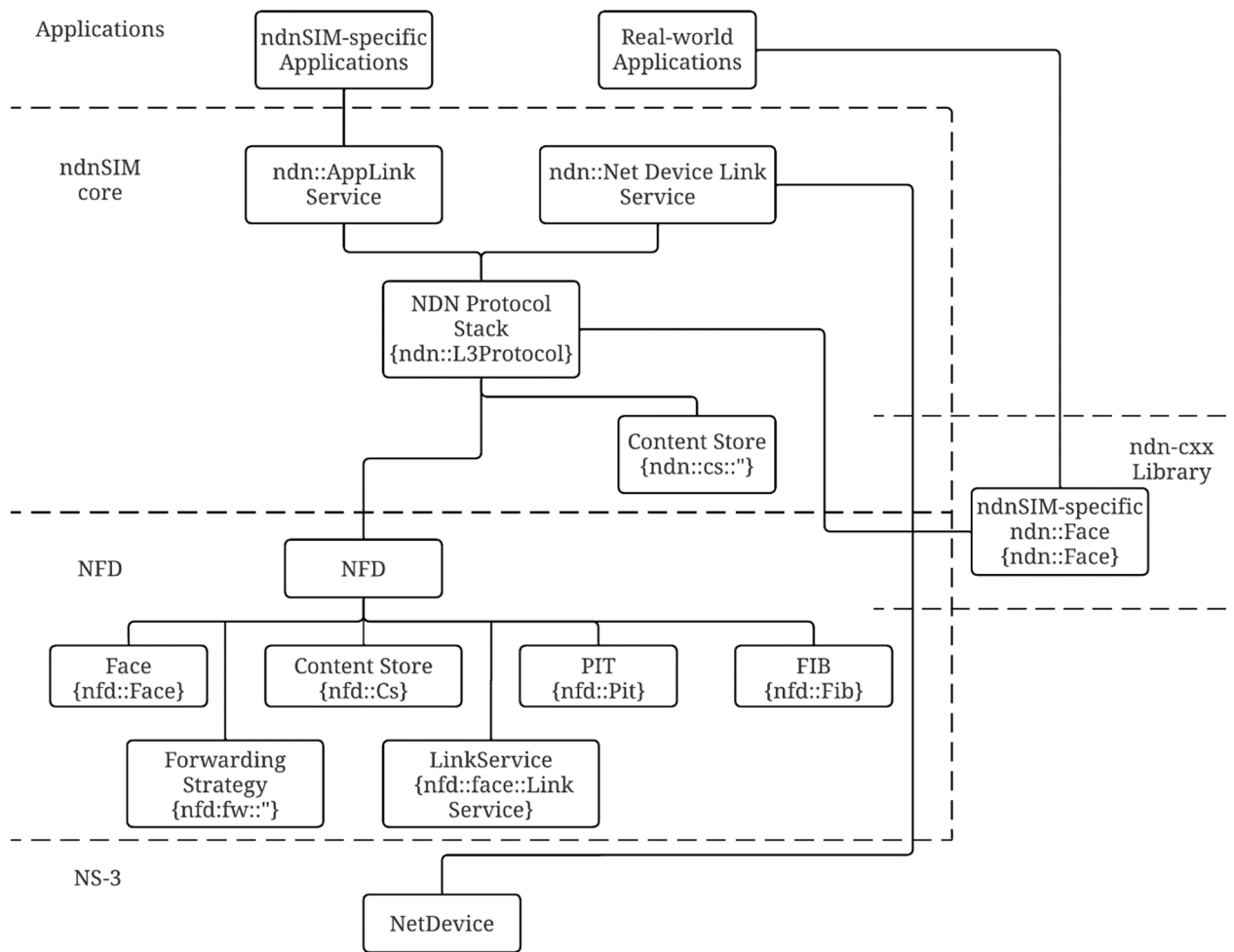


Рис. 1. Структурная схема компонентов ndnSIM

`nfd::Face`: реализует необходимые коммуникационные примитивы для фактической отправки и получения пакетов Interest и Data;

`nfd::face::LinkService`: базовый класс абстракции NFD LinkService. LinkService преобразует пакеты сетевого уровня (Interests, Data и Nacks) в пакеты канального уровня (блоки TLV);

`nfd::face::Transport`: базовый класс абстракции транспорта NFD. Транспорт обеспечивает услугу доставки пакетов с максимальной эффективностью в службу связи узла;

`nfd::Cs`: кэш пакетов данных, который используется NFD;

`nfd::fw::Strategy`: стратегия пересылки в NFD принимает решения относительно того, будут ли, когда и куда пересылаться пакеты Interest;

`nfd::fw::Strategy`: это абстрактный класс, который должен быть реализован разными стратегиями пересылки;

`nfd::Fib`: база информации о пересылке (FIB) используется для пересылки пакетов Interest к одному (или нескольким) потенциальным источникам;

`nfd::measurements::Measurements`: таблица, в которой NFD хранит информацию об измерениях относительно префикса имени. Она используется стратегиями переадресации;

`nfd::strategy selection::StrategyChoice`: таблица содержит стратегию переадресации, выбранную для каждого пространства имен;

`ndn::AppLinkService`: реализация абстракции `nfd::face::LinkService` для обеспечения связи с приложениями;

`ndn::NetDeviceLinkService`: реализация абстракции `nfd::face::LinkService` для обеспечения связи с другими имитируемыми узлами;

`ndn::cs`: структура Content Store (CS), реализованная в `ndnSIM 1.0`. Он включает ряд замещающих политик и в целом является более гибким, чем текущая реализация NFD в CS.

Основным компонентом архитектуры `ndnSIM` является `ndn::L3Protocol`. Этот компонент служит консолидатором для стека протоколов NDN и может быть установлен в каждом смоделированном узле аналогично другим стекам сетевых протоколов, таким как IPv4 и IPv6. Когда он установлен на узле NS-3, то выполняет инициализацию экземпляра NFD, создает необходимые менеджеры NFD, таблицы (PIT, FIB, StrategyChoice) и специальные грани. Кроме того, класс `ndn::L3Protocol` определяет API для обработки регистрации новых экземпляров `nfd::Face` в NFD с использованием метода `AddFace` и предоставляет точки входа NS-3 TraceSource для трассировки пакетов.

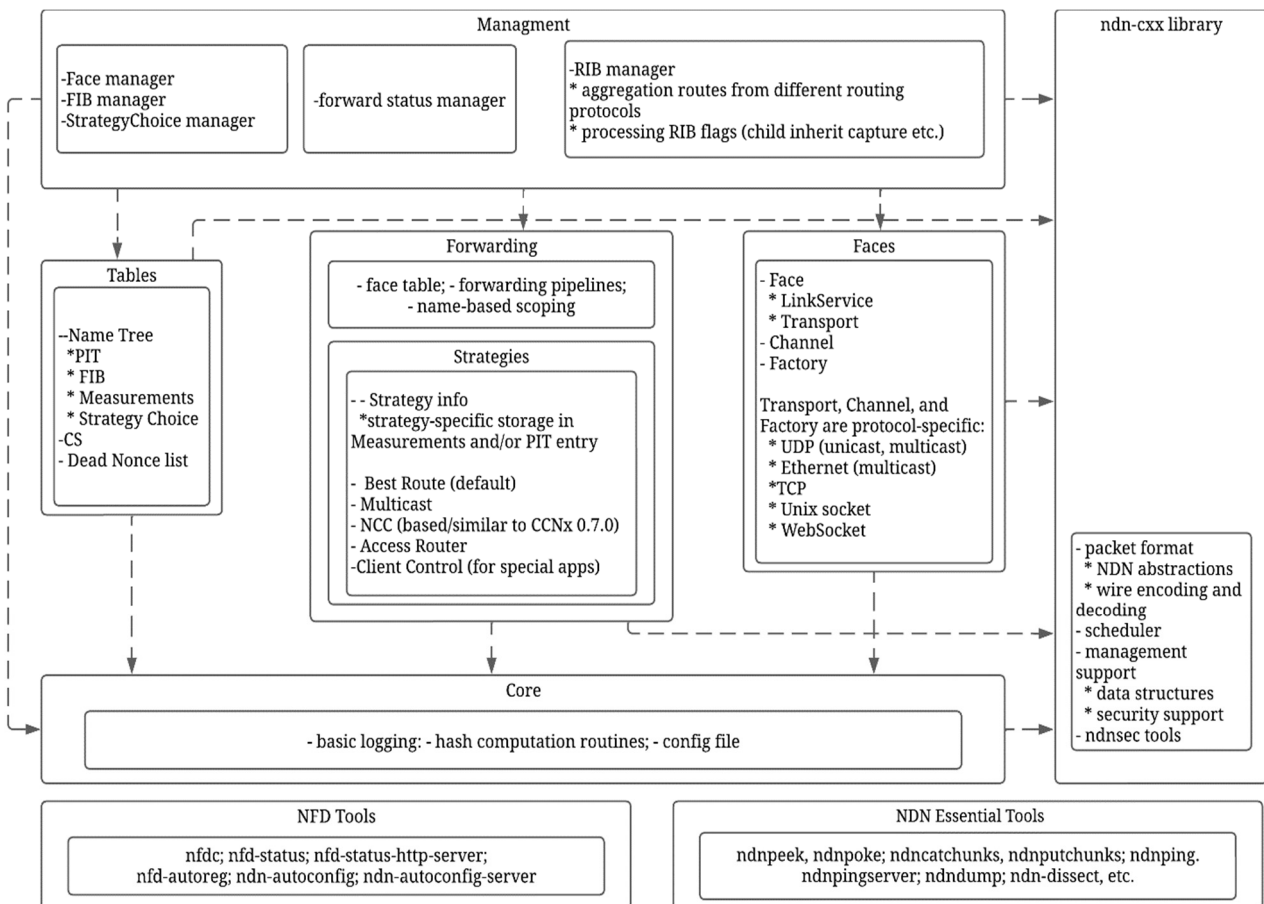


Рис. 2. Структурная схема модуля NFD

В модели для тестирования пропускной способности использовалось  $N$  получателей (consumer $N$ ) и производителей (producer $N$ ) (рис. 3) и два роутера (router1, router2). Между роутерами существует связь один-к-одному. Канал связи между роутерами имеет ограниченную пропускную способность, назовем проблему – «bottleneck» («горлышко бутылки»). Для большей точности измерения для всех каналов связи между потребителями и маршрутизатором, а также производителями и маршрутизатором установлен одинаковую пропускную способность в 10 Mbps.

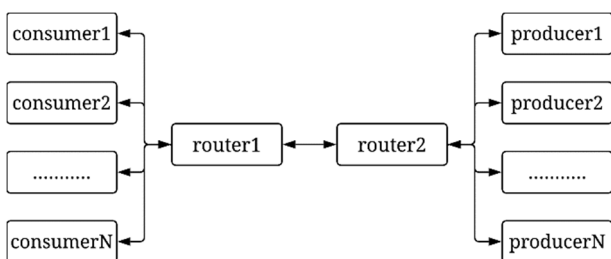


Рис. 3. Схема взаимодействия получателей и производителей в NDN

В ходе экспериментального моделирования в конфигурациях устанавливалось разное количество потребителей контента и производителей. Так, в первом сценарии было установлено три consumer и три producer. Во втором сценарии – четыре consumer и четыре producer. В третьем сценарии определено по пять consumer и producer соответственно. Связь между потребителями и производителями устанавливалась через маршрутизаторы router1 и router2 соответственно.

В процессе моделирования выполнялась рассылка набора пакетов Interest между consumer и producer и устанавливалась разная пропускная способность «bottleneck». В таблице представлены полученные значения перегрузки сети в зависимости от количества consumer и producer ( $N$ ) и пропускной способности линии. На рис. 4 представлены графики отношения пропускной способности «bottleneck» к значению перегрузки канала передачи. На оси ординат показаны превышения пропускной способности в Kbps, на оси абсцисс – пропускная способность в Mbps.

Согласно полученным данным можно сделать вывод, что превышение пропускной способности прямо пропорционально пропускной

способности канала и в общем случае имеет линейный вид (рис. 4).

**Зависимости перегрузки сети**

N	Пропускная способность (Mbps)			
	0,5	1	2	3
3	2086	1573	567	–
4	2910	2376	1258	250
5	3800	2992	1719	825

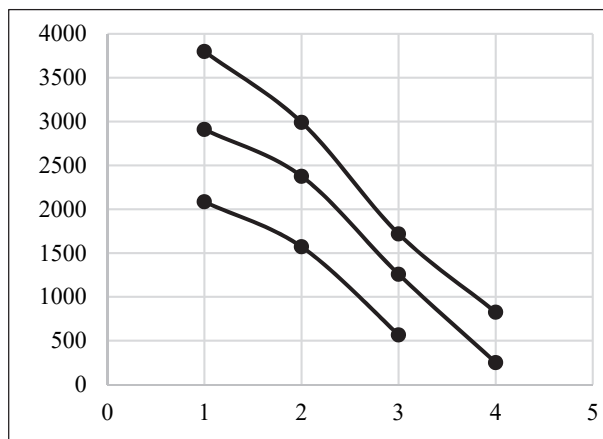


Рис. 4. Зависимость перегрузки сети от количества устройств при изменении пропускной способности

Благодаря прогнозированию перегрузок в сетях NDN можно предотвращать перегрузку каналов связи NDN при замене TCP/IP.

**Заключение.** Развитие коммуникационных сетей не остановилось на улучшении модели TCP/IP, а получило развитие в виде стека протоколов NDN. Именованные сети данных меняют базовую модель сетевого взаимодействия. Доставка IP пакетов получателями, идентифицируемыми по IP-адресам в NDN, была заменена на именованные запросы данных. Именование позволяет NDN защищать данные непосредственно на сетевом уровне, делая каждый пакет данных проверяемым и, при необходимости, конфиденциальным.

Согласно результатам моделирования установлено, что перегрузка каналов связи при использовании NDN будет повышаться линейно по мере увеличения объектов в сети и снижаться пропускная способность, что соответствует существующим закономерностям в сетях, построенных на основе стека протоколов TCP/IP.

**Список литературы**

1. Networking named content / V. Jacobson [et al.] // CoNEXT '09: Networking named content: proceedings of the 5th International Conference on Emerging Networking Experiments and Technologies. New York, 2009. P. 1–12.
2. NdnSIM 2: An updated NDN simulator for NS-3. NDN / S. Mastokaris [et al.] // Technical Report NDN-0028, Revision 2. Los Angeles, 2011. P. 1–8.



3. Study of Censorship in Named Data Networking / L. Zhang [et al.] // *Advanced Multimedia and Ubiquitous Engineering: Future Information Technology*. 2016. Vol. 2. P. 145–152. DOI:10.1007/978-3-662-47895-0-18
4. Named data networking / L. Zhang [et al.] // *SIGCOMM*, series 44, Computer Communication Review Named Data Networking. 2014. Issue 3. P. 66–73.
5. NFD developer's guide / A. Afanasyev [et al.] // Technical Report NDN-0028, Revision 2. Los Angeles, 2016. P. 29–31.
6. Named data networking for content delivery network workflows / R. K. Thelagathoti [et al.] // 2020 IEEE 9th International Conference on Cloud Networking (CloudNet). 2020. P. 1–7. DOI: 10.1109/CloudNet51028.2020.9335806.
7. Riley G. F., Henderson T. R. The ns-3 network simulator // *Modeling and tools for network simulation*. 2010. P. 15–34. DOI:10.1007/978-3-642-12331-3\_2.
8. Afanasyev A., Moiseenko I., Zhang L. NdnSIM: NDN simulator for NS-3 // Technical Report NDN-0005. Revision 2. Los Angeles, 2012. P. 1–7.
9. Forwarding strategies in vehicular named data networks: A survey / K. Ahed [et al.] // *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, series 34. 2022. Issue 5. P. 1819–1835.

### References

1. Jacobson V., Smetters D. K., Thornton J. D., Plass M. F., Briggs N. H., Braynard R. L. Networking named content. *CoNEXT '09: Networking named content: proceedings of the 5th International Conference on Emerging Networking experiments and technologies*. New York, 2009, pp. 1–12.
2. Mastorakis S., Afanasyev A., Moiseenko I., Zhang L. NdnSIM 2: An updated NDN simulator for NS-3. NDN. *Technical Report NDN-0028, Revision 2*. Los Angeles, 2011, pp. 1–8.
3. Zhang L., Estrin D., Burke J., Jacobson V., Thornton J. D., Smetters D. K. Study of Censorship in Named Data Networking. *Advanced Multimedia and Ubiquitous Engineering: Future Information Technology*, 2016, vol. 2, pp. 145–152. DOI: 10.1007/978-3-662-47895-0\_18.
4. Zhang L., Afanasyev A., Burke J., Jacobson V., Claffy K. C., Crowley P., Zhang B. Named data networking. *SIGCOMM*, series 44, Computer Communication Review Named Data Networking, 2014, issue 3, pp. 66–73.
5. Afanasyev A., Shi J., Zhang B., Zhang L., Moiseenko I., Yu Y., Wang, L. NFD developer's guide. *Technical Report NDN-0028, Revision 2*. Los Angeles, 2016, pp. 29–31.
6. Thelagathoti R. K., Mastorakis S., Shah A., Bedi H., Shannigrahi S. Named Data Networking for Content Delivery Network Workflows. *2020 IEEE 9th International Conference on Cloud Networking (CloudNet)*, 2020, pp. 1–7. DOI:10.1109/CloudNet51028.2020.9335806.
7. Riley G. F., Henderson T. R. The ns-3 network simulator. *Modeling and tools for network simulation*, 2010, pp. 15–34. DOI:10.1007/978-3-642-12331-3\_2.
8. Afanasyev A., Moiseenko I., Zhang L. NdnSIM: NDN simulator for NS-3. *Technical Report NDN-0005, Revision 2*. Los Angeles, 2012, pp. 1–7.
9. Ahed K., Benamar M., Lahcen A. A., El Ouazzani R. Forwarding strategies in vehicular named data networks: A survey. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, series 34, 2022, issue 5, pp. 1819–1835.

### Информация об авторе

**Гончар Егор Андреевич** – магистрант кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: gonchar@belstu.by

### Information about the author

**Gonchar Egor Andreevich** – Master's degree student, the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gonchar@belstu.by

Поступила после доработки 30.01.2023

УДК 004.27

**М. Н. Карпович**

Белорусский государственный технологический университет

**ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МИКРОСЕРВИСНО-СОБЫТИЙНЫХ  
АРХИТЕКТУР ДЛЯ ВЫСОКОНАГРУЖЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ  
ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИЙ**

В статье рассматриваются характеристики различных архитектурных решений, сложности, проблемы, ключевые особенности и лучшие практики при их использовании. Выполнено сравнение монолитной, микросервисной и событийно-ориентированной архитектуры. При создании архитектуры для обработки больших потоков данных разработчики сочетают архитектуру, управляемую событиями, и архитектуру микросервисов для создания систем, которые являются чрезвычайно масштабируемыми, доступными, отказоустойчивыми, параллельными и простыми в разработке и обслуживании. Описываются и сравниваются подходы к работе с данными в микросервисной и монолитной архитектурах. Рассматриваются паттерны маршрутизации запросов, такие как API Gateway и Service Discovery. Указаны их преимущества, недостатки и особенности реализации. Сравняются два подхода поиска адресов на стороне сервера и клиента. Приводится пример реализации событийно-ориентированной архитектуры на основе таких паттернов, как посредник и брокера. Описываются способы их реализации, особенности, сильные и слабые стороны каждого из них. Приведены сравнения подходов для межпроцессорного общения микросервисов, использующих синхронный и асинхронный тип взаимодействия. Даны сравнения брокеров сообщений по различным параметрам. В заключении обосновывается выбор архитектуры приложения для распределенной обработки больших объемов данных.

**Ключевые слова:** микросервисная архитектура, событийно-ориентированная архитектура, паттерн посредник, паттерн брокера.

**Для цитирования:** Карпович М. Н. Особенности проектирования микросервисно-событийных архитектур для высоконагруженных распределенных систем обработки информации // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 89–95. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-15.

**M. N. Karpovich**

Belarusian State Technological University

**FEATURES OF DESIGNING MICROSERVICE-EVENT  
ARCHITECTURES FOR HIGHLY LOADED DISTRIBUTED INFORMATION  
PROCESSING SYSTEMS**

The article discusses the characteristics of various architectural solutions, complexities, problems, key features and best practices in their use. Comparison of monolithic, microservice and event-oriented architecture. When creating an architecture for processing large data flows, developers combine an event-driven architecture and a microservices architecture to create systems that are extremely scalable, affordable, fault-tolerant, parallel, and easy to develop and maintain. Approaches for working with data in microservice and monolithic architecture are described and eliminated. The patterns for routing requests, such as API Gateway and Service Discovery, are considered, their advantages, disadvantages and implementation features are described. Two approaches for searching addresses on the server and client side are compared. An example of the implementation of event-oriented architecture based on such patterns as: intermediary and message broker is given. The ways of their implementation, the strengths and weaknesses of each of these approaches are described. Comparison of approaches for interprocessor communication of microservices using synchronous and asynchronous type of interaction. Describes the comparison of message brokers by various parameters. In conclusion, conclusions are drawn on the choice of the optimal architecture for processing large amounts of data.

**Keywords:** microservice architecture, event-driven architecture, mediator pattern, broker pattern.

**For citation:** Karpovich M. N. Features of designing microservice-event architectures for highly loaded distributed information processing systems. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 89–95. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-15 (In Russian).

**Введение.** Современное программное обеспечение должно обрабатывать большие потоки данных и соответствовать сложным бизнес-требованиям.

Архитектура программ обеспечивает удобство обслуживания и расширяемость приложений. Однако выбор подходящей архитектуры – нетривиальная задача. Важными являются тщательное рассмотрение требований к функциям приложения, временным рамкам проекта, бизнес-требований и опыт команды разработчиков. Хотя микросервисы естественным образом подходят для сложных приложений и облачной среды, во многих случаях может быть лучше начать разработку монолитной архитектуры, а затем перенести приложение на микросервисную архитектуру.

Микросервисы – это архитектурный стиль, в котором одно приложение строится с использованием нескольких небольших сервисов [1]. Каждый сервис работает в своем собственном процессе и взаимодействует с другими службами с помощью облегченного механизма, часто синхронных веб-сервисов REST. Каждый сервис представляет собой небольшой компонент, который выполняет один бизнес-процесс – аутентификацию, уведомление, обработку платежей и т. д. В разных сервисах могут использоваться разные технологические стеки, базы данных, фреймворки и языки программирования. Они также могут быть независимо развернуты и масштабируемы [2, 3].

Связь между различными микросервисами в приложении обычно реализуется с помощью веб-сервисов REST или архитектуры, управляемой событиями (EDA – Event Driven Architecture), и потоковой обработки. Архитектура, управляемая событиями, это слабосвязанная архитектура, основанная на асинхронной обработке потока событий в реальном времени. EDA – популярный шаблон распределенной асинхронной архитектуры, который может быть использован для решения проблемы работы с распределенными данными.

Он обладает высокой масштабируемостью и гибкостью. В EDA каждый микросервис публикует событие, когда происходит какое-то действие, т. е. служба заказов будет публиковать новое событие, когда заказ был создан или изменен. Остальные микросервисы подписываются на интересные их события. Например, служба инвентаризации подпишется на события нового заказа, так как ей необходимо уменьшить количество соответствующих товаров в базе данных инвентаризации. Событие можно определить как «существенное изменение состояния» [3].

Хотя концепция EDA возникла в начале 2000-х гг., в последние годы она привлекла большое внимание. EDA является предпочтительным архитектурным стилем для многих облачных приложений, требующих высокой доступности и быстрой пропускной обработки данных.

Цель данной статьи – анализ и выбор подходящей архитектуры для разработки высоконагруженного распределенного приложения обработки большого количества данных.

**Основная часть.** Сравним микросервисы с традиционной монолитной архитектурой. Монолитные приложения имеют следующие преимущества [2]:

- простота разработки и тестирования. Если приложение относительно небольшое: большинство корпоративных приложений имеют монолитную многоуровневую архитектуру (уровень представления, уровень интеграции (сервиса), уровень бизнес-логики, база данных и слой доступа);

- удобство развертывания приложений (есть только одно приложение, которое необходимо развернуть и настроить);

- масштабирование приложения (при необходимости балансировщик нагрузки может распределить нагрузку между несколькими экземплярами приложения);

- модульная структура приложений (модули приложений взаимодействуют друг с другом через удаленные вызовы процедур).

Многие из существующих успешных приложений проектировались как монолитные. Однако по мере роста размера приложений следует учитывать некоторые недостатки монолитной архитектуры [2]:

- если приложение становится слишком большим и сложным, разработчикам значительно труднее внедрять новые функции или быстро вносить изменения;

- тестирование становится намного сложнее, поскольку изменения могут привести к дефектам регрессии в любом модуле;

- снижение надежности (проблемы в любом модуле приложения могут привести к остановке всего приложения);

- внедрение новых технологий становится сложнее, поскольку обновление фреймворков или языковой версии влияют на все приложение;

- непрерывное развертывание больших монолитных приложений затруднено – обновление в одном модуле потребует повторного развертывания всего приложения, что может быть дорогостоящим с точки зрения аппаратных ресурсов и времени.

В микросервисной архитектуре приложение разбивается на набор небольших, слабо связанных сервисов, каждый сервис из которых отвечает за один бизнес-процесс. Например, приложение для онлайн-покупок может состоять из сервиса каталога товаров, сервиса инвентаризации, сервиса заказов, сервиса доставки, сервиса пользователей, сервиса рекомендаций по продуктам и т. д.

Каждый микросервис использует собственную базу данных. Хотя такой подход может привести к дублированию данных, он обеспечивает слабую связанность сервисов.

Преимущества микросервисов заключаются в следующем [2]:

- проблема сложности больших монолитных приложений решается путем разбиения приложения на много мелких сервисов. Каждый сервис разрабатывается и поддерживается одной выделенной командой;

- простое внедрение новых технологий: небольшая команда, поддерживающая соответствующий сервис, несет ответственность для выбора технологий реализации;

- простое и быстрое развертывание: каждую службу можно развертывать независимо. Непрерывное развертывание также намного проще организовать по сравнению с большими монолитными приложениями;

- упрощенная масштабируемость: каждый сервис можно масштабировать независимо;

- отказоустойчивость: приложение работает, даже если один сервис выходит из строя.

Тем не менее следует отметить следующие недостатки микросервисов [2]:

- первоначальная стоимость внедрения: архитектура микросервисов хорошо работает только для сложных приложений. Разработка и реализация взаимосвязанных сервисов требует много времени в начале процесса разработки, а также есть необходимость в опытных архитекторе и команде;

- существует значительная нагрузка на связь из-за частых вызовов микросервисов;

- бизнес-транзакции, которые требуют обновления нескольких бизнес-объектов, должны обновлять разные базы данных, принадлежащие разным сервисам;

- трудно вносить изменения, затрагивающие несколько сервисов.

В разработке программного обеспечения шаблоны проектирования [3] являются хорошим общим решением перечисленных проблем. Gateway API и Service Discovery – два наиболее часто используемых шаблона в микросервисной архитектуре.

При использовании монолитной архитектуры клиенту, скорее всего, потребуется сделать только один вызов REST сервиса, который соберет необходимую информацию. Однако при использовании микросервисов существуют следующие варианты:

- вызвать каждый сервис напрямую, чтобы получить необходимую информацию. В предложенном простом примере клиенту нужно сделать небольшое количество вызовов. Однако для больших приложений клиенту может потребоваться вызвать сотни сервисов. Некоторые сервисы могут использовать разные протоколы связи, из-за чего процесс доступа к данным усложняется;

- процесс по обновлению данных становится намного сложнее, если клиенты обращаются к ним напрямую.

Для маршрутизации запросов в микросервисах используют два паттерна: API Gateway и Service Discovery.

API Gateway похож на шаблон объектно-ориентированного проектирования Facade [4]. Он инкапсулирует внутреннюю архитектуру системы и предоставляет каждому клиенту определенный API. Этот один адрес указывает на систему и часто обрабатывает входящие запросы, вызывая несколько служб и объединяя полученные результаты. Такой подход упрощает клиентский код и сокращает количество взаимодействий между клиентом и приложением [4].

Важно отметить потенциальные недостатки Gateway API:

- это дополнительный компонент приложения, который необходимо разработать, развернуть и которым нужно управлять;

- это может стать узким местом при использовании в большой системе. Разработчики должны обновить API Gateway для изменения или обновления функциональных возможностей системы.

В традиционных корпоративных приложениях сетевые расположения различных сервисов являются статическими, и могут храниться в файлах конфигурации приложений. Однако в облачных приложениях IP-адреса различных служб назначаются динамически и часто меняются. Паттерн Service Discovery предлагает решение проблемы динамических адресов. Он использует реестр служб, где хранится информация обо всех доступных конечных точках сервиса.

Существует два шаблона для обнаружения микросервисов:

- поиск адресов на стороне сервера: клиенты используют балансировщик нагрузки для

отправки запросов. Балансировщик нагрузки запрашивает реестр службы и направляет запросы к соответствующему экземпляру службы [5];

– поиск адресов на стороне клиента: клиенты несут ответственность за поиск сетевых адресов доступных сервисов и для запросов балансировки нагрузки между сервисами. Когда сервисы запускаются, они регистрируют свой адреса в реестре услуг.

Реализовав поиск на стороне клиента, разработчики могут реализовывать приложение с конкретными инфраструктурными решениями по балансировке нагрузки [6].

В монолитных приложениях управление данными относительно простое – имеется только одна база данных [7]. При использовании реляционных баз данных приложения могут использовать ACID (atomicity (атомарность), consistency (согласованность), isolation (изоляция), durability (надежность)) и выполнять изменение нескольких строк и таблиц за одну транзакцию. Однако в микросервисной архитектуре данные каждого из них являются частными для этого сервиса и могут быть доступны только через API, который он предоставляет, что приводит к следующим основным проблемам распределенных данных:

– извлечение данных из нескольких сервисов;

– внедрение бизнес-транзакций, которые поддерживают согласованность данных между несколькими сервисами.

При организации событийно-ориентированной архитектуры сервисы рассчитаны на развертывание во множестве экземпляров. Поскольку состояние хранится в журналах событий, сам сервис не сохраняет состояние, что обеспечивает масштабирование любого сервиса.

Событие может состоять из двух частей:

– заголовок (имя, временная метка и тип события);

– тело (описывает то, что в действительности произошло).

Можно использовать события для реализации бизнес-транзакций, охватывающих несколько сервисов. Транзакции представлены серией шагов, где каждый шаг – это микросервис, который обновляет или создает бизнес-сущность и публикует событие, запускающее следующий шаг. EDA имеет две основные топологии: посредник (рис. 1) и брокера (рис. 2):

Для каждого начального шага посредник отправляет обрабатываемое событие и ждет, когда данное событие будет обработано соответствующим обработчиком. Этот процесс продолжается до тех пор, пока все события не будут обработаны. Обработчики прослушивают каналы событий и выполняют определенную бизнес-логику для работы данных событий.

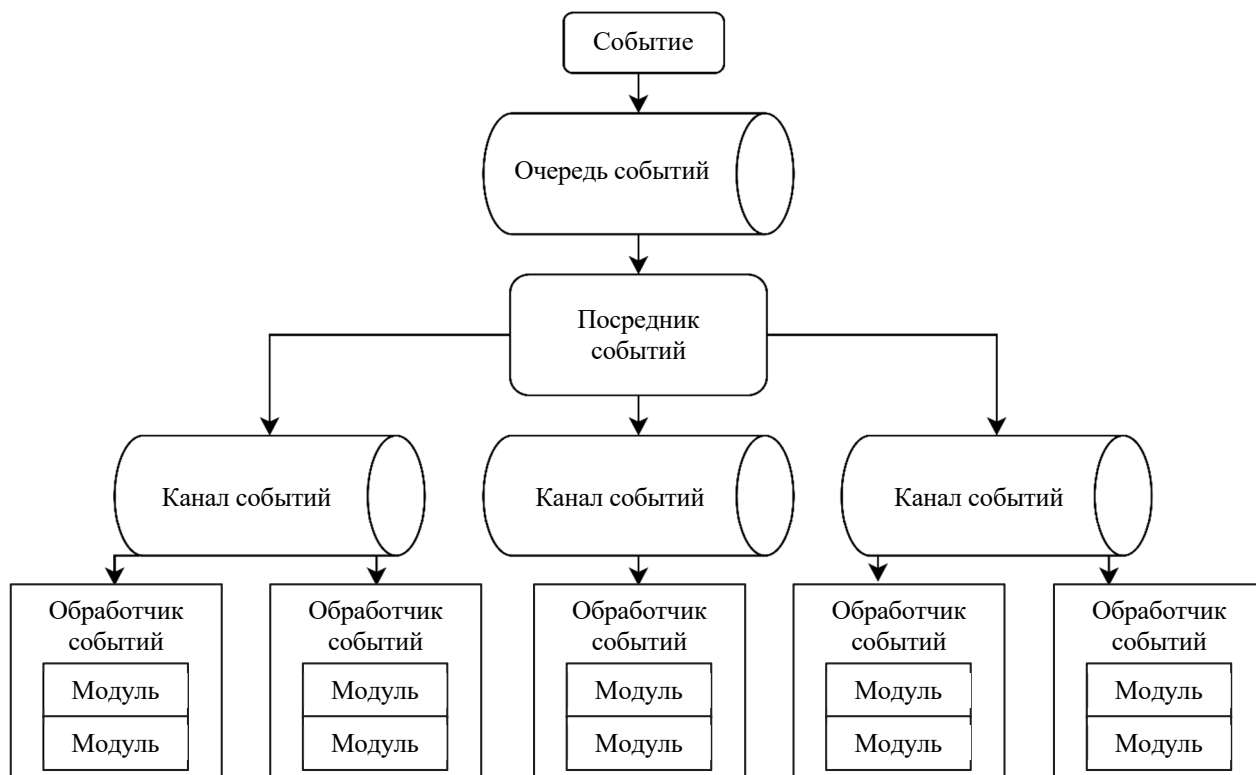


Рис. 1. Топология посредник

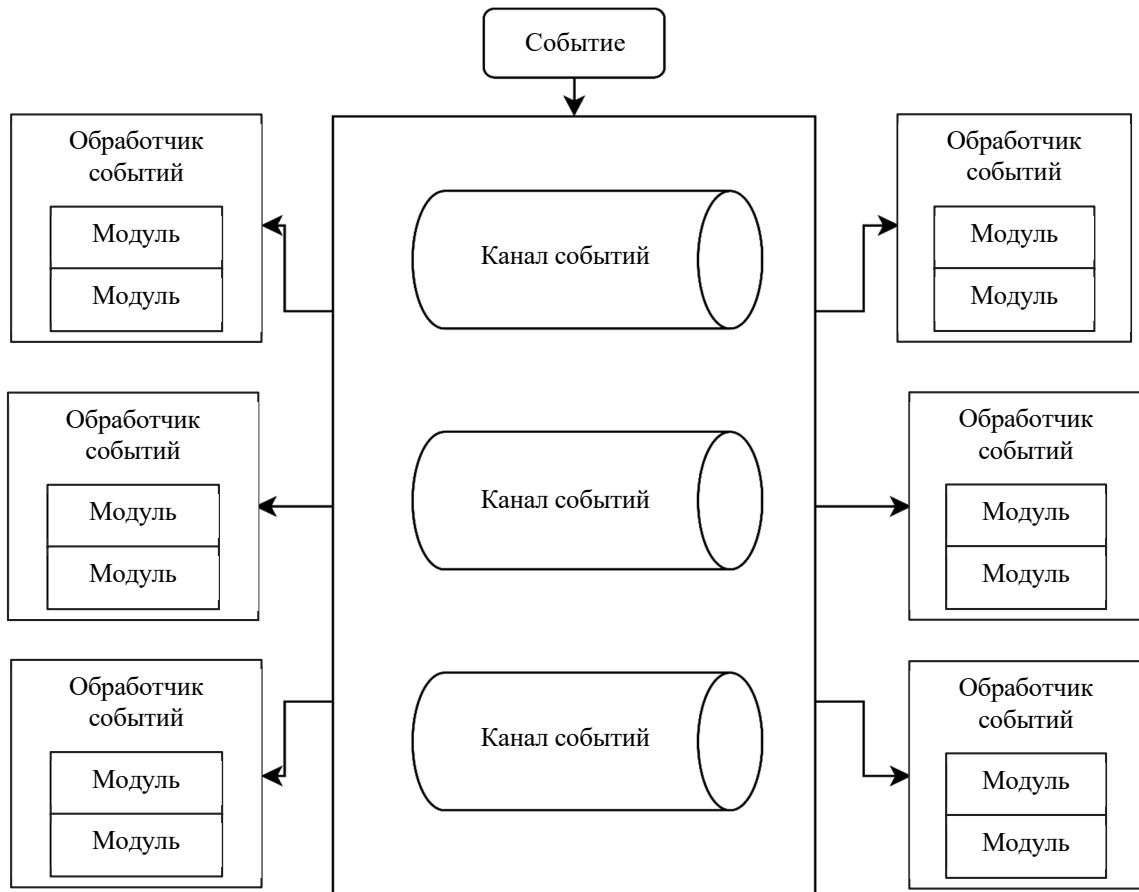


Рис. 2. Топология брокера

В топологии брокера (broker topology) нет центрального посредника событий. Брокеры сообщений наиболее широко используются для того, чтобы события могли обрабатываться несколькими потребителями событий (каждый из которых выполняет свою задачу).

В модели существует два типа компонентов: брокер и обработчики событий. Каждый обработчик отвечает за получение и публикацию нового события, чтобы уведомить других о выполненном действии. Брокер предоставляет следующие компоненты: очереди сообщений, темы сообщений или их комбинацию.

Очереди сообщений – довольно известный шаблон при проектировании системы, в которой необходимо асинхронное общение между компонентами с гарантированной доставкой, даже в случае недоступности обработчика событий [8].

Для каждой конкретной задачи определяются собственные требования к системе очередей. Основные требования, предъявляемые к очередям:

- пропускная способность;
- задержка сообщений;
- масштабируемость;
- поддержка протокола AMQP;
- упорядоченность отправки сообщений.

Основные преимущества использования очередей сообщений:

- дают возможность избежать неэффективного использования ресурсов;
- позволяют горизонтально масштабировать приложения; распределяют процессы обработки информации;
- позволяют балансировать нагрузку;
- дают возможность выдерживать пиковые нагрузки;
- повышают отказоустойчивость сервисов;
- обеспечивают порядок доставки, очередь работает по системе FIFO.

В случае сбоев в работе микросервисов механизмы асинхронной связи предоставляют различные методы восстановления данных и, как правило, лучше справляются с подобными ошибками [3].

Кроме того, при использовании брокеров сообщений вместо синхронного протокола REST, участвующего в обмене данными между сервисами, используется асинхронный способ, при котором сервисам не нужно знать друг о друге. Сравнение синхронного и асинхронного способов взаимодействия представлено в табл. 1.

Таблица 1  
Сравнение режимов взаимодействия сервисов

Режим взаимодействия	Достоинства	Недостатки
Синхронный	Работает в режиме реального времени; простая обработка ошибок	Может занять много времени при обработке запроса
Асинхронный	Запросы не блокируют друг друга; несколько действий могут выполняться параллельно	Сложнее отследить ошибки; разное время отклика на одинаковые события

Асинхронный режим расширяет возможности создания центрального средства обнаружения, мониторинга и выравнивания нагрузки, а также программ контроля соблюдения политик. При написании кода и создании системы он предоставляет больше возможностей, включая адаптивность и масштабируемость.

Из вышеперечисленного утверждения следует, что асинхронная связь, по определению, не блокируемая. Она поддерживает лучшее масштабирование по сравнению с синхронным режимом.

Асинхронная передача данных обычно выполняется через брокера сообщений. Другие способы, такие как AsyncIO, имеют ограниченные возможности [9].

Сравнение брокеров сообщений с точки зрения эффективности обмена сообщениями по различным критериям представлено в табл. 2.

Таблица 2  
Сравнение брокеров сообщений

Брокер сообщений	Масштабирование (количество запросов)	Поддерживаемые платформы	Режим one-to-one	Режим one-to-many
RabbitMQ	50 тыс./с	10	+	+
Kafka	1 млн/с	18	–	+
Pulsar	500 тыс./с	7	–	+
NATS	9 млн/с	48	+	+

При выборе брокера асинхронного режима следует учитывать следующие требования:

- масштабирование брокера – количество сообщений, отправляемых в системе, в секунду;
- количество поддерживаемых платформ;
- способность управлять клиентами в режиме one-to-one и/или one-to-many.

### Список литературы

1. Карпович М. Н. Проектирование микросервисных архитектур информационных систем // Информационные технологии: материалы 86-й науч.-техн. конф. проф.-препод. состава, науч.

Как видно из табл. 2, при больших объемах данных лучший выбор – Kafka, NATS, Pulsar. В этом случае требуется распределенная очередь с высокой пропускной способностью, созданная для длительного хранения больших объемов данных. Перечисленные варианты идеально подходят в тех случаях, где требуется персистентность.

Для сложной маршрутизации подойдет RabbitMQ. Это давно известный, популярный брокер со множеством функций и возможностей, поддерживающих сложную маршрутизацию при незначительном объеме трафика (несколько десятков тысяч сообщений в секунду) [10].

**Заключение.** Согласно проведенному анализу, наиболее эффективной с точки зрения производительности при обработке большого количества данных является микросервисная архитектура, основанная на событиях.

Разработчики могут комбинировать архитектуру, управляемую событиями, и микросервисную архитектуру для разработки распределенных, высокодоступных, отказоустойчивых и высокопроизводительных приложений. Приложения могут обрабатывать большие объемы данных и при этом будут широко масштабируемыми. Однако, разработчики должны учитывать множество архитектурных проблем и сложностей, на основе которых нужно принимать ключевые архитектурные решения.

В данной статье рассмотрены архитектурные решения для разработки высоконагруженных приложений и факторы, которые необходимо учитывать при принятии решений. Приведено сравнение синхронного и асинхронного способов взаимодействия микросервисов. Обоснованы рекомендации использования асинхронного режима.

Сформулированы основные требования, предъявляемые к решениям коммуникаций в микросервисах на основе очереди сообщений. Выполнен анализ основных провайдеров обмена сообщениями: RabbitMQ, Kafka, NATS, Pulsar по критериям масштабируемости, управляемости, персистентности, гарантии доставки и количеству поддерживаемых платформ.

Исходя из этого можно сделать вывод, что наиболее эффективным с точки зрения пропускной способности, масштабируемости и отказоустойчивости является событийно-ориентированная микросервисная архитектура, использующая топологию брокера и асинхронный способ взаимодействия сервисов между собой.

сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 31 января – 12 февраля 2022 года. Минск: БГТУ, 2022. С. 82–85.

2. Newman S. *Monolith to Microservices: Evolutionary Patterns to Transform Your Monolith*. USA: O'Reilly Media Publ., 2019. P. 255.

3. Bellemare A. *Building Event-Driven Microservices*. USA: O'Reilly Media, 2020. 304 p.

4. Richardson C. *Microservices Patterns: With examples in Java*. USA: Manning, 2018. 520 p.

5. Gough J., Bryant D., Auburn M. *Mastering API Architecture*. USA: O'Reilly Media, 2021. 268 p.

6. Christudas B. *Practical Microservices Architectural Patterns*. USA: Apress, 2019. 934 p.

7. Bruce M., Pereira P. *Microservices in Action*. USA: Manning, 2018. 392 p.

8. Filipe H., Rocha O. *Practical Event-Driven Microservices Architecture*. USA: Apress, 2021. 166 p.

9. Stopford B. *Designing Event-Driven Systems*. USA: O'Reilly Media, 2018. P. 75–80.

10. Mertcan A. *Redis vs Kafka vs RabbitMQ // Buy me a coffee*. URL: <https://buymeacoffee.com/argumertcan/redis-vs-kafka-vs-rebbitmq> (дата обращения: 22.12.2022).

### References

1. Karpovich M. N. Designing microservice architectures of information systems. *Informatsionnyye tekhnologii: materialy 86-y nauchno-tekhnicheskoy konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov* [Information technologies: materials of the 86th scientific-technical conferences of teaching staff, researchers and postgraduates (with international participation)], Minsk, January 31 – February 12, 2022. Minsk, 2022, pp. 82–85 (In Russian).

2. Newman S. *Monolith to Microservices: Evolutionary Patterns to Transform Your Monolith*. USA, O'Reilly Media Publ., 2019. 255 p.

3. Bellemare A. *Building Event-Driven Microservices*. USA, O'Reilly Media Publ., 2020. 304 p.

4. Richardson C. *Microservices Patterns: With examples in Java*. USA, Manning Publ., 2018. 520 p.

5. Gough J., Bryant D., Auburn M. *Mastering API Architecture*. USA, O'Reilly Media Publ., 2021. 268 p.

6. Christudas B. *Practical Microservices Architectural Patterns*. USA, Apress Publ., 2019. 934 p.

7. Bruce M., Pereira P. *Microservices in Action*. USA, Manning Publ., 2018. 392 p.

8. Filipe H., Rocha O. *Practical Event-Driven Microservices Architecture*. USA, Apress Publ., 2021. 166 p.

9. Stopford B. *Designing Event-Driven Systems*. USA: O'Reilly Media Publ., 2018, pp. 75–80.

10. Mertcan A. *Redis vs Kafka vs RabbitMQ: Buy me a coffee*. Available at: <https://buymeacoffee.com/argumertcan/redis-vs-kafka-vs-rebbitmq> (accessed 22.12.2022).

### Информация об авторе

**Карпович Максим Николаевич** – магистрант кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: [karpovich@belstu.by](mailto:karpovich@belstu.by)

### Information about the author

**Karpovich Maksim Nikolaevich** – Master's degree student, the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [karpovich@belstu.by](mailto:karpovich@belstu.by)

Поступила после доработки 30.01.2023



# ЮБИЛЕЙ УЧЕНОГО ANNIVERSARY OF THE SCIENTIST

---

**К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ В. С. ВИХРЕНКО,  
РУКОВОДИТЕЛЯ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ В ОБЛАСТИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ  
ТЕРМОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

**TO THE 80-TH ANNIVERSARY OF THE BIRTH OF V. S. VIKHRENKO,  
DIRECTOR OF THE SCIENTIFIC SCHOOL IN THE FIELD OF STATISTICAL  
THERMODYNAMICS AND MECHANICS OF CONTINUOUS MEDIUMS**



**Вячеслав Степанович Вихренко  
(1943–2020)**

Доктор физико-математических наук профессор, заведующий кафедрой теоретической механики (2001–2010), профессор (с 1997), руководитель *Научной школы в области статистической термодинамики и механики сплошных сред* (2005–2020)

Вячеслав Степанович работал в Белорусском технологическом институте (ныне Белорусский государственный технологический университет – БГТУ) с января 1966 г. в должности ассистента, старшего преподавателя, доцента, профессора кафедры теоретической механики. С 2001 г. по 2010 г. заведовал вышеуказанной кафедрой, с 2011 по 2017 г. являлся профессором кафедры теоретической механики, а с 2018 г. по 2020 г. – профессором кафедры механики и конструирования в БГТУ.

В. С. Вихренко родился 30 мая 1943 г. в деревне Голицино Мичуринского (в то время Юрловского) района Тамбовской области. В 1951 г. родители переехали на Украину в село Покотилово Подвысоцкого района Кировоградской области. Отец работал бухгалтером в колхозе, а мать – швеей. После окончания Покотилловской средней школы в 1960 г. будущий ученый поступил на лесоинженерный факультет Белорусского лесотехнического института, который окончил с отличием в 1965 г. Во время учебы в институте В. С. Вихренко прошел систему факультативных курсов, организованных профессором Л. А. Роттом, изучил основные физико-математические дисциплины, читаемые на физическом факультете вуза, сдал по ним экзамены и зачеты.

После окончания института В. С. Вихренко был распределен на кафедру теоретической механики и с января 1966 г. стал работать ассистентом. С ноября 1966 г. по декабрь 1967 г. служил в армии, затем продолжил работать ассистентом. Еще в годы учебы в институте начал заниматься под руководством профессора Л. А. Ротта научно-исследовательской работой и в 1970 г. в БГУ защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по статистической теории кинетических характеристик молекулярных систем. Звание доцента Вячеславу Степановичу было присвоено в 1974 г., звание профессора – в 1997 г. В Институте физики АН Беларуси в 1994 г. им была защищена диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по статистической теории динамических и кинетических свойств молекулярных и ионных конденсированных систем.

Многие научные работы В. С. Вихренко посвящены развитию статистико-механического

метода условных распределений, предложенного Л. А. Роттом. В 1975 г. в журнале *Fortschritte der Physik* совместно с Л. А. Роттом была опубликована обзорная статья, посвященная этому методу. С его помощью исследованы равновесные и кинетические свойства молекулярных систем, в частности особенности релеевского рассеяния света системой несферических молекул. Обзор по деполяризованному молекулярному рассеянию света был опубликован В. С. Вихренко в 1974 г. в журнале «Успехи физических наук» – одном из наиболее авторитетных советских научных журналов. В 1976/1977 г. Вячеслав Степанович проходил стажировку в отделе физической химии Брюссельского свободного университета, который возглавлял будущий лауреат Нобелевской премии профессор Илья Пригожин.

В дальнейшем Вячеславом Степановичем были установлены творческие контакты с сотрудниками Института атомной энергии имени И. В. Курчатова в Москве и Института высокотемпературной электрохимии в Екатеринбурге (в то время г. Свердловск), которые изучали возможности использования твердых электролитов в энергетических устройствах. В результате был выполнен цикл работ по исследованию механизмов массо- и электропереноса в твердых электролитах.

В середине 90-х гг. прошлого столетия появилась возможность установления тесных научных контактов с авторитетными западными научными центрами. В 1996 г. В. С. Вихренко возглавил группу сотрудников кафедры теоретической механики, получивших трехгодичный грант по программе INTAS, в котором, помимо БГТУ, участвовали Институт математики НАН Беларуси, Институт физики НАН Украины, Институт исследования стали имени Макса Планка (г. Дюссельдорф, Германия) и Университет имени Аристотеля (г. Салоники, Греция). В рамках этого гранта, а также в последующих работах была создана статистико-механическая теория процессов переноса в решеточных флюидах, используемых в качестве моделей многих технологически важных систем. К ним относятся интеркаляционные соединения, ионные кристаллы, мономолекулярные слои и др. В дальнейшем в развитие этой тематики совместно с профессором Х. Бискертом (Университет Жауме, Кастилло, Испания) исследованы кинетические процессы в электронных подсистемах твердых тел, которые, в частности, используются в солнечных элементах.

В 1998–2000 гг. совместно с профессором В. Б. Немцовым и сотрудниками Института биофизической химии имени Макса Планка (г. Геттинген, Германия) выполнялись работы по исследованию колебательной релаксации молекул в жидкостях в рамках гранта Фольксвагеновского фонда. Информация о характере протекания

колебательной релаксации необходима для понимания механизмов химических реакций. В. С. Вихренко разработал широко используемую методику анализа внутри- и межмолекулярных каналов передачи энергии на основе анализа работы и мощности соответствующих силовых взаимодействий, обусловленных эволюцией обобщенных координат, в частности колебательных мод молекул. В этот период и впоследствии были получены принципиально важные результаты по выяснению механизмов колебательной релаксации молекул, причин сверхбыстрой релаксации на пико- и субпикосекундных (например, в молекулах воды) интервалах времени.

В период руководства В. С. Вихренко *Научной школой в области статистической термодинамики и механики сплошных сред* (2005–2020) наряду с дальнейшим развитием статистического метода условных распределений Л. А. Ротта произошло значительное расширение тематики научных исследований за счет перехода к изучению новых физических объектов и систем с более сложными межчастичными взаимодействиями.

В. С. Вихренко совместно с Г. С. Бокуном разработали новую процедуру статистико-механического описания твердотельной системы, взаимодействие частиц в которой описывается как коротко-, так и дальнедействующим потенциалами. Для этого использовано разложение конфигурационного интеграла системы по обобщенным (модифицированным) майеровским функциям, включающим в себя (помимо короткодействующего потенциала) потенциалы средних сил. В базисное распределение включено дальнедействие на фоне среднего поля, создаваемого потенциалами средних сил. Характеристики базисной системы определены с помощью результатов метода коллективных переменных. Теория использована для описывающих керамические ионные материалы моделей, в которых рассматривается подвижность катионов в поле неподвижных анионов, обеспечивающих компенсацию электрического заряда в объеме исследуемых моделей.

М. И. Кулак построил статистическую теорию описания структуры и упруго-прочностных свойств фрактальных дисперсных систем. Им развита самосогласованная теория эффективного модуля упругости дисперсно-армированных композитов стохастической структуры. На основе фрактальных подходов исследованы микроструктура и физико-механические свойства полиграфических материалов и технологии печатных процессов.

В. С. Вихренко совместно с Д. В. Гапанюком разработали новый приближенный метод вычисления и анализа равновесных характеристик решеточных газов, сочетающий в себе точность получаемых результатов с относительной простотой используемых вычислительных алгоритмов.

В результате получены формально строгие статистико-механические выражения для коэффициентов диффузии, которые использованы для количественных расчетов, в том числе электрофизических характеристик ионных кристаллов и интеркаляционных соединений. Построена статистико-механическая теория неравновесных процессов (диффузии, термодиффузии, структурной релаксации) в решеточных системах. Рассмотрена кинетика захвата электронов на ловушках, их диффузии и межфазных переходов в солнечных элементах на основе красителей, дано объяснение наблюдающихся особенностей в зависимости от времени жизни электронов и их концентрации.

В. С. Вихренко совместно с Г. С. Бокуном, Я. Г. Гродой и Р. Н. Ласовским разработаны методы исследования сложных систем с различными типами конкурирующих взаимодействий, включающих межчастичное притяжение на малых расстояниях и отталкивание на больших (т. е. SALR-системы или, наоборот, – SRLA-системы). Эти взаимодействия в системах многих частиц приводят к образованию четко определенных структур, таких как мицеллы, кластеры, слои, сети, многокомпонентные самосборные бислои, в частности биологические мембраны, белки, или более слабых микрогетерогенностей в сложных жидкостях, особенно ионных жидкостях и их смесях с различными растворителями, а также твердых электролитах и в интеркалированных соединениях. Исследованы равновесные свойства и структура монослоев таких систем на поверхностях, моделирующих подложки, и влияние на изучаемые характеристики ограничивающих поверхностей. Установлены разительные различия между процессами адсорбции на стенках простых и сложных жидкостей, состоящие в том, что адсорбция в сложных системах немонотонно изменяется с изменением объемной концентрации и сопровождается структурными особенностями строения приповерхностных слоев, что может иметь важное значение при изготовлении периодических матриц посредством самосборки. Изучены кинетические особенности процесса адсорбции систем с конкурирующими взаимодействиями.

И. И. Наркевич в рамках научной школы модифицировал статистический метод условных распределений Л. А. Ротта и разработал двухуровневый статистический метод описания структуры и равновесных характеристик неоднородных молекулярных систем, позволивший получить единое уравнение состояния для разных агрегатных состояний вещества (кристалл, жидкость, сильно сжатый газ). В кристаллическом состоянии вещества имеется возможность статистического описания свойств кристаллов с учетом деформации кристаллических решеток.

С помощью двухуровневого молекулярно-статистического подхода И. И. Наркевичем,

А. В. Жаркевичем и Е. В. Фарафоновой разработана статистическая модель одноосного деформирования линейных кристаллических образцов. В первом приближении по малому параметру с помощью нелинейного интегрального уравнения в статистической теории упругости получены аналитические выражения для младших коррелятивных функций и свободной энергии деформированной молекулярной цепочки с занятыми и свободными (вакантными) узлами, построена теоретическая диаграмма напряжение – деформация. В рамках разработанного взаимосвязанного микро- и макроскопического представления для деформированного кристалла с вакансиями получено интегральное уравнение, решение которого определяет унарную и бинарную коррелятивные функции, а также функционал свободной энергии, учитывающий наличие полей деформации и неоднородностей в распределении плотности и концентраций различных сортов частиц системы. В дальнейшем осуществлено статистическое изучение микроструктуры и термодинамических характеристик одиночных сферических кристаллических наночастиц, уникальные свойства которых приводят к необычному поведению новых модифицированных наноструктурных материалов, получаемых на их основе.

Г. С. Бокун и И. И. Наркевич в рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода установили, что если при использовании условия экстремальности функционала свободной энергии неоднородной системы привлечь уравнение диффузии для отыскания равновесного поля плотности, то полученное решение указывает на возможность реализации устойчивых состояний системы с наноразмерными неоднородностями плотности. Дальнейшие численные исследования функционала свободной энергии коллоидных растворов с использованием потенциала SALR показывают, что функционал таких систем может иметь несколько минимумов для пространственных волн плотности с разными значениями длин волн, для которых свободная энергия меньше энергии однородного состояния.

На основании созданной В. С. Вихренко и С. А. Борисевичем модели деформирования упругого стержня в рамках теории упругих стержней Коссера и последующих численного и натурального экспериментов по свободному падению дерева впервые разработана методика определения коэффициентов сопротивления крон деревьев при обтекании их воздухом. В результате определены диапазоны изменения значений коэффициентов сопротивления крон сосны как наиболее распространенной породы деревьев.

Под руководством В. С. Вихренко построена статистическая теория описания структуры и

упруго-прочностных характеристик фрактальных дисперсных систем. Развита самосогласованная теория эффективного модуля упругости дисперсно-армированных композитов стохастической структуры. На основе фрактальных подходов исследованы микроструктура и физико-механические свойства полиграфических материалов и технологии печатных процессов.

Проведенные научные исследования и полученные новые результаты создали предпосылки для участия коллектива *Научной школы в области статистической термодинамики и механики сплошных сред* в международном конкурсе и последующем выполнении в 2017–2021 гг. проекта MSCA RISE No 734276 “Effects of confinement on inhomogeneous systems” (CONIN) по научной программе Евросоюза HORIZON-2020, руководителем которого от Беларуси был В. С. Вихренко.

Результаты исследований последних двух десятилетий, проведенных профессором В. С. Вихренко и руководимой им научной школой, широко известны научной общественности, они докладывались на многих научных конференциях в Республике Беларусь, а также в ближнем и дальнем зарубежье. Итоги исследований представлены более чем в 300 научных работах, среди которых монография «Равновесные и диффузионные характеристики интеркаляционных систем на основе решеточных моделей», подготовленная В. С. Вихренко совместно с Г. С. Бокуном и Я. Г. Гродой (Минск, 2008 г.) и монография И. И. Наркевича «Двухуровневый статистический метод описания неоднородных систем» (Beau Bassin, Mauritius, Lambert AP, 2019 г.).

Свыше 50 работ В. С. Вихренко опубликовано в наиболее авторитетных международных научных журналах, информация о которых содержится в базе данных Scientific Citation Index. В научных статьях, которые публиковались в широко известных международных научных изданиях, ежегодно появлялось 30–40 ссылок на работы профессора В. С. Вихренко. Вячеслав Степанович – соавтор трех изобретений, одно из которых внедрено в производство на белорусском автомобильном заводе.

Научная деятельность В. С. Вихренко успешно сочеталась с педагогической работой в университете. Он читал курсы лекций и вел практические занятия по теоретической, прикладной и технической механике. Разработал и читал курс прикладной теории колебаний для студентов БГТУ и курс статистической физики для студентов физического факультета БГУ.

Вячеслав Степанович много внимания уделял работе с талантливой студенческой молодежью нашего университета. Его студенты неоднократно занимали призовые места на Республиканской олимпиаде по теоретической механике. Под его руководством регулярно выполнялись

студенческие научные работы, которые впоследствии получали высокую оценку на республиканских смотрах. Многие будущие сотрудники технических кафедр университета, когда проходили под руководством В. С. Вихренко обучение на кафедре теоретической механики, приобщались к научной работе в студенческие годы и сохраняли в дальнейшем творческие связи с ним. Он консультировал многих студентов при подготовке ими курсовых и дипломных проектов на выпускающих кафедрах, а после поступления некоторых из них в аспирантуру давал консультации по вопросам физико-математической направленности при подготовке кандидатских диссертаций.

В. С. Вихренко принимал участие в разработке оригинальных курсов теоретической механики для студентов-химиков и студентов механических специальностей, важными особенностями которых являлись учет межпредметных связей и внедрение проблемного метода обучения. В 1995 и 1996 гг. Вячеславу Степановичу были присуждены гранты Соросовского доцента. Под его руководством на основе компьютерного моделирования движения механических систем разработан лабораторный практикум по теоретической механике.

С 1970 по 1980 г. В. С. Вихренко являлся секретарем Белорусского республиканского объединения преподавателей теоретической механики, а также секретарем вышедшего в шести выпусках республиканского сборника научно-методических статей по теоретической механике. В течение многих лет состоял в редакционно-издательском совете университета, а с 1996 по 2020 г. являлся его председателем.

В описываемый период, когда В. С. Вихренко руководил работой научной школы, он одновременно являлся членом Европейского физического общества, а также научным руководителем и исполнителем четырех заданий по государственным научно-техническим программам, двух отдельных заданий Министерства образования Республики Беларусь.

За все время плодотворной научно-педагогической работы В. С. Вихренко подготовил пять кандидатов физико-математических наук (М. И. Кулак – 1982, Я. Г. Грода – 2002, Д. В. Гапанюк – 2009, Р. Н. Ласовский – 2011, С. А. Борисевич – 2016).

Награжден Почетными грамотами Минвуза БССР и ЦК ЛКСМБ (1973), Министерства народного образования БССР (1989), Министерства образования Республики Беларусь (1995 и 2000), ГКНТ Республики Беларусь (2005), нагрудным знаком «Изобретатель СССР».

***Благодарные коллеги и ученики  
профессора Вихренко В. С.***

# СОДЕРЖАНИЕ

---

<b>НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ</b> .....	5
<b>ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ</b> .....	5
<b>МАТЕМАТИКА</b> .....	5
<b>Асмыкович И. К., Сидорчик Д. Е., Королёв А. А.</b> О базе данных линейных дескрипторных систем в теории управления.....	5
<b>Волк А. М.</b> Анализ свойств статистических оценок параметров обобщенного гамма-распределения .....	10
<b>Якименко А. А.</b> Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа .....	15
<b>Можей Н. П.</b> Симметрические пространства неразрешимых групп ЛИ, не допускающие эквивалентных связностей .....	20
<b>МЕХАНИКА</b> .....	24
<b>Ласовский Р. Н., Бильданов Э. Э., Гапанюк Д. В.</b> Релаксация параметра порядка в решеточных системах с отталкиванием ближайших соседей .....	24
<b>ФИЗИКА</b> .....	29
<b>Крук Н. Н.</b> Спин-орбитальные взаимодействия в <i>орто</i> -арил-замещенных корролах и порфиринах.....	29
<b>Крук Н. Н., Гладков Л. Л., Кленицкий Д. В., Крылов А. Б.</b> Молекулярная конформация и ароматичность N-замещенных производных порфина .....	34
<b>Гладков Л. Л., Гладкова Г. А.</b> Молекулярная структура и колебания молекулы индолиноспиронафтооксазина.....	42
<b>ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ</b> .....	46
<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ</b> .....	46
<b>Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г., Егорова А. Л., Оробей И. О., Карпук П. О.</b> Схема замещения электрокинетического преобразователя на сдвиговом потоке .....	46
<b>ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ</b> .....	54
<b>Савельева М. Г., Урбанович П. П.</b> Растривание web-документов и использование его характеристик для стеганографической защиты авторских прав на электронный контент .....	54
<b>Николайчук А. Н., Урбанович П. П.</b> Стеганографический метод на основе использования особенностей отображения элементов в формате SVG .....	64
<b>СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ</b> .....	71
<b>Шульдова С. Г., Парамонов А. И., Карнаух Д. М., Лапицкая Н. В.</b> Анализ научной деятельности кафедры в контексте приоритетных направлений исследований и научного сотрудничества .....	71

---

<b>АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ</b> .....	77
<b>Прихожий А. А., Карасик О. Н.</b> Усовершенствованный разнородный блочно-параллельный алгоритм поиска кратчайших путей на графе .....	77
<b>Гончар Е. А.</b> Моделирование Named Data Networking сетей для исследования пропускной способности .....	84
<b>Карпович М. Н.</b> Особенности проектирования микросервисно-событийных архитектур для высоконагруженных распределенных систем обработки информации.....	89
 <b>ЮБИЛЕЙ УЧЕНОГО</b> .....	 96
К 80-летию со дня рождения В. С. Вихренко, руководителя научной школы в области статистической термодинамики и механики сплошных сред.....	96

# CONTENTS

---

<b>SCIENTIFIC PUBLICATIONS</b> .....	5
<b>PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES</b> .....	5
<b>MATHEMATICS</b> .....	5
<b>Asmykovich I. K., Sidorchik D. E., Korolyov A. A.</b> About the database on linear descriptor systems in control theory .....	5
<b>Volk A. M.</b> Analysis of the properties of statistical estimates of parameters of the generalized gamma distribution .....	10
<b>Yakimenka A. A.</b> Modal controllability of one two-dimensional delayed system.....	15
<b>Mozhey N. P.</b> Symmetric spaces of unsolvable lie groups that do not admit equiaffine connections	20
<b>MECHANICS</b> .....	24
<b>Lasovsky R. N., Bildanau E. E., Gapanjuk D. V.</b> Relaxation of order parameter in lattice systems with nearest neighbor repulsion.....	24
<b>PHYSICS</b> .....	29
<b>Kruk M. M.</b> Spin-orbit interactions in <i>ortho</i> -aryl-substituted corroles and porphyrins .....	29
<b>Kruk M. M., Gladkov L. L., Klenitsky D. V., Krylov A. B.</b> Molecular conformation and aromaticity of N-substituted porphine derivatives .....	34
<b>Gladkov L. L., Gladkova G. A.</b> Molecular structure and vibrations of indolinospironaphthoxazine molecule .....	42
<b>COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES</b> .....	46
<b>MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS</b> .....	46
<b>Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Suhorukova I. G., Egorova A. L., Orobei I. O., Karpuk P. O.</b> Substitution circuit of electrokinetic converter on shear flow .....	46
<b>PROCESSING AND TRANSMISSION OF INFORMATION</b> .....	54
<b>Saveleva M. G., Urbanovich P. P.</b> Rasterization of web documents and the use of its characteristics for steganographic copyright tprotection of electronic content .....	54
<b>Nikolaichuk A. N., Urbanovich P. P.</b> A steganographic method based on the use of the features of elements displaying in SVG format.....	64
<b>SYSTEMS ANALYSIS AND TRAINING SYSTEMS</b> .....	71
<b>Shuldova S. G., Paramonov A. I., Karnaukh D. M., Lapitskaya N. V.</b> Analysis of scientific activities of the department in the context of priority directions of research and scientific cooperation	71

---

<b>ALGORITHMIC AND PROGRAMMING</b> .....	77
<b>Prihozhy A. A., Karasik O. N.</b> Advanced heterogeneous block-parallel all-pairs shortest path algorithm.....	77
<b>Gonchar E. A.</b> Modeling named data networking networks to study their capacity.....	84
<b>Karpovich M. N.</b> Features of designing microservice-event architectures for highly loaded distributed information processing systems.....	89
<b>ANNIVERSARY OF THE SCIENTIST</b> .....	96
To the 80-th anniversary of the birth of V. S. Vikhrenko, director of the scientific school in the field of statistical thermodynamics and mechanics of continuous mediums .....	96



Редактор *Р. М. Рябая*  
Компьютерная верстка: *Е. А. Матейко, Е. В. Ильченко*  
Корректор *Р. М. Рябая*

Подписано в печать 15.03.2023. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.  
Усл. печ. л. 12,1. Уч.-изд. л. 13,0.  
Тираж 25 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:  
УО «Белорусский государственный технологический университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/227 от 20.03.2014.  
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.